非对易torus上的新孤子解

温俊青[1;1)] 朱桥[2;2)] 石康杰[2;3)]

1 (西安石油大学理学院 西安 710065)

2 (西北大学现代物理研究所 西安 710069)

摘要 利用在非对易可积torus(环)上的算子都有约化矩阵这一特点, 孤子解的求解问题可以化为求满足代数方程$Q(M)=0$的有限维矩阵解问题. 本文研究了当矩阵M不可对角化时的情形, 分析这种情形, 得到当势函数$V(\phi)$具有三阶以上的极值点时, 有限维矩阵方程$V'(M)=0$存在不可对角化的矩阵解. 研究了这种解的一般形式, 并通过kq表象, 构造了非对易整环上以上述矩阵解为约化矩阵的新孤子解. 根据这种构造方法, 可以得到非对易orbifold上的新孤子解.

关键词 非对易torus 孤子解 kq表象 非对易orbifold

1 引言

时空坐标非对易的思想已经有好久了, 但是长期以来, 非对易几何在物理上并未受到人们的广泛重视[1, 2]. 近几年来, 随着弦理论[3]以及量子霍尔效应[4]的研究, 越来越多的非对易背景上的物理学问题引起人们的重视. 自从弦理论与非对易场论[5]之间的关系被揭示以后, 对非对易场中的孤子解的研究引起了理论物理学家的广泛关注[6—8]. 非对易场和弦理论中的孤子解经常对弦理论的非微扰和强耦合行为的研究提供一定的线索, 所以研究非对易场论中的孤子解是非常有意义的. Derrick定理[9]告诉我们, 在超过1+1维普通空间场论中由于任何标量场构形的能量总是降低, 孤子解是不可能存在的. 然而, Gopakumar, Minwalla和Strominger (GMS)[10]发现在(2+1)维平直空间中非对易场论的孤子解是存在的, 可以由非对易空间的投影算子来构成. Harvey等人提出了一种新的方法来求解孤子解[11, 12], M.Hamanaka和S.Terashima用这种方法去求解(3+1)维空间的BPS单极解[13]. 许多人将这种方法推广去求解弯曲空间上非对易规范理论的孤子解[14]. 在文献[15]中Gopakumar, Headrick和Spradin (GHS)还用k,q表象得到了在二维torus上的投影算子, 它们也是该空间的孤子解. 文献[16,17]还用GHS方法得到了非对易orbifold上的投影算子构造的孤子解.

本文利用GHS[15]的方法, 讨论了可积的不可对易torus上的孤子解的新解. 利用非对易可积torus (环)上的算子都有约化矩阵[17]这一特点, 孤子解的求解问题化为求满足代数方程$Q(M)=0$的有限维矩阵解问题. 首先简单介绍(A)当矩阵M可以对角化时的情形, 此时torus上的孤子解是以$Q(z)=0$的根为对角元的对角矩阵的相似矩阵构成(已在文献[16—18]中讨论过了). 然后着重讨论了(B)当矩阵M不可对角化时的情形, 这时矩阵M与一个约当矩阵J相似, 即$M=S^{-1}JS$. 可以推出$Q(M)=S^{-1}Q(J)S=0$, 通过求解方程$Q(J)=0\Rightarrow Q(J_i)=0$, 可以求得一系列的约当矩阵块$J_s$. 用这些约当矩阵块可求得矩阵$M$, 及相应的算子$\hat{B}$, 它就是可积非对易torus上的新孤子解. 同时, 也给出了多项式Q应满足的条件. 我们可以将此结果推广到其他非对易空间, 比如非对易orbifold上.

2 非对易场中投影算子与孤子解的关系

考虑只有实标量场的(2+1)维非对易场论. 作用量为

2005 – 04 – 30 收稿

1) E-mail: wenqing2001@eyou.com

2) E-mail: zhu_cheese0477@sina.com.cn

3) E-mail: kjshi@phy.nwu.edu.cn

$$S=\int \mathrm{d}t\mathrm{d}^2z[(\partial_t\phi*\partial_t\phi-\partial_z\phi*\partial_{\bar z}\phi)-V_*(\phi)], \quad (1)$$

为了简单起见, 只认为空间坐标是不对易的, 并且考虑一个不随时间改变的场的空间分布. 当场不随时间改变时, 能量泛函为

$$E=\int \mathrm{d}^2z(\partial_z\phi*\partial_{\bar z}\phi+V_*(\phi)), \quad (2)$$

其中$z=x+\mathrm{i}y$, $\bar z=x-\mathrm{i}y$. 用不对易的星乘积代替对易场论中的普通乘积[19]. 星乘积的定义是

$$(f*g)(z,\bar z)=\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}(\partial_z\partial_{\bar z'}-\partial_{\bar z}\partial_{z'})}f(z,\bar z)g(z',\bar z')\,|_{z=z'}, \quad (3)$$

θ是非对易参数, 星号"*"代表星乘积. 考虑方程(2)的系统在非对易参数$\theta\to\infty$的情形. 重新标度$z\to z\sqrt{\theta}$, $\bar z\to\bar z\sqrt{\theta}$, 则能量泛函变为

$$E=\int \mathrm{d}^2z\theta V_*(\phi). \quad (4)$$

GMS考虑势能是标量场的多项式即

$$V_*(\phi)=\frac{1}{2}m^2\phi^2+\sum_{j=3}^{r}\frac{b_j}{j}\phi^j, \quad (5)$$

其中$\phi^j=\phi*\phi*\cdots*\phi$. 根据$\int \mathrm{d}^2z\phi_1*\phi_2=\int \mathrm{d}^2z\phi_2*\phi_1$, 可以导出运动方程为

$$Q(\phi)\equiv\frac{\partial V}{\partial\phi}=0, \quad (6)$$

如果$V(\phi)$为对易场中的标量势, 则方程的解为$\phi=\lambda_i$, 这里$\lambda_i\in\{\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_k\}$, 是方程$m^2x+\sum\limits_{j=3}^{r}b_jx^{j-1}=0$的实根. 在对易场论中, 这些都是与空间坐标无关的平庸解. 但在非对易场论中, 可以构造方程(6)的非平庸解. GMS通过考虑高斯波包从而得出结论, 在非对易$\theta\to\infty$的极限下, 上述(2+1)维标量场存在孤子解. 在非对易几何中, 人们证明函数的星乘积同构于由非对易坐标$[\hat x,\hat y]=i$的级数构成的算子的普通乘积. 因此可以用算符形式来考虑以上问题, 则孤子解为$\hat\phi=\lambda_i\hat p$, 其中$\hat p$是投影算子, 满足$\hat p^2=\hat p$, λ_i是二次方程$m^2x+b_3x^2=0$的根.

3 非对易torus上的孤子解

以下研究非对易环(torus)上的孤子解. 首先给定两个算子$\hat y_1$和$\hat y_2$, 他们满足对易关系:

$$[\hat y_1,\hat y_2]=i, \quad (7)$$

由$\hat y_1$, $\hat y_2$组成的算子,

$$\hat O=\sum_{m,n\geqslant 0}c_{mn}\hat y_1^m\hat y_2^n, \quad (8)$$

构成不可对易平面R^2[17]. 令

$$U_1=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,l\hat y_2},\ \ U_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,l(\tau_2\hat y_1-\tau_1\hat y_2)}, \quad (9)$$

其中$l>0$, τ_1, τ_2均为实数. 且

$$U_1U_2=\mathrm{e}^{l^2\tau_2[\hat y_2,\hat y_1]}U_2U_1=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,l^2\tau_2}U_2U_1\equiv\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,A}U_2U_1, \quad (10)$$

其中$A=\dfrac{l^2\tau_2}{2\pi}$. 所有与$U_1$和$U_2$对易的非对易平面$R^2$上的算子组成非对易的环(torus), 这就是非对易torus的定义. 当A为整数时, 这种情形称为可积情形, 这时的不可对易torus称为可积的不可对易torus, 本文只讨论A为整数的情形. 在下文将给出不可对易torus上孤子解的新解(文献[15—17]给出的解是其特例).

当A为整数时, 由于U_1, U_2是对易的. 可以引入它们的共同本征函数的完全集合, 即kq表象[17],

$$|k,q\rangle=\sqrt{\frac{l}{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\,\tau_1\hat y_2^2}{2\tau_2}}\sum_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,jkl}\,|q+jl\rangle, \quad (11)$$

其中$|q+jl\rangle$是$\hat y_1$的本征值为$q+jl$的归一本征矢. 它满足

$$|k,q+l\rangle=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,lk}\,|k,\ q\rangle,\left|k+\frac{2\pi}{l},q\right\rangle=|k,q\rangle, \quad (12)$$

$$\begin{aligned}U_1\,|k,q\rangle\ &=\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,lk}\,|k,q\rangle,\\ U_2\,|k,q\rangle\ &=\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,l\tau_2q}\,|k,q\rangle=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{q}{l}A}\,|k,q\rangle,\end{aligned} \quad (13)$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{l}}\mathrm{d}k\int_0^l\mathrm{d}q\,|k,q\rangle\,\langle k,q|=\mathrm{identity}. \quad (14)$$

可以合理地假设非对易torus的所有算子都可以表示为

$$\hat B=\sum_{j_1j_2}U_1^{j_1}U_2^{j_2}\hat bU_2^{-j_2}U_1^{-j_1}, \quad (15)$$

其中$\hat b$是不可对易空间R^2上的某个算子. 将$q\in[0,l)$的区间分为A份, 则区间上所有的q都可以表示为$q=q_0+\dfrac{l}{A}s$, 其中$q_0\in\left[0,\dfrac{l}{A}\right)$, $s=0,\cdots,A-1$. 完备集$\{|k,q\rangle\}$可以写成$\{|k,q_0,s\rangle\}$, 其中

$$\begin{aligned}&|k,q_0,s\rangle=\left|k,q_0+\frac{l}{A}s\right\rangle,\\ &k\in\left[0,\frac{2\pi}{l}\right),\ q_0\in\left[0,\frac{l}{A}\right),\ s=0,\cdots,A-1.\end{aligned} \quad (16)$$

则方程(14)式可以改写为

$$\sum_{s=0}^{A-1}\int_0^{\frac{2\pi}{l}}\mathrm{d}k\int_0^{\frac{l}{A}}\mathrm{d}q_0\,|k,q_0,s\rangle\,\langle k,q_0,s|=\mathrm{identity}. \quad (17)$$

考虑一个torus上的算子在这样的完备集的矩阵元, 利

用

$$\sum_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}=\sum_m 2\pi\delta(x+2\pi m),\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x). \tag{18}$$

可以将(15)式中的 $\hat{B}$ 用 $\hat{b}$ 表示出来

$$\left\langle k,q_0+\frac{l}{A}s\left|\hat{B}\right|k',q_0'+\frac{l}{A}s'\right\rangle=$$
$$\frac{2\pi}{A}\delta(k'-k)\delta(q_0'-q_0)\left\langle k,q_0+\frac{l}{A}s\left|\hat{b}\right|k,q_0+\frac{l}{A}s'\right\rangle. \tag{19}$$

计算两个torus上的算子 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 的乘积在 kq_0s 表象的矩阵元, 得到

$$\left\langle k,q_0+\frac{l}{A}s\left|\hat{A}\hat{B}\right|k',q_0'+\frac{l}{A}s'\right\rangle=$$
$$\sum_{s''=0}^{A-1}\frac{(2\pi)^2}{A^2}\delta(k'-k)\delta(q_0'-q_0)\times$$
$$\left\langle k,q_0+\frac{l}{A}s\left|\hat{a}\right|k,q_0+\frac{l}{A}s''\right\rangle\times$$
$$\left\langle k,q_0+\frac{l}{A}s''\left|\hat{b}\right|k,q_0+\frac{l}{A}s'\right\rangle. \tag{20}$$

令 $A\times A$ 的矩阵 $M_b(k,q_0)$ 的矩阵元为

$$M_b(k,q_0)_{s's''}\equiv\frac{2\pi}{A}\left\langle k,q_0+\frac{l}{A}s'\left|\hat{b}\right|k,q_0+\frac{l}{A}s''\right\rangle, \tag{21}$$

称 $M_b(k,q_0)$ 为算子 $\hat{B}$ 的约化矩阵. 从(20)式知道对在torus上的算子 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$, 其乘积 $\hat{A}\hat{B}$ 的约化矩阵等于它们的约化矩阵的乘积. 对于由方程(5)所写的势, 由(6)式知在torus上的孤子解 $\hat{\phi}$ 必须也只须满足 $\dfrac{\partial V(\hat{\phi})}{\partial\hat{\phi}}=0$. 这就要求

$$Q(M_\phi(k,q_0))=0. \tag{22}$$

(22)式对所有的 k, q_0 成立. 其中 $Q(\hat{\phi})=\dfrac{\partial V(\hat{\phi})}{\partial\hat{\phi}}$, M_ϕ 是对应算子 $\hat{\phi}$ 的约化矩阵. 为了求得满足(22)式的矩阵, 可以考虑一个 $A\times A$ 的矩阵 M 满足矩阵方程 $Q(M)=0$, Q 是多项式. 可以分两种情况进行讨论, 即矩阵 M 可以对角化与不可以对角化两种情况.

(A) 首先讨论矩阵 M 可以对角化时的情形, 如果矩阵 M 可以对角化, 则矩阵 M 可以写成如下形式

$$M=S^{-1}M_0S, \tag{23}$$

其中 $S=S(k,q_0)$ 是任意可逆矩阵, M_0 是对角矩阵. 则可以得到

$$Q(M)=S^{-1}Q(M_0)S=0\Rightarrow Q(M_0)=0. \tag{24}$$

因此, M_0 的每个对角元都满足

$$Q(M_{0jj})=0. \tag{25}$$

即其对角元是 $Q(z)=0$ 的根. 因此, $Q(M)=0$ 的解是

$$M=S^{-1}M_0S=S^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_{i_1}&&&\\&\lambda_{i_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_{i_N}\end{pmatrix}S, \tag{26}$$

其中 S 是关于 k,q_0 的任意可逆矩阵, λ_{i_k} 是 $Q(z)=0$ 的根.

(B) 当矩阵 M 不可对角化时的情形, 根据线形代数的一般理论, 矩阵 M 可以与一个约当形矩阵 J 相似, 即

$$M=S^{-1}JS. \tag{27}$$

其中约当矩阵定义为

$$J=\begin{pmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&\ddots&\\&&&J_s\end{pmatrix}, \tag{28}$$

$$J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i&1&0&\cdots&0\\0&\lambda_i&1&0&\cdots\\0&0&\lambda_i&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&1\\0&0&\cdots&0&\lambda_i\end{pmatrix}=\lambda_iI_i+K_i,$$
$$i=1,2,\cdots,s. \tag{29}$$

其中 I_i 是 $N_i\times N_i$ 的单位矩阵, K_i 是 $a_{j,j+1}=1$, 其余矩阵元为0的矩阵. 显然, $Q(M)=0$ 的条件是(由 $M=S^{-1}JS$)

$$Q(M)=S^{-1}Q(J)S=0$$
$$\Rightarrow Q(J)=0\Rightarrow Q(J_i)=0. \tag{30}$$

然而, $J_i=\lambda_iI_i+K_i$, 代入(30)式, 由于 I_i 与 K_i 对易, 可以写为 $J_i=\lambda_i+K_i$. 当 Q 的多项式为

$$Q(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n, \tag{31}$$

时, 得到

$$Q(J_i)=a_0+a_1(\lambda_i+K_i)+a_2(\lambda_i+K_i)^2+\cdots+a_n(\lambda_i+K_i)^n. \tag{32}$$

将上式整理之后, 可以得到

$$Q(J_i)=Q_0(\lambda_i)I+Q_1(\lambda_i)K_i+Q_2(\lambda_i)K_i^2+\cdots+Q_n(\lambda_i)K_i^n \tag{33}$$

其中$Q_j(\lambda_i)$是λ_i的多项式, 注意到矩阵K_i有如下关系式

$$K_i^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{34}$$

即K_i^2是一个$a_{j,j+2}=1$, 其余矩阵元为0的矩阵, K_i^m是一个$a_{j,j+m}=1$, 其余矩阵元为0的矩阵. 因而

$$K_i^{N_i}=0. \tag{35}$$

由(30), (33)式及(35)式矩阵K_i满足的关系, 可得

$$Q(J_i)=0\Rightarrow Q_0(\lambda_i)=0,Q_1(\lambda_i)=0,\cdots,Q_{N_i-1}(\lambda_i)=0. \tag{36}$$

由(36)式可以得到联立方程

$$\begin{aligned} Q_0(\lambda_i) &= 0, \\ &\vdots \\ Q_{N_i-1}(\lambda_i) &= 0. \end{aligned} \tag{37}$$

上述方程组如果有根, 则此根可以形成J_i, 满足$Q(J_i)=0$. 以上的分析就是$Q(M)=0$, 当M不能对角化时的情形. 当Q是多项式时, 这个分析虽然麻烦, 但是直截了当. 注意到$Q(x)=\dfrac{\partial V}{\partial x}$, 下面将要分析当$Q(x)=0$存在$N_i$重根$\lambda_i$时, (37)式联立方程有解.

由于$N_i\leqslant N$, 所以不管Q的次数n有多大, 方程(37)只是到$N_i=N-1$为止. 方程(37)有解, 对Q是有特定要求的, 比如当$Q(M)=\sin M$时, 可以证明, 不存在(B)型的解.

$$\sin M=M-\frac{1}{3!}M^3+\frac{1}{5!}M^5+\cdots, \tag{38}$$

由方程(32)可以得到

$$\begin{aligned} Q(J_i)=&(\lambda_i+K_i)-\frac{1}{3!}(\lambda_i+K_i)^3+\frac{1}{5!}(\lambda_i+K_i)^5+\cdots=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda_i+K_i)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda_i+K_i)})= \\ &\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}K_i}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}K_i})=\frac{1}{2\mathrm{i}}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_i}(1+\mathrm{i}K_i+\frac{1}{2!}(\mathrm{i}K_i)^2+\cdots+\frac{1}{(N-1)!}(\mathrm{i}K_i)^{N-1})- \\ &\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_i}(1-\mathrm{i}K_i+\frac{1}{2!}(-\mathrm{i}K_i)^2+\cdots+\frac{1}{(N-1)!}(-\mathrm{i}K_i)^{N-1})]=0. \end{aligned} \tag{39}$$

从(39)式可以推得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_i}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_i}=0,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_i}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_i}=0\Rightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_i}=0. \tag{40}$$

因为$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_i}=0$是不存在的, 所以这时没有(B)型的解.

以下分析Q存在(B)型解的条件, (32)式到(33)式的转换, 其实是$Q(z)$的泰勒展开.

$$Q(z)=Q(z_0)+(z-z_0)Q'(z_0)+\frac{1}{2!}(z-z_0)^2Q''(z_0)+\cdots, \tag{41}$$

令$z_0=\lambda_i$, $z-z_0=K_i$就得到(33)式. 所以方程(37)就是

$$\begin{aligned} Q(\lambda_i)&=0, \\ Q'(\lambda_i)&=0, \\ &\vdots \\ Q^{(N_i-1)}(\lambda_i)&=0, \quad N_i\leqslant N. \end{aligned} \tag{42}$$

即$Q(z)$有N_i重根λ_i, 这就是Q存在(B)型解的条件.

在上例中$Q(M)=\sin M$没有重根, 所以不存在(B)型的解. 值的注意的是, 当$Q(z)$有N_i重根时,

$$\begin{aligned} &J_s=\lambda_i, \quad J_s=\lambda_iI^{(2)}+K^{(2)}, \quad J_s=\lambda_iI^{(3)}+K^{(3)},\cdots, \\ &J_s=\lambda_iI^{(N_i)}+K^{(N_i)}, \end{aligned} \tag{43}$$

都可以作为约当矩阵而出现在M中. 其中, $I^{(m)}$和$K^{(m)}$都是$m\times m$的矩阵. $I^{(m)}$是单位矩阵, $K^{(m)}$是非零矩阵元只有$a_{j,j+1}=1$的矩阵. 这时, 可以用这些约当矩阵块J_s组成约当矩阵J, 然后将矩阵J用任意的可逆矩阵$S(k,q_0)$做相似变换, 得到$A\times A$的矩阵M. 这就得到有限维矩阵($A\times A$矩阵)满足方程$Q(M)=0$的所有情形, 这些例外情形即(B)情形是过去的文献[17,18]中从未包括过的. 在文献[17,18]中取投影算符时, 没有这种例外情形, 因为满足$p^2=p$的投影矩阵总是可以对角化的.

若已求得矩阵M, 通过(19)式, 可求出相应的算子$\hat{B}$, 即

$$\hat{B}=I\hat{B}I=\sum_{s'=0}^{A-1}\sum_{s=0}^{A-1}\iint_0^{\frac{2\pi}{l}}\mathrm{d}k\mathrm{d}k'\iint_0^{\frac{l}{A}}\mathrm{d}q_0\mathrm{d}q_0'\,|k,q_0,s\rangle\langle k,q_0,s|\sum_{j_1j_2}U_1^{j_1}U_2^{j_2}\hat{b}U_2^{-j_2}U_1^{-j_1}\,|k',q_0',s'\rangle\langle k',q_0',s'|=$$

$$\sum_{s'=0}^{A-1}\sum_{s=0}^{A-1}\int_0^{\frac{2\pi}{l}}\!\!\int \mathrm{d}k\mathrm{d}k'\int_0^{\frac{l}{A}}\!\!\int \mathrm{d}q_0\mathrm{d}q_0'\,|k,q_0,s\rangle\,\frac{2\pi}{A}\delta(k'-k)\delta(q_0'-q_0)\left\langle k,q_0+\frac{l}{A}s\right|\hat{b}\left|k,q_0+\frac{l}{A}s'\right\rangle\langle k',q_0',s'|=$$

$$\sum_{s'=0}^{A-1}\sum_{s=0}^{A-1}\int_0^{\frac{2\pi}{l}}\!\!\int \mathrm{d}k\mathrm{d}k'\int_0^{\frac{l}{A}}\!\!\int \mathrm{d}q_0\mathrm{d}q_0'\,|k,q_0,s\rangle\,\delta(k'-k)\delta(q_0'-q_0)M_b(k,q_0)_{ss'}\,\langle k',q_0',s'|=$$

$$\sum_{s'=0}^{A-1}\sum_{s=0}^{A-1}\int_0^{\frac{2\pi}{l}}\mathrm{d}k\int_0^{\frac{l}{A}}\mathrm{d}q_0\,|k,q_0,s\rangle\,\langle k,q_0,s'|\,M_b(k,q_0)_{ss'}. \tag{44}$$

其中$M_b(k,q_0)_{ss'}$是矩阵M的矩阵元. $\hat{\phi}=\hat{B}$就是可积非对易torus上的新孤子解.

参考文献(References)

1 Landi G. An Introduction to Non-commutative Space and Their Geometry. arXiv:hep-th/9701078

2 Varilly J. Nucl.Phys., 1998, **64**: 191—196

3 Seiberg N, Witten E. String Theory and Non-commutative Geometry. arXiv:hep-th/9908142

4 Karabali D, Nair V P. Nucl.Phys., 2002, **B641**: 533—546

5 Douglas M R, Nekrasov N A. Rev.Mod.Phys., 2001, **73**: 977—1029

6 Martinec E J, Moore G. Noncommutative Solitons on Orbifolds. arXiv:hep-th/0101199

7 HOU Bo-Yu, HOU Bo-Yuan, YUE Rui-Hong. Fuzzy Sphere Bimodule and ABS Construction to The Exact Soliton Solution. arXiv:hep-th/0109091

8 HOU Bo-Yu, PENG Dan-Tao. Int. J. Mod. Phys., 2002, **B16**: 2079—2088

9 Derrick G. J. Math. Phys., 1964, **5**: 1252

10 Gopakumar R, Minwalla S, Strominger A. Noncommutative Soliton. arXiv:hep-th/0003160

11 Harvey J. Komaba Lectures on Noncommutative Solitons and D-branes. arXiv:hep-th/0102076

12 Harvey J, Kraus P, Larsen F. Exact Noncommutative Solitons. arXiv:hep-th/0010060

13 Hamanaka M, Terashima S. On Exact Noncommutative BPS Solitons. arXiv:hep-th/0010221

14 Gross D J, Nekrasov N A. Solitons in Noncommutative Gauge Theory. arXiv:hep-th/0010090

15 Gopakumar R, Headrick M, Spradin M. Commun. Math. Phys., 2003, **233**: 355—381

16 HOU Bo-Yu, SHI Kang-Jie, YANG Zhan-Ying. Lett. Math. Phys., 2002, **61**: 205—220

17 DENG Hui, HOU Bo-Yu, SHI Kang-Jie et al. J. Math. Phys., 2004,**45**: 978—995

18 DENG Hui, HOU Bo-Yu, SHI Kang-Jie et al. The Manifest Covariant Soliton Solutions on Noncommutative Orbifold T^2/Z_6 and T^2/Z_3. arXiv:hep-th/0403102

19 Wong M W. Weyl Transformations. New York: Springer Verlag, 1998. 243—249

New Soliton Solutions in Noncommutative Torus

WEN Jun-Qing[1;1)] ZHU Qiao[2;2)] SHI Kang-Jie[2;3)]

1 (School of Science, Xi'an Shiyou University, Xi'an 710065, China)

2 (Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract Besed on finite dimensional reduced matrices of operators on integral noncommutative torus, soliton solution problem can be converted into the finite matrix solution problem satisfying the algebraic equation $Q(M)=0$. In this paper, we mainly study the condition of reduced matrix for the operator which cannot be diagonalized. When the potential function $V(\phi)=0$ has an extremum point in three or more rank, there exist matrix solution that cannot be diagonalized for the finite dimensional matrix equation $V'(M)=0$. We study the general form of the solution and construct new soliton solution on noncommutative integral ring. In terms of the construction method, we obtain soliton solutions on noncommutative orbifold.

Key words noncommutative torus, soliton solution, kq representation, noncommutative orbifold

Received 30 April 2005

1) E-mail: wenqing2001@eyou.com

2) E-mail: zhu_cheese0477@sina.com.cn

3) E-mail: kjshi@phy.nwu.edu.cn