第29卷 第4期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol.29, No.4
2005年4月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Apr., 2005

多光子 J-C 模型的场熵的演化

卢道明

(南平师范高等专科学校电子工程系　南平　353000)

摘要　研究了一个二能级原子与相干光场多光子相互作用下场熵演化的动力学特性

关键词　多光子　J-C 模型　场熵演化

1　引言

Jaynes-Cummings(以下简称 J-C)模型[1]是反映光场与原子相互作用的可解理想模型. 利用该模型人们已对单光子作用下二能级原子反转的崩塌与回复效应[2],光场的压缩效应[3],光场的位相特性[4]作了大量的研究,揭示了原子的量子特性和光场的非经典效应. 双光子作用下二能级原子反转的崩塌与回复效应,光场的压缩效应和反聚束效应也已作出了研究[5]. 但至今还未见报到,关于旋波近似下多光子 J-C 模型中场熵的研究. 而对熵的研究对研究光场与原子相互作用时的信息关联和演化,显示出很大的优越性. 由于量子系统的熵自动包含了系统密度算符的高阶统计矩,是一种十分灵敏的量子态纯度的操作测量,同时也是解释量子系统动力学特性的重要工具,因此对量子系统的熵的研究具有十分重要的意义. 本文利用多光子 J-C 模型,在旋波近似下,研究了场熵的演化规律,结果表明场熵的演化不具有周期性,同时原子初态分布 θ,φ 及场的初始相角 β 对场熵的演化有明显影响,并且场熵随 θ, φ 的变化显现周期性.

2　多光子 J-C 模型

考虑一个二能级原子通过多光子跃迁与单模辐射场相互作用系统,在旋波近似下系统的哈密顿能量为

$$H = \omega a^+ a + \omega_0 S_3 + g(S_+ a^k + a^{+k} S_-), \tag{1}$$

式中取 $\hbar = 1$, ω 是辐射场的频率, ω_0 是二能级原子的跃迁频率, g 是原子与辐射场的耦合系数, k 是跃迁过程中吸收或发射的光子数. 二能级原子的基态用 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, 激发态用 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 表示,则相应的原子算符可用 Pauli 矩阵表示.

$$S_3 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}, & 0\\ 0, & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}, S_+ = \begin{pmatrix}0,1\\0,0\end{pmatrix}, S_- = \begin{pmatrix}0,0\\1,0\end{pmatrix}, \tag{2}$$

把系统的哈密顿量分解为

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_1,\\ H_0 &= \omega(a^+ a + kS_3),\\ H_1 &= (\omega_0 - k\omega)S_3 + g(S_+ a^k + a^{+k} S_-), \end{aligned} \tag{3}$$

通过运算可得出: $[H_0, H_1] = 0$

系统的时间演化算符可分解为

$$\begin{aligned} U(t) &= \exp(-\mathrm{i}Ht) = \exp(-\mathrm{i}H_0 t)\cdot\\ &\exp(-\mathrm{i}H_1 t) = U_0(t)\cdot U_1(t), \end{aligned} \tag{4}$$

式中 $U_0(t) = \exp(-\mathrm{i}H_0 t)$, $U_1(t) = \exp(-\mathrm{i}H_1 t)$, 通过运算可求出:

$$U_0(t) = \exp(-\mathrm{i}H_0 t) = 1 - \mathrm{i}H_0 t + \frac{1}{2!}(-\mathrm{i}H_0 t)^2 + \cdots = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(a^+ a + \frac{k}{2})t}, 0\\ 0, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(a^+ a - \frac{k}{2})t}\end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$U_1(t) = \begin{pmatrix}\cos At - \mathrm{i}\frac{\Delta}{2}\frac{\sin At}{A}, & -\mathrm{i}ga^k\frac{\sin Bt}{B}\\ -\mathrm{i}ga^{+k}\frac{\sin At}{A}, & \cos Bt + \mathrm{i}\frac{\Delta}{2}\frac{\sin Bt}{B}\end{pmatrix},$$

2004-08-31 收稿

式中 $\Delta=\omega_0-k\omega$,

$$A=[(\frac{\Delta}{2})^2+g^2a^ka^{+k}]^{1/2},$$

$$B=[(\frac{\Delta}{2})^2+g^2a^{+k}a^k]^{1/2}.$$

设初始时刻($t=0$),原子处于基态和激发态的相干迭加态,则为 $\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\exp(-\mathrm{i}\varphi)\end{pmatrix}$,而辐射场处于相干态 $|\alpha\rangle$,则系统的初态为

$$|\varphi(0)\rangle=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}|\alpha\rangle\\ \sin\frac{\theta}{2}\exp(-\mathrm{i}\varphi)|\alpha\rangle\end{pmatrix}. \tag{6}$$

那么系统任意时刻 t 的状态可由时间演化算符 $U(t)$ 求出:

$$|\varphi(t)\rangle=U(t)|\varphi(0)\rangle=\begin{pmatrix}|\varphi_1\rangle\\ |\varphi_2\rangle\end{pmatrix},$$

$$|\varphi_1\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{\theta}{2}\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\times \exp\left(-\mathrm{i}\left(n+\frac{k}{2}\right)\omega t\right)\left(\cos\Omega^+t-\mathrm{i}\frac{\Delta}{2}\frac{\sin\Omega^+t}{\Omega^+}\right)|n\rangle-$$
$$\mathrm{i}\sum_{n=k}^{\infty}g\sin\frac{\theta}{2}\exp(-\mathrm{i}\varphi)\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\times \exp\left(-\mathrm{i}\left(n+\frac{k}{2}\right)\omega t\right)\left[\frac{n!}{(n-k)!}\right]^{½}\frac{\sin\Omega^-t}{\Omega^-}|n-k\rangle,$$

$$|\varphi_2\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\exp\left(-\mathrm{i}\left(n-\frac{k}{2}\right)\omega t+\varphi\right)\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\Omega^-t+\mathrm{i}\frac{\Delta}{2}\frac{\sin\Omega^-t}{\Omega^-}\right)|n\rangle-$$
$$\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}g\cos\frac{\theta}{2}\exp\left(-\mathrm{i}\left(n-\frac{k}{2}\right)\omega t\right)\left[\frac{(n+k)!}{n!}\right]^{½}\times \frac{\sin\Omega^+t}{\Omega^+}\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n+k\rangle, \tag{7}$$

式中 $\Omega^+=\left[\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2+g^2\frac{(n+k)!}{n!}\right]^{½}$,

$$\Omega^-=\left[\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2+g^2\frac{n!}{(n-k)!}\right]^{½}.$$

系统任意时刻场的约化密度算符为

$$\rho(t)=|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|+|\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|. \tag{8}$$

3 场熵的演化

求场熵的演化规律,首先必须将场约化密度矩阵对角化,求出其本征值[6]. 为此假设 $\rho(t)$ 的本征函数为 $|\psi\rangle=U|\varphi_1\rangle+V|\varphi_2\rangle$,本征值为 λ,求解本征值方程

$$\rho(t)|\psi\rangle=\lambda|\psi\rangle=[|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|+|\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|][U|\varphi_1\rangle+V|\varphi_2\rangle]. \tag{9}$$

解(9)式可得 λ 的两个本征值为

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}[\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle+\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle]\pm\frac{1}{2}[(\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle-\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle)^2+4|\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle|^2]^{½}. \tag{10}$$

令 $\alpha=|\alpha|\exp(\mathrm{i}\beta)$,由(7)式可求出:

$$\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle=\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\exp(-|\alpha|^2)\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{\sqrt{n!}}\left[(\cos\Omega^+t)^2+\left(\frac{\Delta}{2}\frac{\sin\Omega^+t}{\Omega^+}\right)^2\right]+ g^2\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\exp(-|\alpha|^2)\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n+2k}}{n!}\left(\frac{\sin\Omega^+t}{\Omega^+}\right)^2+$$
$$g\sin\theta\exp(-|\alpha|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n+k}}{n!}\times\frac{\sin\Omega^+t}{\Omega^+}\left[-\sin(\varphi+k\omega t-k\beta)\cos\Omega^+t+\frac{\Delta}{2}\cos(\varphi+k\omega t-k\beta)\frac{\sin\Omega^+t}{\Omega^+}\right],$$

$$\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle=\exp(-|\alpha|^2)\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\left[(\cos\Omega^-t)^2+\left(\frac{\Delta}{2}\frac{\sin\Omega^-t}{\Omega^-}\right)^2\right]+ g^2\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\exp(-|\alpha|^2)\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\left(\frac{\sin\Omega^+t}{\Omega^+}\right)^2+$$
$$g\sin\theta\exp(-|\alpha|^2)\sum_{n=k}^{\infty}\left[\sin(\varphi+k\omega t-k\beta)\cos\Omega^-t-\frac{\Delta}{2}\cos(\varphi+k\omega t-k\beta)\frac{\sin\Omega^-t}{\Omega^-}\right]\cdot\frac{\sin\Omega^-t}{\Omega^-}\frac{|\alpha|^{2n-k}}{(n-k)!},$$

$$\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle=\frac{1}{2}\exp(-|\alpha|^2)\sin\theta\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\exp(\mathrm{i}(k\omega t-\varphi)\left[\cos\Omega^+t+i\frac{\Delta}{2}\frac{\sin\Omega^+t}{\Omega^+}\right]\left[\cos\Omega^-t+\mathrm{i}\frac{\Delta}{2}\frac{\sin\Omega^-t}{\Omega^-}\right]-$$
$$\mathrm{i}g\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\exp(-|\alpha|^2)\times\sum_{n=k}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n-k}}{(n-k)!}\exp(\mathrm{i}(2k\omega t-k\beta))\left(\cos\Omega^+t+\right.$$

$$
\mathrm{i}\frac{\Delta}{2}\frac{\sin\Omega^{+}t}{\Omega^{+}}\Big)\frac{\sin\Omega^{-}t}{\Omega^{-}}+\mathrm{i}g\Big(\sin\frac{\theta}{2}\Big)^{2}\times
$$
$$
\exp(-|\alpha|^{2})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n+k}}{n!}\exp(\mathrm{i}(2k\omega t-k\beta))\times
$$
$$
\Big(\cos\Omega^{-}t+\mathrm{i}\frac{\Delta}{2}\frac{\sin\Omega^{-}t}{\Omega^{-}}\Big)\frac{\sin\Omega^{+}t}{\Omega^{+}}+
$$
$$
\frac{1}{2}g^{2}\sin\theta\exp(-|\alpha|^{2})\sum_{n=k}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{(n-k)!}\times
$$
$$
\exp(\mathrm{i}(3k\omega t-2k\beta+\varphi))\frac{\sin\Omega^{-}t}{\Omega^{-}}\cdot\frac{\sin\Omega^{+}t}{\Omega^{+}}. \tag{11}
$$

光场的熵可由 $\lambda_{1,2}$求出

$$
S(t)=-(\lambda_{1}\ln\lambda_{1}+\lambda_{2}\ln\lambda_{2}). \tag{12}
$$

把(11),(10) 式代入(12)式,就可给出了多光子 J-C 模型场熵演化的一般规律.

4　讨论

为简单起见,设原子初始时刻处于激发态,即 $\sin\frac{\theta}{2}=0$,光场取$|\alpha|=\sqrt{n_0}$,n_0 为光场平均光子数. 在共振情况下($\Delta=0$),讨论系统熵的演化,这时有:

$$
\langle\varphi_{1}|\varphi_{1}\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\Big[\cos\Big(\frac{\sqrt{(n+k)!}}{n!}\times gt\Big)\Big]^{2}\cdot \mathrm{e}^{-|\alpha|^{2}},
$$
$$
\langle\varphi_{2}|\varphi_{2}\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\Big[\sin\Big(\frac{\sqrt{(n+k)!}}{n!}\times gt\Big)\Big]^{2}\cdot \mathrm{e}^{-|\alpha|^{2}},
$$
$$
\langle\varphi_{1}|\varphi_{2}\rangle=-\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}\exp(\mathrm{i}(k\omega t-k\beta))\frac{|\alpha|^{2n+k}}{\sqrt{n!(n+k)!}}\times \sin\Big(\frac{\sqrt{(n+k)!}}{n!}gt\Big)\Big]\cos\Big(\frac{\sqrt{(n+2k)!}}{n!}gt\Big)\cdot \mathrm{e}^{-|\alpha|^{2}}. \tag{13}
$$

对由(10),(12)和(13)式决定的场熵,通过数值计算,得出 $k=3$,光场平均光子数 n_0为 0.5,1.0,5.0 时,$S(t)$随 gt 的演化曲线如图 1 所示.

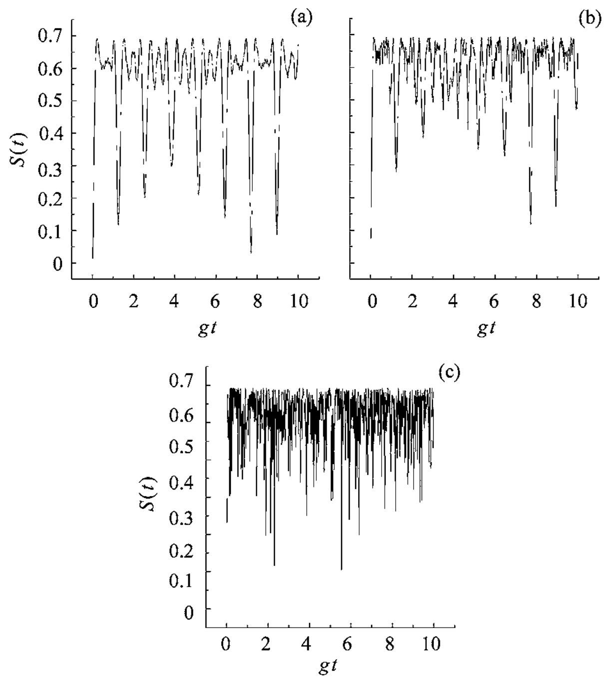

图 1　(a)平均光子数为 0.5 时场熵的演化曲线;
(b)平均光子数为 1.0 时场熵的演化曲线;
(c)平均光子数为 5.0 时场熵的演化曲线

5　结论

从(1)式可知,λ 是不同周期的正弦或余弦函数,但这些周期函数没有共同的周期,因此 λ 不是周期函数,由 λ 计算的 $S(t)$也不是周期函数,因此场熵不具有周期性,这与文献[7]给出依赖强度耦合 J-C 模型共振情况下场熵演化具有严格的周期性有所不同. 同时由(11)可知,原子初态 θ,φ 以及场的初始相位角β 对场熵演化有影响,并且熵随 θ,φ 的变化显现出周期性. 数值计算结果表明,场熵的演化具有明显的振荡特性,说明光场与原子的关联程度是振荡的,场熵大时关联强,场熵小时关联弱. 随 n_0增大,熵振荡频率加快,熵平均值增大,说明原子与光场的关联加强.

参考文献(References)

1　Jaynes E T, Cummings F W. Proc. IEEE., 1963, **51**: 89

2　ZHOU P, HU Z L, PENG J S. J. Mod. Opt., 1992, **39**(1): 39—62

3　Buzzeek V. J. Mod. Opt., 1989, **36**(9): 1151—1162

4　ZHOU P, PENG J S, LI G X. Acta. Optica. Sinica., 1993, **13**(5): 444—449(in Chinese)
(周鹏,彭金生,李高翔. 光学学报, 1993, **13**(5): 444—449)

5　ZHOU P, PENG J S, LI G X. Acta. Optica. Sinica., 1990, **10**(9): 837—844(in Chinese)
(周鹏,彭金生,李高翔. 光学学报, 1990, **10**(9): 837—844)

6　Phoenix S J, Knight P L. Ann. Phys. (NY), 1988, **186**(2): 381—407

7 FANG L F. Acta. Optica. Sinica., 1995, **15**(3): 296—300(in Chinese) (方卯发.光学学报,1995,**15**(3):296—300)

Evolution of Field Entropy in the Multiphoton Jaynes-Gummings Model

LU Dao-Ming

(Department of Electronic Engineering, Nanping Teachers College, Nanping 353000, China)

Abstract In this paper, the dynamical properties of the field entropy in the multiphoton Jaynes-Cummings model are studied. It is showed that the evolution of field entropy has no periodicity and is influenced by the initial states of atoms and the initial phase of the field.

Key words multiphoton, Jaynes-Cummings model, the evolution of the field entropy

Received 31 August 2004