

# 在具有伸缩子的 QCD 势模型中的重介子<sup>\*</sup>

梅花 陈洪<sup>1)</sup>

(西南师范大学物理学院 重庆 400715)

**摘要** 从伸缩子-胶子有效耦合理论得到的重夸克-反夸克势模型出发,计算了重介子的自旋平均能谱及轻子衰变和辐射跃迁宽度,并与 Cornell 势模型所得到的相应结果作了比较.结果表明,新的重夸克势的计算结果与重介子的实验数据更好地符合,而且估计的伸缩子质量 57MeV 很好地位于有关伸缩子质量的其他理论途径所估计的范围之内.

**关键词** 伸缩子 重介子 能谱 轻子衰变 辐射跃迁

## 1 引言

重介子对量子色动力学(QCD)及其应用具有基本的兴趣.直到我们知道怎样使用 QCD 严格地计算重介子在低能区的性质之前,我们不得不处理 QCD 激发的模型理论.势模型一直是比较成功的模型之一.目前,从 QCD 第一原理出发获得整个范围内的夸克势是不可能的,因而相应的夸克势只能唯象地得到.从微扰 QCD 和格点规范理论的数值模拟激发的 Cornell 势<sup>[1]</sup>一直是一种有用的夸克势模型.然而对夸克禁闭的机制及其对重介子的影响仍在探索之中,对重介子的研究还远没有结束.基于规范场理论的超弦理论预言了中性标量场——伸缩子(Dilaton),并可构造一个具有伸缩子-胶子耦合的有效场论<sup>[2,3]</sup>,从此有效理论出发,得到了一个新的夸克-反夸克势<sup>[4]</sup>.本文将进一步通过对重介子能谱及轻子衰变和辐射跃迁宽度的计算来研究这个势提供的新的禁闭机制.

## 2 伸缩子-胶子耦合有效理论中的重夸克势

伸缩子是规范场中超弦理论预言的一种有质量

标量场.规范理论中包含伸缩子-胶子耦合后有如下有效拉氏量<sup>[3]</sup>

$$L = -\frac{1}{4(1+f^2/\phi^2)}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m\phi^2 - J_\mu^a A_\mu^a, \quad (1)$$

式中  $A_\mu^a$  是胶子场,而  $F_{\mu\nu}^a$  是相应的规范场强度, $J_\mu^a$  是夸克流算符, $\phi$  是伸缩场,而  $m$  为伸缩子质量, $f$  是表征伸缩子-胶子耦合强度的质量参数.这样一个有效理论允许人们得到一相互作用夸克势.

考虑静态点色源(重夸克), $J_\mu^a = g\delta(r)C_a\eta_\mu$ ,式中  $\eta_\mu = (1,0,0,0)$ , $g$  为夸克-胶子耦合常数, $C_a$  是  $SU(N_c)$  色规范群的生成算子  $T_a$  对色空间归一化旋量的平均值.要求  $\lim_{r \rightarrow 0} r\phi(r) = 0$  及  $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = 0$ ,容易得到下列夸克-反夸克势<sup>[4]</sup>

$$V(r) = -\frac{2(N_c-1)}{N_c} \left\{ \frac{g^2}{4\pi r} - gf\sqrt{\frac{N_c}{2(N_c-1)}} \ln[\exp(2mr) - 1] \right\}, \quad (2)$$

此势在大  $r$  处具有线性行为  $V(r) \sim r$ ,而在小  $r$  处具有库仑势行为  $V(r) \sim 1/r$ ,这正好再现了 QCD 的两个重要特征:夸克禁闭和渐近自由.这个势的行为表明,可认为在低能区的拉氏量通过 QCD 伸缩子与迹反常的耦合而实现,而在高能区使用标准的 QCD 拉

2003-04-10 收稿,2003-09-23 收修改稿

\* 国家自然科学基金(10147208)资助

1) E-mail: chen@swnu.edu.cn

氏量. 这样一个图像可追溯到早期把能量 - 动量张量迹的标量介子为主的思想<sup>[5]</sup> 与 QCD 迹反常的结合<sup>[6]</sup>. 因为迹反常正比于胶子凝聚, 这可以判断拉氏量(1)中伸缩子 - 胶子耦合是合理的. 势(2)还可描述高维夸克和胶子凝聚, 并清楚地表明了伸缩子怎样改变夸克相互作用势. 令  $N_c = 3$ , 引入  $\alpha_s = g^2/4\pi, \beta = gf\sqrt{2(N_c - 1)}/N_c$ , 则势(2)简化为

$$V(r) = -\frac{4}{3}\frac{\alpha_s}{r} + \beta \ln[\exp(2mr) - 1], \quad (3)$$

这里不妨称为 Dilaton 势. 与通常使用的 Cornell 势

$$V(r) = -\frac{4}{3}\frac{\alpha_s}{r} + \sigma r \quad (4)$$

比较, 弦张力  $\sigma$  由伸缩子质量及其耦合标度  $f$  决定为

$$\sigma \cong \frac{4}{\sqrt{3}}gmf.$$

### 3 重夸克偶素的能谱

为求势(3)和势(4)下的重介子偶素的能谱, 需要求解相应的束缚态方程. 对重夸克而言, 采用薛定谔方程是足够的, 尽管包括相对论动能的 Bethe - Salpeter 方程可能会给出一些修正. 事实上, 如果要求两个方程得到的能级都尽可能与实验数据一致, 相对论动能效应非常之小<sup>[7]</sup>, 而不是先前注意到的那么明显. 在坐标空间中的波动方程为

$$-\frac{1}{2\mu}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = \epsilon\psi(\mathbf{r}), \quad (5)$$

式  $\mathbf{r}$  是两夸克间的坐标差,  $\epsilon = M - m_1 - m_2$ ,  $M$  是两夸克系统的总能量,  $m_1$  和  $m_2$  分别表示两夸克的质量, 而  $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$  是系统的折合质量.

对势(3)和(4), 在  $r = 0$  处是奇异的, 相应的波函数也是奇异的, 因此, 将在动量空间中求方程(4)的数值解, 以便波函数特别是在原点处有很好的行为<sup>[7]</sup>. 将方程(5)变换到动量空间中得到如下的形式

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu}\hat{\psi}(\mathbf{p}) + \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}V(\mathbf{p} - \mathbf{q})\hat{\psi}(\mathbf{q}) = \epsilon\hat{\psi}(\mathbf{p}). \quad (6)$$

采用 Rayleigh-Ritz-Galerkin (RRG) 方法<sup>[7,8]</sup>, 求解方程(6)的本征值和本征波函数.

对 Dilaton 势(3), 求解方程(6)需要确定几个势参数, 取  $m_c = 1.881\text{GeV}$ ,  $m_b = 5.190\text{GeV}$ , 以便在任意重整化标度的耦合常数  $\alpha_s(\Lambda)$  能由世界平均值  $\alpha_s(m_z) = 0.1185$ <sup>[9]</sup> 决定, 式中  $m_z = 91.1876\text{GeV}$  是  $Z^0$  玻色子质量, 而

$$\alpha_s(\Lambda) = \frac{\alpha_s(m_z)}{1 - \frac{1}{2\pi}\left(11 - \frac{2}{3}N_f\right)\alpha_s(m_z)\ln\left(\frac{m_z}{\Lambda}\right)}, \quad (7)$$

则  $\alpha_s(m_c) = 0.335, \alpha_s(m_b) = 0.210$ . 伸缩子质量  $m$  和标度常数  $f$  视为自由参数, 利用  $c\bar{c}$  和  $b\bar{b}$  束缚态的前 3 个实验肯定的自旋平均能谱来确定  $m$  和  $\beta$ , 以保证平方标准差

$$\chi^2 = \frac{\sum_{nl}(M_{nl}^{\text{exp}} - M_{nl}^{\text{theory}})^2}{N - 1} \quad (8)$$

取极小值, 其中  $(n, l)$  是表征束缚态的主量子数和角量子数,  $N$  是  $(nl)$  态的总数. 要特别注意的是, 使用了实验上可肯定的自旋平均能谱, 在这些能级中,  $1s$  和  $2s$  分别比  $\psi$  和  $\psi'$  态低大约 30MeV,  $1p$  能级在  $\chi_J(J = 0, 1, 2)$  态的重心, 因为  $p$  波超精细劈裂可能很小. 正如文献[8] 指出的那样, 当不考虑精细劈裂时, 使用  $\psi, 1p, \psi'$  质量来确定势参数, 并将计算能谱与实验比较, 这是不恰当的. 由此得到

$$\beta = 0.41\text{GeV}, m = 0.057\text{GeV}. \quad (9)$$

为与 Cornell 势的相应计算结果比较, Cornell 势参数为<sup>[8]</sup>  $m_c = 1.32\text{GeV}, m_b = 4.746\text{GeV}, \alpha_s = 0.353, \sigma = 0.192\text{GeV}^2$ , 并已显示 Cornell 势对重夸克偶素的预言对其势参数不敏感<sup>[10]</sup>. 图 1 是 Cornell 势与 Dilaton 势的比较. 从图 1 可见, Dilaton 势在整过  $r$  区域比 Cornell 势要低一些, 且随  $r$  的增大更平缓地上升. 对 Dilaton 势而言, 由于  $c\bar{c}$  系统比  $b\bar{b}$  系统的强耦合常数  $\alpha_s$  大, 所以, 前者比后者的势曲线在短程区域稍低.

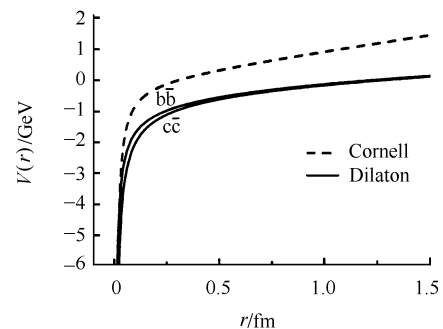


图 1 Dilaton 势与 Cornell 势的比较

两种势所得结果一并列入表 1 中. 从表 1 中可看出, 除  $c\bar{c}$  的  $1s$  态和  $b\bar{b}$  的  $1p$  态外, Dilaton 势给出的能谱比 Cornell 势的结果要稍大, 但从势能曲线看, Dilaton 势在整个  $r$  区域又比 Cornell 势小, 似乎不合理, 其实不然. 这是由于束缚态能级  $M = 2m_q + \langle T \rangle + \langle V \rangle$ , 即两夸克的静质量、动能和势能的贡献

之和. 因此, Dilaton 势下能级是否比 Cornell 势下相应能级低, 并不仅仅取决于势能项, 而是取决于在这些态中夸克的静质量、动能部分的贡献和势能部分的贡献. 实际计算也表明, 对  $c\bar{c}$  和  $b\bar{b}$  的任意一个态, 在两个势及其相应的参数下计算的动能和势能贡献之和, 再加上两夸克的静质量的确等于该态的能级. 例如, 对  $c\bar{c}$  的  $1s$  态, 在 Dilaton 和 Cornell 势下各部分贡献为

$$M(1s) = 2m_c + \langle T \rangle + \langle V \rangle = \begin{cases} 3.762 + 0.42075 - 1.11469 = \\ 3.06806 \quad \text{Dilaton,} \\ 2.64 + 0.35056 + 0.07775 = \\ 3.06831 \quad \text{Cornell,} \end{cases}$$

事实上, 在文献[7,8]中人们已注意到了动能和势能对能级的贡献在决定重介子能谱中的重要性. 另一方面, 从表 1 可见, 在 Dilaton 势下的能谱与实验值更接近, 且  $b\bar{b}$  的结果又要符合得更好些, 这与得到 Dilaton 势的静态(重夸克)设定是自治的.

表 1  $c\bar{c}$  和  $b\bar{b}$  束缚态的自旋平均能量谱

$n1$	$M_{n1}/\text{GeV}$			
	Exp. <sup>[9]</sup>	Cornell <sup>[8]</sup>	Dilaton	
$c\bar{c}$	$1s$	3.068	3.06831	3.06806
	$2s$	3.686	3.56302	3.62987
	$1p$	3.525	3.49691	3.52042
$b\bar{b}$	$1s$	9.460	9.44500	9.44616
	$2s$	10.023	9.95142	9.99484
	$1p$	9.900	9.89583	9.89208
	$3s$	10.355	10.23833	10.30123
	$2p$	10.260	10.07548	10.18436

### 4 轻子衰变宽度

对于  $q\bar{q}$  系统, 波函数在原点的值的平方具有重要的性质, 它反映了系统的轻子衰变宽度和强子总宽度. 考虑轻子衰变宽度的绝对值, 包括二次辐射修正后具有如下的形式<sup>[8]</sup>

$$\Gamma_{ee}(^3S_1) = \Gamma_{ee}^{(0)}(1 - \Delta), \quad (10)$$

$$\Gamma_{ee}^{(0)} = \frac{4\alpha^2 e_Q^2}{M^2} |R_s(0)|^2,$$

式中  $\alpha$  是精细结构常数,  $e_Q$  是夸克的电荷(以电子电荷为单位).  $R_s(0)$  是  $l = 0$  的径向波函数在原点的值. 使用下式来确定波函数在原点的值

$$|R_s(0)| = 2\mu \left\langle \frac{dV}{dr} \right\rangle. \quad (11)$$

在式(10)中  $\Delta$  来自二次辐射修正,

$$\Delta \approx \frac{16}{3} \left[ \frac{\alpha_s}{\pi} \right] - (24.26 - 0.11 n_f) \left[ \frac{\alpha_s}{\pi} \right]^2. \quad (12)$$

在数值上, 辐射修正项为

$$1 - \Delta = \begin{cases} 0.76, \alpha_s = 0.20, n_f = 3 \\ 0.79, \alpha_s = 0.16, n_f = 4 \end{cases}. \quad (13)$$

所求出的轻子衰变宽度列在表 2 中, 从表 2 可见, Dilaton 势比 Cornell 势计算的轻子衰变宽度更接近实验数据.

表 2  $c\bar{c}$  和  $b\bar{b}$  的轻子衰变宽度

$n1$	$\Gamma_{ee}/\text{keV}$			
	Exp. <sup>[9]</sup>	Cornell <sup>[8]</sup>	Dilaton	
$c\bar{c}$	$1s$	$5.26 \pm 0.37$	4.30	4.360
	$2s$	$2.19 \pm 0.15$	1.57	1.582
$b\bar{b}$	$1s$	$1.32 \pm 0.05$	1.50	1.405
	$2s$	$0.52 \pm 0.032$	0.45	0.501

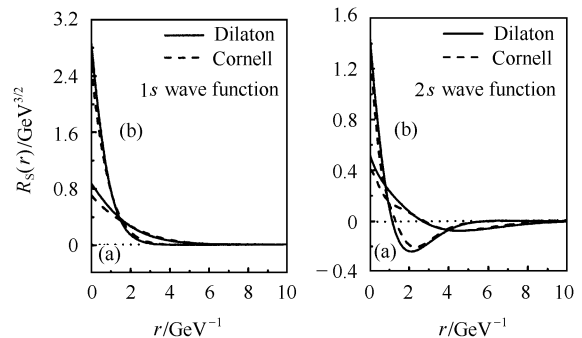


图 2  $1s$  和  $2s$  态的径向波函数  
(a)和(b)分别对应  $c\bar{c}$  和  $b\bar{b}$  系统.

图 2 是  $c\bar{c}$  和  $b\bar{b}$  在  $1s$  态和  $2s$  态的径向波函数, 实线表示 Dilaton 势, 虚线表示 Cornell 势. 可见, Dilaton 势的波函数在原点均比 Cornell 势的波函数大, 与用式(11)所得出的结果一致. 在一些文献中, 因在坐标空间中求解在原点具有奇异性的势的束缚态方程(5), 不能得到在原点处的准确波函数, 而我们的计算方法允许精确地确定波函数在原点的值.

### 5 辐射跃迁宽度

重介子的两个态之间的辐射跃迁可在瞬时近似下很好地定义, 这里讨论与自旋无关的电偶极辐射

跃迁,在  $c\bar{c}$  和  $b\bar{b}$  能谱中两个高共振态之间的跃迁宽度为<sup>[8]</sup>

$$\Gamma(^3S_1 \rightarrow ^3P_J\gamma) = \frac{4\alpha(2J+1)k^3 e_Q^2 \left| \left\langle ^3P_J | r | ^3S_1 \right\rangle \right|^2}{27},$$

$$\Gamma(^3P_J \rightarrow ^3S_1\gamma) = \frac{4\alpha k^3 e_Q^2 \left| \left\langle ^3S_1 | r | ^3P_J \right\rangle \right|^2}{9},$$

(14)

其中  $k$  是辐射光子的能量,  $J$  是末态总角动量. 计算结果列于表 3 中. 从表 3 可以看到 Dilaton 势的值比 Cornell 势的值要小, 与实验值更接近.

表 3  $c\bar{c}$  和  $b\bar{b}$  的辐射跃迁

	Exp. <sup>[9]</sup>	Cornell <sup>[8]</sup>	Dilaton
$\chi_2 \rightarrow \psi\gamma$	$330 \pm 170$	577.0	427.0
$\psi' \rightarrow \chi_2\gamma$	$17 \pm 5$	36.0	13.1
$\chi_2 \rightarrow \Upsilon\gamma$	?	37.0	36.2
$\Upsilon' \rightarrow \chi_2\gamma$	?	2.3	1.34

## 参考文献 (References)

- Eichten E et al. Phys. Rev., 1980, **D21**:203
- Dick R. Eur. Phys. Journal., 1999, **C6**:701
- Dick R, Fulcher L P. Eur. Phys. J., 1999, **C397**:271
- Chen Hong et al. Chin. Phys. Lett., 2001, **18**(12):1558
- Ellis J. Nucl. Phys., 1970, **B22**:478; 1971, **B26**:536
- Halyo E. Phys. Lett., 1991, **B271**:415
- CHEN Hong, YANG Xing-Hua, JING Huan-Qing. Chin. Phys., 2002, **11**:11
- Jacobs S, Olsson M G, Suchyta C. Phys. Rev., 1986, **C33**:3338
- Particle Data Group. Eur. Phys. J., 2000, **C15**:73
- LIU Bo, DONG Yu-Bing. HEP & NP, 1996, **20**:153 (in Chinese)  
(刘波, 董玉斌. 高能物理与核物理, 1996, **20**:153)

## Heavy Mesons in the QCD Potential Model with Dilaton\*

MEI Hua CHEN Hong<sup>1)</sup>

(School of Physics, Southwest China Normal University, Chongqing 400715, China)

**Abstract** Starting from the QCD potential which emerges from the effective dilaton-gluon coupling, the energy levels and the widths of the leptonic decay and radiative transition are calculated for heavy mesons ( $c\bar{c}$  and  $b\bar{b}$ ) and compared with that of the Cornell potential. The better results are obtained with respective to the Cornell potential. The dilaton mass is estimated to be 57MeV.

**Key words** dilaton, heavy meson, energy level, leptonic decay, radiative transition

Received 10 April 2003, Revised 23 September 2003

\* Supported by National Natural Science Foundation of China(10147208)

1)E-mail: chen@swnu.edu.cn