非对易相空间中角动量的分裂*

王剑华[1] 李康[2]

1 (陕西理工学院物理系 汉中 723000)
2 (杭州师范学院物理系 杭州 310036)

摘要 非对易空间效应是一种在弦尺度下出现的物理效应. 本文首先介绍了在Schwinger表象中角动量的3个分量用产生–消灭算符的表示形式, 接着讨论了非对易相空间的量子力学代数; 然后用对易空间谐振子的产生–消灭算符表示出了在非对易情况下的角动量; 最后讨论了非对易相空间中角动量的分裂.

关键词 非对易相空间 非对易量子力学 角动量分裂

1 引言

自从上个世纪量子力学诞生开始,人们就广泛的运用它的思想和方法研究我们的世界. 量子力学和量子场论是研究微观粒子和场的运动规律的科学, 在原子和分子的尺度下, 空间是对易的. 但是, 在弦的尺度下出现了空间的非对易效应. 最近, 在具有非零背景场B的D膜理论低能效应研究的推动下, 非对易空间的问题在物理学界引起了极大的关注和兴趣[1—26]. 尽管研究非对易空间问题的理论和方法主要来自于量子场论, 然而, 在量子力学的框架下研究一些可解模型的非对易空间效应也是非常重要的工作. 文献[5]—[18]对非对易量子力学微扰方面的问题进行了广泛的研究. 我们工作的重点是把单粒子量子力学的产生–消灭算符推广到非对易空间中服从玻色–爱因斯坦统计的态矢量空间的玻色子系统, 在非微扰的情况下, 重新定义产生–消灭算符. 并且在所给出的相空间变量的对易关系中包含了空间–空间和动量–动量两个方面的非对易性. 其方法是把非对易相空间中的产生和消灭算符用对易相空间的产生–消灭算符进行线性展开. 然后用产生–消灭算符研究非对易空间的角动量.

在本文中, 我们感兴趣的是在非微扰的情况下探讨非对易量子力学的一些具有本质性的问题. 首先在假设非对易空间产生–消灭算符形式不变的情况下, 运用非对易空间的基本关系式, 给出产生–消灭算符的对易关系. 再用对易空间的产生–消灭算符表示非对易空间的产生–消灭算符, 得到一组满足Bose-Einstein统计的非对易相空间的产生–消灭算符. 用这组算符表示角动量, 进而讨论角动量在非对易相空间的分裂.

2 Schwinger表象中的角动量

在量子力学中, 采用自然单位制($\hbar=c=1$), 如果算符满足如下关系

$$[J_\alpha,\ J_\beta]=\mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}J_\gamma,\quad (\alpha,\beta,\gamma=x,y,z\text{或者}1,2,3),\tag{1}$$

则以J_x, J_y, J_z为3个分量的矢量算符$\boldsymbol{J}$, 称为角动量算符. 而角动量的平方算符定义为

$$J^2=J_x^2+J_y^2+J_z^2,\tag{2}$$

这样定义的角动量不仅适用于轨道角动量, 而且适用于自旋角动量以及由它们合成的角动量.

下面借助谐振子的代数解法来讨论角动量问题. 考虑二维各向同性谐振子, 相应的两类声子的产生–消灭算符用a_1^+,a_1,a_2^+,a_2来表示, 它们满足

$$[a_i,a_j^+]=\delta_{ij}\quad,\quad [a_i,a_j]=[a_i^+,a_j^+]=0,\tag{3}$$

定义厄米算符(通常称为粒子数算符):

$$N_1=a_1^+a_1\quad,\quad N_2=a_2^+a_2,\tag{4}$$

2006 – 02 – 16 收稿
* 国家自然科学基金(10447005, 90303003, 10575026)和浙江省自然科学基金(M103042)资助

它们的本征函数和本征值为

$$|n_1,n_2\rangle = \left[(a_1^+)^{n_1}(a_2^+)^{n_2}/\sqrt{n_1!n_2!}\right]|0\rangle,\quad (n_1,n_2=1,2,3,\cdots),\tag{5}$$

以 $|n_1,n_2\rangle$ 为基构成的希尔伯特空间称为Schwinger表象.

在Schwinger表象中, 把角动量的3个分量用产生–消灭算符表示成:

$$\begin{cases} J_x=\dfrac{1}{2}(a_1^+a_2+a_2^+a_1)\\ J_y=\dfrac{1}{2i}(a_1^+a_2-a_2^+a_1)\\ J_z=\dfrac{1}{2}(a_1^+a_1-a_2^+a_2)\end{cases},\tag{6}$$

容易验证[27], (6)式满足角动量定义(1). 把(6)代入(2), 有

$$J^2=J_x^2+J_y^2+J_z^2=\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right),\qquad (N=N_1+N_2),\tag{7}$$

把角动量算符作用在 $|n_1,n_2\rangle$, 有

$$\begin{aligned} J^2|n_1,n_2\rangle &= \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)|n_1,n_2\rangle,\\ J_z|n_1,n_2\rangle &= \frac{1}{2}(n_1-n_2)|n_1,n_2\rangle,\end{aligned}\tag{8}$$

上式表明, $|n_1,n_2\rangle$ 是 J^2 和 J_z 的共同本征态.

3 非对易量子力学代数

在对易空间中, 坐标和动量、坐标和坐标、动量和动量的对易关系为

$$\begin{cases}[x_i,p_j]=\mathrm{i}\delta_{ij}\\ [x_i,x_j]=0\\ [p_i,p_j]=0\end{cases},\quad (i,j=1,2,\cdots,n),\tag{9}$$

变量 (x_i,p_i) 与产生–消灭算符 $(a_i,\ a_i^+)$ 有如下的关系:

$$x_i=\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega}}(a_i+a_i^+);\quad p_i=\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}(a_i-a_i^+),\quad (i=1,2,\cdots,n),\tag{10}$$

这里 a_i 和 a_i^+ 满足对易关系:

$$[a_i,a_j^+]=\delta_{ij};\ [a_i,a_j]=[a_i^+,a_j^+]=0,\ (i,j=1,2,\cdots,n).\tag{11}$$

在弦的尺度下出现了空间的非对易效应. 在后面的讨论中用 $\hat{F}$ 表示非对易空间算符, F 表示对易空间算符. 在非对易相空间中, 用 $\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 来表示坐标和动量算符, 它们的对易关系由下面的公式给出[1]

$$\begin{cases}[\hat{x}_i,\hat{p}_j]=\mathrm{i}\delta_{ij}\\ [\hat{x}_i,\hat{x}_j]=\mathrm{i}\Theta_{ij}\\ [\hat{p}_i,\hat{p}_j]=\mathrm{i}\bar{\Theta}_{ij}\end{cases},\quad (i,j=1,2,\cdots,n),\tag{12}$$

其中 $\{\Theta_{ij}\}$ 和 $\{\bar{\Theta}_{ij}\}$ 是完全反对称矩阵. 用对易相空间中的 x 和 p 来表示非对易相空间中的 $\hat{x}$ 和 $\hat{p}$, 有如下关系

$$\begin{cases}\hat{x}_i=a_{ij}x_j+b_{ij}p_j\\ \hat{p}_i=c_{ij}x_j+d_{ij}p_j\end{cases},\quad (i=1,2,\cdots,n),\tag{13}$$

利用文献[1]的结果, 有

$$\Theta\bar{\Theta}=4\alpha\beta(\alpha\beta-1)\cdot I,\tag{14}$$

其中 I 为单位矩阵, 于是可得

$$\begin{cases}\hat{x}_i=\alpha x_i-\dfrac{1}{2\alpha}\Theta_{ij}p_j\\ \hat{p}_i=\beta p_i+\dfrac{1}{2\beta}\bar{\Theta}_{ij}x_j\end{cases},\quad (i=1,2,\cdots,n).\tag{15}$$

在非对易相空间中引入算符 $\hat{a}_i$ 和 $\hat{a}_i^+$, 它们形式如下

$$\hat{a}_i=\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}\left(\hat{x}_i+\frac{\mathrm{i}}{\mu\omega}\hat{p}_i\right);\quad \hat{a}_i^+=\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}\left(\hat{x}_i-\frac{\mathrm{i}}{\mu\omega}\hat{p}_i\right),\tag{16}$$

把(15)式代入(16)式, 再利用(12)式很容易得到如下对易关系

$$\begin{cases}[\hat{a}_i,\ \hat{a}_j^+]=\delta_{ij}+\mathrm{i}\mu\omega\Theta_{ij}\\ [\hat{a}_i,\ \hat{a}_j]=[\hat{a}_i^+,\ \hat{a}_j^+]=\dfrac{\mathrm{i}}{2}\mu\omega\left(\Theta_{ij}-\dfrac{1}{\mu^2\omega^2}\bar{\Theta}_{ij}\right)\end{cases},\tag{17}$$

因为所讨论的问题服从Bose-Einstein统计, 所以 $\hat{a}_i^+$ 与 $\hat{a}_j^+$ 对易, 即 $[\hat{a}_i^+,\hat{a}_j^+]=0$. 由此可以得到连续性条件:

$$\bar{\Theta}=\mu^2\omega^2\Theta\quad 或\quad \bar{\Theta}_{ij}=\mu^2\omega^2\Theta_{ij},\quad (i,j=1,2,\cdots,n),\tag{18}$$

把(18)式代入(15)式中, 可得

$$\begin{cases}\hat{x}_i=\alpha x_i-\dfrac{1}{2\alpha}\Theta_{ij}p_j\\ \hat{p}_i=\beta p_i+\dfrac{1}{2\beta}\mu^2\omega^2\Theta_{ij}x_j\end{cases},\quad (i=1,2,\cdots,n).\tag{19}$$

4 非对易相空间的产生–消灭算符

下面用算符 a_i 和 a_i^+ 来线性表示 $\hat{a}_i$ 和 $\hat{a}_i^+$. 把(10)

式和 (19) 式代入 (16) 式有

$$\begin{cases} \hat{a}_i = \dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)a_i + \dfrac{\mathrm{i}}{4}\mu\omega\left(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\alpha}\right)\Theta_{ij}a_j + \\ \qquad \dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)a_i^+ + \dfrac{\mathrm{i}}{4}\mu\omega\left(\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}\right)\Theta_{ij}a_j^+ \\ \hat{a}_i^+ = \dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)a_i^+ - \dfrac{\mathrm{i}}{4}\mu\omega\left(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\alpha}\right)\Theta_{ij}a_j^+ + \\ \qquad \dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)a_i - \dfrac{\mathrm{i}}{4}\mu\omega\left(\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}\right)\Theta_{ij}a_j . \end{cases}, \quad (20)$$

从因果关系知道 $\hat{a}_i$ 应由 a_i 表示, $\hat{a}_i^+$ 应由 a_i^+ 表示. 因此从(20)式可以看出 $\alpha=\beta$. 设

$$\alpha=\beta=:\alpha, \quad (21)$$

于是 (20) 式变为

$$\begin{cases} \hat{a}_i = \alpha a_i + \dfrac{\mathrm{i}}{2\alpha}\mu\omega\Theta_{ij}a_j \\ \hat{a}_i^+ = \alpha a_i^+ - \dfrac{\mathrm{i}}{2\alpha}\mu\omega\Theta_{ij}a_j^+ \end{cases}, \quad (i=1,2,\cdots,n), \quad (22)$$

在这里

$$\Theta_{il}\Theta_{lj} = -\theta^2\delta_{ij}, \qquad \theta = \frac{2\alpha}{\mu\omega}\sqrt{1-\alpha^2}. \quad (23)$$

在非对易相空间中, 当 $n=2$ 时, 有 $\Theta=\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$, (22)式变成:

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = \alpha a_1 + \dfrac{\mathrm{i}}{2\alpha}\mu\omega\theta a_2, \quad \hat{a}_1^+ = \alpha a_1^+ - \dfrac{\mathrm{i}}{2\alpha}\mu\omega\theta a_2^+, \\ \hat{a}_2 = \alpha a_2 + \dfrac{\mathrm{i}}{2\alpha}\mu\omega\theta a_1, \quad \hat{a}_2^+ = \alpha a_2^+ - \dfrac{\mathrm{i}}{2\alpha}\mu\omega\theta a_1^+, \end{cases}, \quad (24)$$

由 (24) 式给出的 $\hat{a}_1^+$, $\hat{a}_2^+$, $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$ 具有产生–消灭算符的对易关系, 即

$$[\hat{a}_i,\hat{a}_j^+]=\delta_{ij}, \quad [\hat{a}_i,\hat{a}_j]=[\hat{a}_i^+,\hat{a}_j^+]=0. \quad (i,j=1,2). \quad (25)$$

5 角动量分量的矩阵元

在非对易相空间中, 角动量的定义与量子力学中的定义类似, 即定义角动量算符的分量为

$$\begin{cases} \hat{J}_x = \dfrac{1}{2}(\hat{a}_1^+\hat{a}_2 + \hat{a}_2^+\hat{a}_1) \\ \hat{J}_y = \dfrac{1}{2i}(\hat{a}_1^+\hat{a}_2 - \hat{a}_2^+\hat{a}_1) \\ \hat{J}_z = \dfrac{1}{2}(\hat{a}_1^+\hat{a}_1 - \hat{a}_2^+\hat{a}_2) \end{cases}, \quad (26)$$

利用 (25) 式, 仿照对易空间中的做法[27], 可以证明(26)式定义的算符服从一般的角动量对易关系, 即

$$[\hat{J}_\alpha,\hat{J}_\beta]=\mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{J}_\gamma, \quad (\alpha,\beta,\gamma=x,y,z \text{ 或者 } 1,2,3), \quad (27)$$

这说明在非对易情况下, 角动量的Schwinger表象描述形式是成立的. 同样也可以定义粒子数算符

$$\hat{N}_1=\hat{a}_1^+\hat{a}_1 \quad , \quad \hat{N}_2=\hat{a}_2^+\hat{a}_2. \quad (28)$$

5.1 $\hat{J}_x$ 的矩阵元

把 (24) 式代入 (26) 式, 对于 $\hat{J}_x$ 有

$$\begin{aligned} \hat{J}_x \ = \ & \frac{1}{2}(\hat{a}_1^+\hat{a}_2+\hat{a}_2^+\hat{a}_1) = \frac{1}{2}\Bigg[\left(\alpha a_1^+ - \frac{\mathrm{i}}{2\alpha}\mu\omega\theta a_2^+\right)\times \\ & \left(\alpha a_2 - \frac{\mathrm{i}}{2\alpha}\mu\omega\theta a_1\right) + \left(\alpha a_2^+ + \frac{\mathrm{i}}{2\alpha}\mu\omega\theta a_1^+\right)\times \\ & \left(\alpha a_1 + \frac{\mathrm{i}}{2\alpha}\mu\omega\theta a_2\right)\Bigg], \end{aligned} \quad (29)$$

经过进一步的整理, 并且利用 (23) 式可得

$$\begin{aligned} \hat{J}_x \ = \ & \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{4\alpha^2}\mu^2\omega^2\theta^2\right)\cdot(a_1^+a_2+a_2^+a_1) = \\ & (2\alpha^2-1)\cdot\frac{1}{2}(a_1^+a_2+a_2^+a_1), \end{aligned} \quad (30)$$

$\hat{J}_x$ 的矩阵元为

$$\langle n_1,n_2|\,\hat{J}_x\,|n_1',n_2'\rangle = (2\alpha^2-1)\,\langle n_1,n_2|\,J_x\,|n_1',n_2'\rangle, \quad (31)$$

上式表明, 在非对易相空间中, 角动量的 X 分量只有模的变化, 而无分裂现象.

5.2 $\hat{J}_y$ 的矩阵元

同样把 (24) 式代入 (26) 式, 对于 $\hat{J}_y$ 有

$$\begin{aligned} \hat{J}_y \ = \ & \frac{1}{2i}(\hat{a}_1^+\hat{a}_2-\hat{a}_2^+\hat{a}_1) = \frac{1}{2}\Bigg[\left(\alpha a_1^+ - \frac{\mathrm{i}}{2\alpha}\mu\omega\theta a_2^+\right)\times \\ & \left(\alpha a_2 - \frac{\mathrm{i}}{2\alpha}\mu\omega\theta a_1\right) - \left(\alpha a_2^+ + \frac{\mathrm{i}}{2\alpha}\mu\omega\theta a_1^+\right)\times \\ & \left(\alpha a_1 + \frac{\mathrm{i}}{2\alpha}\mu\omega\theta a_2\right)\Bigg], \end{aligned} \quad (32)$$

利用 (23) 式, 经过进一步的整理可得

$$\hat{J}_y = (2\alpha^2-1)\cdot\frac{1}{2i}(a_1^+a_2-a_2^+a_1) - \frac{1}{2}\mu\omega\theta(a_1^+a_1+a_2^+a_2), \quad (33)$$

$\hat{J}_y$ 的矩阵元为

$$\begin{aligned} \langle n_1,n_2|\,\hat{J}_y\,|n_1',n_2'\rangle \ = \ & (2\alpha^2-1)\,\langle n_1,n_2|\,J_y\,|n_1',n_2'\rangle - \\ & \frac{1}{2}\mu\omega\theta(n_1'+n_2')\delta_{n_1'n_2',n_1n_2}, \end{aligned} \quad (34)$$

上式表明, 在非对易相空间中, 角动量的 Y 分量不仅有模的变化, 而且有分裂项出现.

5.3 $\hat{J}_z$ 的矩阵元

再把(24)式代入(26)式, 对于 $\hat{J}_z$ 有

$$\hat{J}_z = \frac{1}{2}(\hat{a}_1^+\hat{a}_1-\hat{a}_2^+\hat{a}_2)=\frac{1}{2}\left[\left(\alpha a_1^+-\frac{\mathrm{i}}{2\alpha}\mu\omega\theta a_2^+\right)\times \left(\alpha a_1+\frac{\mathrm{i}}{2\alpha}\mu\omega\theta a_2\right)-\left(\alpha a_2^++\frac{\mathrm{i}}{2\alpha}\mu\omega\theta a_1^+\right)\times \left(\alpha a_2-\frac{\mathrm{i}}{2\alpha}\mu\omega\theta a_1\right)\right], \tag{35}$$

利用(23)式, 经过进一步的整理可得

$$\hat{J}_z=(2\alpha^2-1)\cdot\frac{1}{2}(a_1^+a_1-a_2^+a_2), \tag{36}$$

$\hat{J}_z$ 的矩阵元为

$$\langle n_1,n_2|\,\hat{J}_z\,|n_1',n_2'\rangle=(2\alpha^2-1)\,\langle n_1,n_2|\,J_z\,|n_1',n_2'\rangle= (2\alpha^2-1)\frac{1}{2}(n_1'-n_2')\delta_{n_1'n_2',n_1n_2}, \tag{37}$$

上式表明, 在非对易相空间中, 角动量的Z分量仅有模的变化, 而无分裂项出现. 值得指出的是, 当$\theta=0$, $\alpha=1$, 给出的结果回到对易空间的情况.

6 角动量的分裂

由角动量理论可知$\hat{J}^2$和$\hat{J}_z$有共同的本征函数. 由于角动量的3个分量两两不对易及测不准原理, 不能得到$\boldsymbol{\hat{J}}=\hat{J}_x\boldsymbol{i}+\hat{J}_y\boldsymbol{j}+\hat{J}_z\boldsymbol{k}$的本征值. 联想到卡西米尔算符$\hat{J}^2=\hat{J}_x^2+\hat{J}_y^2+\hat{J}_z^2$, 可以得到角动量的平方, 由角动量的平方和来求角动量的大小.

在非对易相空间中, 定义角动量的平方算符为

$$\hat{J}^2=\hat{J}_x^2+\hat{J}_y^2+\hat{J}_z^2, \tag{38}$$

把(26)式代入上式, 再利用(30)式, 有

$$\hat{J}^2=\hat{J}_x^2+\hat{J}_y^2+\hat{J}_z^2=\frac{1}{2}\hat{N}\left(\hat{N}+\frac{1}{2}\right), \tag{39}$$

再把(24)式代入上式, 即

$$\begin{aligned}\hat{J}^2 =& \frac{1}{2}(\hat{a}_1^+\hat{a}_1+\hat{a}_2^+\hat{a}_2)\cdot\left[\frac{1}{2}(\hat{a}_1^+\hat{a}_1+\hat{a}_2^+\hat{a}_2)+\frac{1}{2}\right]=\\ &\frac{1}{2}\left[\left(\alpha^2+\frac{1}{4\alpha^2}\mu^2\omega^2\theta^2\right)\cdot(a_1^+a_1+a_2^+a_2)+\right.\\ &\left.\mathrm{i}\mu\omega\theta(a_1^+a_2-a_2^+a_1)\right]\times\\ &\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\alpha^2+\frac{1}{4\alpha^2}\mu^2\omega^2\theta^2\right)\cdot(a_1^+a_1+a_2^+a_2)+\right.\right.\\ &\left.\left.\mathrm{i}\mu\omega\theta(a_1^+a_2-a_2^+a_1)\right]+1\right\},\end{aligned} \tag{40}$$

经过进一步的整理, 并且利用(14)式可得

$$\begin{aligned}\hat{J}^2 =& \frac{1}{2}\left[N+\mathrm{i}\mu\omega\theta(a_1^+a_2-a_2^+a_1)\right]\times\\ &\left\{\frac{1}{2}[N+\mathrm{i}\mu\omega\theta(a_1^+a_2-a_2^+a_1)]+1\right\}=\\ &\frac{1}{4}[N-2\mu\omega\theta J_y]^2+\frac{1}{2}[N-2\mu\omega\theta J_y]=\\ &\frac{1}{2}N\left(\frac{1}{2}N+1\right)-\mu^2\omega^2\theta^2J_y^2-\\ &\frac{1}{2}\mu\omega\theta(NJ_y+J_yN)-\mu\omega\theta J_y,\end{aligned} \tag{41}$$

根据(4)式, 可以把上式中的第三项进行改写

$$\begin{aligned}NJ_y+J_yN =& \frac{1}{2\mathrm{i}}[N(a_1^+a_2-a_2^+a_1)+\\ &(a_1^+a_2-a_2^+a_1)N]=\\ &\frac{1}{2\mathrm{i}}[a_1^+a_1a_1^+a_2+a_1^+a_2a_1^+a_1+a_2^+a_2a_1^+a_2+\\ &a_1^+a_2a_2^+a_2-a_1^+a_1a_2^+a_1-a_2^+a_1a_1^+a_1-\\ &a_2^+a_2a_2^+a_1-a_2^+a_1a_2^+a_2]=2J_yN,\end{aligned} \tag{42}$$

于是, 有

$$\hat{J}^2=\frac{1}{2}N\left(\frac{1}{2}N+1\right)-\mu^2\omega^2\theta^2J_y^2-\mu\omega\theta J_y(1+N), \tag{43}$$

在忽略含θ^2的项后,

$$\begin{aligned}&\langle n_1,n_2|\,\hat{J}^2\,|n_1',n_2'\rangle=\frac{1}{2}n'\left[\frac{1}{2}n'+1\right]\delta_{n_1'n_2',n_1n_2}-\\ &\mu\omega\theta\,\langle n_1,n_2|\,J_y\,|n_1',n_2'\rangle\,[1+n'\delta_{n_1'n_2',n_1n_2}].\end{aligned} \tag{44}$$

上式表明, 在非对易相空间中, 角动量的模没有变化, 但是有分裂项出现, 当$\theta=0$, $\alpha=1$, 这里给出的结果回到对易空间的情况.

7 结论

在本文中, 首先是把单粒子量子力学的产生和消灭算符推广到非对易空间中服从玻色–爱因斯坦统计的态矢量空间的玻色子系统, 在非微扰的情况下, 重新定义产生和消灭算符. 并且在我们给出的相空间变量的对易关系中包含了空间–空间和动量–动量两个方面的非对易性. 然后把非对易相空间中的产生和消灭算符用对易相空间的产生和消灭算符进行线性展开. 利用这个方法, 进一步讨论了角动量分裂情况. 文献[10]指出: $\theta\leqslant(10^4\mathrm{GeV})^{-2}$. 所得到的结果在$\theta$趋近于零的极限情况下, 回到对易空间的结果.

空间的非对易效应在超弦场论以及与之相关的超对称规范场论和超引力场论中有着非常重要的作用. 目前, 这个方面的研究在理论物理学界引起了广泛的关注, 成了热门的研究课题之一. 然而, 尽管人们对非

对易相空间量子力学问题的研究已取得了一些令人鼓舞的结果, 但是大部分工作才刚刚展开, 非对易相空间中问题在各个物理层面的理论和实验探讨都是非常必要和非常有意义的.

参考文献(References)

1 LI Kang, WANG Jian-Hua, CHEN Chi-Yi. Representation of Noncommutative Phase Space. Modern Physics Letter, 2005, **A20**(28). hep-th/0409234

2 WANG Jian-Hua, LI Kang, LIU Peng. HEP & NP, 2006, **30**(5): 387—391(in Chinese)
(王剑华, 李康, 刘鹏. 高能物理与核物理, 2006, **30**(5): 387—391)

3 Douglas M R, Hull C M. JHEP, 1998, **9802**: 008. hep-th/9711165

4 Ardalan F, Arfaei H, Sheikh-Jabbari M M. JHEP, 1999, **9902**: 016. hep-th/9810072

5 CHU S C, HO P M. Nucl. Phys., 1999, **B550**: 151. hep-th/9812219

6 CHU S C, HO P M. Nucl. Phys., 2000, **B568**: 447. hep-th/9906192

7 Schomerus V. JHEP, 1999, **9906**: 030. hep-th/9903205

8 Banerjee R, Lee C, YANG H S. Seiberg-witten-type Maps for Currents and Energy-Momentum Tensors in Noncommuative Gauge Theories. hep-th/0312103

9 ZHANG Jian-Zu. Phys. Lett., 2004, **B584**: 204

10 Chaichian M, Sheikh-Jabbari M M, Tureanu A. Phys. Rev. Lett., 2001, **86**: 2716. hep-th/0010175

11 Gamboa J, Loewe M, Rojas J C. Phys. Rev., 2001, **D64**: 067901. hep-th/0010220

12 Gamboa J et al. Int. J. Mod. Phys., 1999, **A17**: 2555. hep-th/0106125

13 Muthukumar B, Mitra P. Phys. Rev., 2002, **D66**: 027701. hep-ph/0204149

14 Nair V P, Polychronakos A P. Phys. Lett., 2001, **B505**: 267. hep-th/0011172

15 Kochan D, Demetrian M. hep-th/0102050

16 Morariu B, Polychronakos A P. Nucl. Phys., 2001, **B610**: 531. hep-th/0102157

17 Hatzinikitas A, Smyrnakis I. J. Math. Phys., 2002, **43**: 113. hep-th/0103074

18 Bellucci S, Neressian A, Sochichiu C. Phys. Lett., 2001, **B522**: 345. hep-th/0106138

19 Smailagic A, Spallucci E. Phys. Rev., 2002, **D65**: 107701. hep-th/0108216

20 Christiansen H R, Schaposnik F A. Phys. Rev., 2002, **D65**: 08600. hep-th/0106181

21 Acatrinei C. JHEP, 2001, **0109**: 007. hep-th/0107078

22 HO P M, KAO H C. Phys. Rev. Lett., 2002, **88**: 151602. hep-th/0110191

23 Alvarez-Gaume L, Wadia S R. Phys. Lett., 2001, **B501**: 319. hep-th/0006219

24 Micu A, Sheikh-Jabbari M M. JHEP, 2001, **0101**: 025. hep-th/0008057

25 Riad I F, Sheikh-Jabbari M M. JHEP, 2000, **0008**: 045. hep-th/0008132

26 Douglas M R, Nekrasov N A. Rev. Mod. Phys., 2001, **73**: 977. hep-th/0106048

27 QIAN Bo-Chu, ZENG Jin-Yan. Fine Selection and Analysis on the Problems of Quantum Mechanics. Second Edition. Beijing: Science Press, 1999. 249—251(in Chinese)
(钱伯初, 曾谨言. 量子力学习题精选与剖析. 第二版. 北京: 科学出版社, 1999. 249—251)

Split Angular Momentum in Noncommutative Phase Space*

WANG Jian-Hua[1]　LI Kang[2]

1 (Department of Physics, Shaanxi College of Science and Engineer, Hanzhong 723000, China)

2 (Department of Physics, Hangzhou Teacher's College, Hangzhou 310036, China)

Abstract In the very tiny string scale, the effect of noncommutativity of space may appear. In this paper, the expression of angular momentum in Schwinger representation is briefly reviewed first, then the quantum mechanics algebra in noncommutative phase space is discussed, moreover, the angular momentum in noncommutative phase space is represented in terms of creation and annihilation operations of commutative space. At last, the angular momentum splitting effect is discussed in detail.

Key words noncommutative phase space, noncommutative quantum mechanics, angular momentum splitting

Received 16 February 2006

* Supported by NSFC(10447005, 90303003, 10575026) and Natural Science Foundation of Zhejiang Province of China (M103042)