用一个特殊的表示空间计算 S_n 群 $[n-1,1]$ 表示的实正交形式

刘大庆[1)]

(西安交通大学理学院物理系 西安 710049)

摘要 利用一个特殊的表示空间, 给出了 S_n 群表示 $[n-1,1]$ 的实正交形式的一般公式. 并举例说明了该技巧的一个应用.

关键词 置换群 不可约表示 表示空间

1 引言

置换群是非常重要的有限群. 因而讨论置换群及其表示, 尤其是这些表示的实正交形式, 是群论的一个重要内容.

在有限群的表示论中, 我们一般利用杨图杨算符的方法讨论置换群的表示, 例如文献[1—3]. 文献[4]实质上也是利用杨图杨算符的方法. 然而, 用这种方法得到的不可约表示一般不是实正交的. 正如文献[1]所示, 为了得到表示的实正交形式, 一般地, 还要进行若干比较复杂的计算. 本文利用一个特殊的表示空间, 讨论了 $[n-1,1]$ 表示的实正交形式. 这种方法可以给出 $[n-1,1]$ 实正交形式的一般表达式, 并且对应表示空间具有很明显的物理意义.

2 与 $[n-1,1]$ 表示等价的表示

对于置换群 S_n, 引入 n 个线形无关且正交归一的矢量, $a_1,a_2,\cdots,a_n$. 对于其中的任一群元 $S=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n\end{pmatrix}$, 定义它对 a_i 的作用为 $S(a_i)=a_{s_i}$. 于是设置换 S 的表示矩阵为 $D(S)$, 即 $S(a_i)=\sum_j a_jD_{ji}(S)$, 则

$$D_{ji}=\delta_{j,s_i}\,. \tag{1}$$

这样就得到了置换群 S_n 的一个 n 维表示. 该表示的表示矩阵每一行每一列都只有一个元素为1, 其余全部为零. 显然, 该表示是置换群的真实表示, 并且是实正交表示. 令该表示为 R^0 表示.

然而, R^0 表示是可约化的. 事实上, 取 $b_0=\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$, 则对任意置换 $S\in S_n$, 显然有 $S(b_0)=b_0$. 因而 b_0 对应于恒等表示.

从而, R^0 表示总可以分解为一个恒等表示与一个 $n-1$ 维的表示(记作 R 表示)的直和.

先考虑 R 表示的性质, 特别的, 任一群元在 R 表示中的特征标. 设群元 S 的轮换结构为 $(\cdots,2^{\lambda_2},1^{\lambda_1})$, 其中, $\lambda_p\,(p=1,2,\cdots)$ 可以为零. 定义 $d(S)=\lambda_1$, 即 $d(S)$ 为群元 S 保持矢量 $a_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 不变的个数.

引入 $b_i=a_i-b_0$, 其中 $i=1,2,\cdots,n$. 显然 b_1, b_2, $\cdots$, b_{n-1} 构成 R 表示的一组基, 且

$$b_n=-\sum_{i=1}^{n-1}b_i\,. \tag{2}$$

若 $d(S)=0$, 则置换 S 必然将某一矢量, 例如 a_k, $k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$, 变为 a_n, 从而 $s(b_k)=b_n=-\sum_{i=1}^{n-1}b_i$. 故 $\chi^R(S)=-1$. 若 $d(S)=1$, 不妨设 S 保持 a_n 不变, 这时 $\chi^R(S)=0$. 类似的若 $d(S)>1$, 不妨设 S 保持 a_n 及另外 $d(S)-1$ 个 a_k (其中 $k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$) 不变, 这时有 $\chi^R(S)=d(S)-1$. 于是, 在任何情况下都有 $\chi^R(S)=d(S)-1$.

2007 – 02 – 05 收稿, 2007 – 04 – 05 收修改稿

1) E-mail: liudq@mail.xjtu.edu.cn

从而该表示的特征标与群元S的轮换结构关系不大, 仅与$d(S)$有关. 下面将证明R表示与$[n-1,1]$表示等价从而它是不可约的.

首先, 很容易验证$[n-1,1]$表示的维数也为$n-1$, 也就是说对应杨图$[n-1,1]$有$n-1$个正则杨表,

$$y_k=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&\cdots&k&k+2&\cdots&n\\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{k+1} \\ \cline{1-1}\end{array} \tag{3}$$

其中$k=1,2,\cdots,n-1$. 不难证明, 对于一般的$n\geqslant 3$, 这$n-1$个杨表所对应的算符都是互相正交的原始幂等元

$$y_k y_j=0\,,\qquad 当\ k\neq j\ 时. \tag{4}$$

我们利用列表法计算群元S的特征标.

首先, 设$d(S)=0$. 即在给定的群元S下, 所有n个客体位置都发生变化. 不妨设S将第$k+1$个客体变为第1个客体, 则在S下, y_k变为

$$y_k(S)=\begin{array}{|c|c|}\hline a&\cdots\cdots\\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} \\ \cline{1-1}\end{array} \tag{5}$$

取$Q_{kk}=Q_{kk}^{-1}=(1,k+1)$, 则$Q_{kk}$将$y_k$变为$\overline{y_k}$, 而$\overline{y_k}$与$y_k(S)$每一行的数字都相同. 由$\delta(Q_{kk})=-1$得$D_{kk}(S)=-1$. 当$v\neq k$时, 注意到$y_v(s)$第二行的数字不可能是1, 从而数字对$(1,v+1)$必然都在$y_v(s)$的第一行中, 故$D_{vv}(S)\equiv 0$. 因而对于这样的置换群元$S$, $\chi^{[n-1,1]}S=-1$.

其次, 设$d(S)=1$. 不妨设在S作用下客体1保持不变而其余的客体全部发生改变. 对于任意y_k, 其第一列的数字对为$(1,k+1)$, 则在S作用下$k+1$必然变到第一行, 从而数字对$(1,k+1)$属于y_k的第一列同时属于$y_k(S)$的第一行, 或者$D_{kk}(S)=0$. 即$d(S)=1$时$\chi^{[n-1,1]}(S)=0$.

若$d(S)=m+1(m\geqslant 1)$. 不失一般性, 设在S作用下第$1,2,\cdots,m+1$客体保持不变. 则当$k+1\leqslant m+1$时, y_k与$y_k(S)$每一行的数字都相同, 即$k+1\leqslant m+1$时, 有$D_{kk}(S)=1$. 反之, 当$k>m$时, 数字对$(1,k+1)$必然属于y_k的第一列同时属于$y_k(S)$的第一行, 即$k>m$时有$D_{kk}(S)=0$. 故此时我们$\chi^{[n-1,1]}(S)=m$.

从而我们得到如下关系式

$$\chi^{[n-1,1]}(S)=\chi^{R}(S)=d(S)-1\,, \tag{6}$$

即R表示与$[n-1,1]$表示等价.

3 R表示的实正交形式

为得到R表示或$[n-1,1]$表示的实正交形式, 我们引入R表示对应的表示空间中一组正交归一的基矢,

$$c_i=\frac{1}{\sqrt{i+i^2}}\Big\{\big(\sum_{j=1}^{i}a_j\big)-ia_{i+1}\Big\}, \tag{7}$$

其中$i=1,2,\cdots,n-1$.

为简单计, 我们仅计算群S_n的$n-1$个生成元$P_i=(i,i+1)$的表示矩阵. 直接计算得

$$\begin{cases} P_j c_i=\dfrac{1}{j}\big(c_{j-1}+\sqrt{j^2-1}\,c_j\big), & i=j-1,\\[2mm] P_j c_i=\dfrac{1}{j}\big(\sqrt{j^2-1}\,c_{j-1}-c_j\big), & i=1,\\[2mm] P_j c_i=c_i, & i\neq j-1,j. \end{cases} \tag{8}$$

特别地, $P_1c_1=-c_1$. 于是当$j>1$时

$$D(P_j)=\begin{pmatrix} I_{j-2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{j} & \dfrac{\sqrt{j^2-1}}{j} & 0\\ 0 & \dfrac{\sqrt{j^2-1}}{j} & -\dfrac{1}{j} & 0\\ 0 & 0 & 0 & I_{n-j-1}\end{pmatrix}, \tag{9}$$

而$D(P_1)$可以写成

$$D(P_1)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & I_{n-2}\end{pmatrix},$$

这里I_k为$k\times k$的单位矩阵. 很显然, 与利用杨算符的方法相比, 本文采用的方法相当简单.

4 R表示的简单应用

在真实表示R^0中, 每个群元的表示矩阵由(1)式确定. 利用这一结果可以证明置换群中一个很著名的结论: 任意置换向对换分解的个数的奇偶性是确定的.

在表示R^0中, 任意对换$T_{ij}\triangleq(i,j)$的表示矩阵由下式确定(设$i<j$)

$$D(T_{ij})=\begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \vdots & 0 & I_{j-i} & 0 & \vdots\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{n-j}\end{pmatrix}. \tag{10}$$

显然$D(T_{ij})$都是初等矩阵且$\det(D(T_{ij}))$与i,j的具体数值无关, $\det(D(T_{ij}))=-1$. 任意置换S向不同的对换T_{ij}的分解对应于由(1)式确定的矩阵$D(S)$写成由(10)式确定的不同的初等矩阵$D(T_{ij})$的乘积的形式, 假设S可以分解成k个对换的乘积:

$S=T_{i_1j_1}T_{i_2j_2}\cdots T_{i_kj_k}$, 则有

$$D(S)=D(T_{i_1j_1})D(T_{i_2j_2})\cdots D(T_{i_kj_k})\,. \qquad (11)$$

上式两边取行列式,

$$\det(D(S))=(-1)^k\,. \qquad (12)$$

由于$\det(D(S))$与具体的分解无关, 故k的奇偶性是确定的. 事实上, $\det(D(S))$本身就是置换群S_n的一维反对称表示, $[1^n]$.

5　讨论

对于一般的置换群S_n, 得到其不可约表示$[n-1,1]$的实正交形式的一般表达式比较困难, 然而用本文介绍的方法就非常容易得$[n-1,1]$的实正交形式的一般表达式. 这是该技巧非常大的优点.

本文实质上利用了张量指标间的置换性质. $[n-1,1]$表示类似于无迹张量, 而$[n]$表示类似于张量的迹. 因而我们期望它也许能够在规范场, 例如$SU(N)$或$SO(N)$理论中得到应用. 事实上, 利用共轭表示的办法, 我们可以利用n阶完全反对称张量$a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_n$得到置换群$S_n$的一维反对称表示$[1^n]$, 或者利用$n$个$n-1$阶也是完全反对称的张量$b_i=a_i\wedge a_{i+1}\wedge\cdots\wedge a_n\wedge a_1\wedge\cdots\wedge a_{i-2}$计算置换群$S_n$的$n-1$维表示$[2,1^{n-2}]$, 等等. 由于方法是类似的, 这里就不展开讨论了.

参考文献(References)

1 MA Zhong-Qi. Group Theory in Physics. Beijing: Science Press, 2006. 203—243 (in Chinese)
(马中骐. 物理学中的群论. 北京: 科学出版社, 2006. 203—243)

2 HAN Qi-Zhi, SUN Hong-Zhou. Group Theory. Beijing: Peiking University Publishers, 1987. 56—62 (in Chinese)
(韩其智, 孙洪洲. 群论. 北京: 北京大学出版社, 1987. 56—62)

3 CHEN Jin-Quan, GAO Mei-Juan. Reduced Coefficients of Permutation Groups and Their Application. Beijing: Science Press, 1981. 1—5 (in Chinese)
(陈金全, 高美娟. 置换群约化系数及其应用. 北京：科学出版社, 1981. 1—5)

4 CHEN Jin-Quan. New Approach to Group Representation Theory. Shanghai: Shanghai Scientific and Technique Publishers, 1984. 101—133 (in Chinese)
(陈金全. 群表示论的新途径. 上海：上海科技出版社, 1984. 101—133)

Compute the Real Orthogonal Form of $[n-1,1]$ Representation of S_n Group in a Special Representation Space

LIU Da-Qing[1)]

(School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract　We show how to obtain the real orthogonal form of $[n-1,1]$ representation of S_n group by using a trick, representing S_n group in a special representation space. At last, we exemplify one of the applications of the trick.

Key words　permutation group, irreducible representation, representation space

Received 5 February 2007,　Revised 5 April 2007

1) E-mail: liudq@mail.xjtu.edu.cn