第28卷 第10期
2004年10月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol.28, No.10
Oct., 2004

非对易 Orbifold R^4/G 上的量子态及孤子解*

石国芳[1)] 邓辉[2)] 熊华晖[3)] 石康杰[4)]

(西北大学现代物理研究所 西安 710069)

摘要 求得二维由广义坐标和广义动量构成的一般二次型哈密顿量的基态,由此可以求得各能级的本征态.由于四维非对易空间在转动群 $G \subset SO(4)$ 下的坐标的不变二次型可以正则化为这类哈密顿量,因此得到了非对易空间 R^4 上转动不变的态矢量. 当 G 是 $SO(4)$ 的有限子群时候它们是 R^4/G 这种非对易 Orbifold 上的态矢量.由此可以得到其上的孤子解.

关键词 非对易 孤子 哈密顿量 产生算子 湮没算子 基态波函数

1 引言

超弦理论可以使引力理论和量子力学相洽,并从根本上解决量子场论中的发散困难[1],因而受到当今理论物理界的极大重视. Witten 等人发现在有 B 场存在的情况下,超弦理论会导致时空坐标的非对易[2],所以非对易几何以及建立在其上面的相关场论引起人们广泛的兴趣[3,4]. 对于具有某些对称性例如转动或格点平移的非对易空间的研究要求我们考虑这些空间(它们实际是一些算子的集合)上具有同样对称性的波函数[5],也就是需要知道在这种对称变换下不变的态矢量.本文研究二维由一般广义坐标 q 和广义动量 p 的正定二次齐次式组成的哈密顿量的本征态.由它们可以得到非对易空间在转动群 $SO(4)$ 或其子群变换下不变的态矢量.这些态矢量在关于 Orbifold R^4/G 上的孤子解的构造中有重要意义[6].根据 Gopakumar, Minwalla, Strominger 和 Martinec 等人的发现,由这些态构成的投影算子是在这种 Orbifold 上的非对易弦场论的孤子解[7,8],由此得到一般情形下非对易 R^4/G 上的一些孤子的具体形式.

2 非对易空间及其正则化

令非对易空间的坐标为 $\hat{X}_j (j = 1, 2, \cdots, 2n)$,满足非对易关系 $[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = \mathrm{i}\theta_{ij}$. 它们是些线性厄米算子,这些算子的幂级数组成非对易空间 R^{2n}. 现在要研究线性变换, $\hat{G}\hat{X}_j\hat{G}^{-1} = \hat{X}'_j = \sum_k G_{jk}\hat{X}_k, G \in SO(2n)$. 那些在这个变换下不变的算子组成非对易 Orbifold R^{2n}/G,而求出那些在 G 下不变的态矢量在研究这种非对易 Orbifold 时是非常关键的.

下面是这样考虑这些态矢量的,因为 $G \in SO(2n)$,所以 $\hat{H} = \sum_{j=1}^{2n} \hat{X}_j^2$ 是不变量. 因此 $\hat{H}$ 的本征态至少在本征值非简并时应该是 G 的不变态矢量(本文仅仅就 $n = 2$ 时在比较简单的情形下找出 $\hat{H}$ 的本征态). 由它们就可以组成非对易 Orbifold R^4/G 上的态矢量. 可以证明,当 θ_{ij} 构成的矩阵非退化即 $\det\theta \neq 0$ 时,我们总可以把 $\{\hat{X}_j\}$ 写成两对 $\{\hat{q}_l,$

2004-02-12 收稿

* 国家自然科学基金(10175050)资助

1) E-mail: shiguofang@eyou.com
2) E-mail: hdeng-phy@yahoo.com.cn
3) E-mail: jimharry@eyou.com
4) E-mail: kjshi@nwu.edu.cn

$\hat{p}_l\}$ $(l=1,2)$ 的线性组合,而且满足 $\{\hat{q}_l,\hat{p}_k\}=\mathrm{i}\delta_{lk}$,其余对易关系是0.这时 $\hat{H}=\sum_{j=1}^{2}X_j^2$ 就是一个 $\{\hat{q}_l\}$ 和 $\{p_l\}$ 组成的正定二次型,这样问题就变为怎么求出当 $\hat{H}$ 是正则算子 $\{\hat{q}_l,\hat{p}_l\}$ 的正定二次型时 $\hat{H}$ 的本征态矢量在 $\hat{q}$ 表象中的表达式.

3 将哈密顿量 $\hat{H}$ 的表达形式由 $\hat{q},\hat{p}$ 的正定二次型化成 $\sum\lambda_j\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j+F$ 的形式

如前所述,$\hat{H}=\sum_{j=1}^{4}\hat{X}_j^2$ 是 $G\subset SO(4)$ 转动下不变的力学量.除去一个无关紧要的常数外 $\hat{H}$ 可以写成 $\hat{q}_1,\hat{q}_2,\hat{p}_1,\hat{p}_2$ 的正定齐次二次型,而且必定可以写成如下形式

$$\hat{H}=\boldsymbol{r}^t C\boldsymbol{r}. \tag{1}$$

其中 C 是四维实正定对称矩阵,其中 $\boldsymbol{r}$ 是由力学量构成的列矢量

$$\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}\hat{q}_1\\ \hat{q}_2\\ \hat{p}_1\\ \hat{p}_2\end{pmatrix}.$$

由于

$$[\hat{q}_k,\hat{p}_j]=\mathrm{i}\delta_{kj},$$
$$[\hat{q}_k,\hat{q}_j]=[\hat{p}_k,\hat{p}_j]=0.$$

可知有

$$[\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}^t]=\left[\begin{pmatrix}\hat{q}_1\\ \hat{q}_2\\ \hat{p}_1\\ \hat{p}_2\end{pmatrix},(\hat{q}_1\quad\hat{q}_2\quad\hat{p}_1\quad\hat{p}_2)\right]=\mathrm{i}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}. \tag{2}$$

令上面这个结果是 $\mathrm{i}J$,且将 J 写成分块形式就是

$$J=\begin{pmatrix}0&I\\-I&0\end{pmatrix}.$$

现在目的是求出(1)形式的哈密顿量的本征态矢量.方法是将这个体系的 $\hat{H}$ 表示成产生算子和湮没算子的形式,即把 $\hat{H}$ 的表达形式由 $\hat{q},\hat{p}$ 的正定齐次二次型化成

$$\hat{H}=\sum_{j=1}^{4}\lambda_j\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j+F \tag{3}$$

的形式.其中 F 是常数,$\lambda_j>0$(因为哈密顿量是正定的).产生算子和湮没算子满足

$$[\hat{a}_j,\hat{a}_k^\dagger]=\delta_{jk},(j,k=1,2). \tag{4}$$

进一步可以由 $\hat{a}_1|\psi\rangle=\hat{a}_2|\psi\rangle=0$ 求出 $\hat{H}$ 的基态表达式.只要得到基态,由于 $\hat{a}_j^\dagger$ 是 $\hat{q}_j$ 的线性一次微分算子,由 $\hat{a}_j^\dagger$ 的幂次作用于基态就得到 $\hat{H}$ 所有本征态,它们在非对易转动下是不变的态.

3.1 寻找产生算子和湮没算子

假如找到这样的 $\hat{a}_j^\dagger$ 和 $\hat{a}_j$,则由(3)和(4)式,就有

$$[\hat{a}_j,\hat{H}]=\lambda_j\hat{a}_j,$$
$$[\hat{a}_j^\dagger,\hat{H}]=-\lambda_j\hat{a}_j^\dagger,$$

其中 $\lambda_j>0$.由于 $\hat{a}_j^\dagger,\hat{a}_j$ 是 $\{\hat{q}_l,\hat{p}_l\}$ 的线性函数,因此可以写成 $\hat{a}_j$ 或者 $\hat{a}_j^\dagger\sim\boldsymbol{s}^t\boldsymbol{r}$,其中 $\boldsymbol{s}^t$ 表示行矢量 $\boldsymbol{s}^t=(b_1b_2b_3b_4)$,其矩阵元都是复数.因此构成产生和湮没算子的 $\boldsymbol{s}^t\boldsymbol{r}$ 必须该满足下面的性质

$$[\boldsymbol{s}^t\boldsymbol{r},\hat{H}]=\lambda(\boldsymbol{s}^t\boldsymbol{r}), \tag{5}$$

其中 λ 是常数.现在的关键问题就是求解(5)式,看能否得到相应的 $\hat{a}_j$ 和 $\hat{a}_j^\dagger$ 使它们正好满足对易关系(4).由(5)式左边得

$$[\boldsymbol{s}^t\boldsymbol{r},\hat{H}]=[\boldsymbol{s}^t\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}^tC\boldsymbol{r}]=\left[(b_1\quad b_2\quad b_3\quad b_4)\begin{pmatrix}\hat{q}_1\\ \hat{q}_2\\ \hat{p}_1\\ \hat{p}_2\end{pmatrix},(\hat{q}_1\quad\hat{q}_2\quad\hat{p}_1\quad\hat{p}_2)C\begin{pmatrix}\hat{q}_1\\ \hat{q}_2\\ \hat{p}_1\\ \hat{p}_2\end{pmatrix}\right], \tag{6}$$

利用 $[A,BC]=B[A,C]+[A,B]C$,且注意到方阵 C 和 $\boldsymbol{s}$ 的矩阵元都是普通数,(6)式可以写成

$$[\boldsymbol{s}^t\boldsymbol{r},\hat{H}]=(\hat{q}_1\quad\hat{q}_2\quad\hat{p}_1\quad\hat{p}_2)\left[(b_1\quad b_2\quad b_3\quad b_4)\begin{pmatrix}\hat{q}_1\\ \hat{q}_2\\ \hat{p}_1\\ \hat{p}_2\end{pmatrix},C\begin{pmatrix}\hat{q}_1\\ \hat{q}_2\\ \hat{p}_1\\ \hat{p}_2\end{pmatrix}\right]+\left[(b_1\quad b_2\quad b_3\quad b_4)\begin{pmatrix}\hat{q}_1\\ \hat{q}_2\\ \hat{p}_1\\ \hat{p}_2\end{pmatrix},(\hat{q}_1\quad\hat{q}_2\quad\hat{p}_1\quad\hat{p}_2)\right]C\begin{pmatrix}\hat{q}_1\\ \hat{q}_2\\ \hat{p}_1\\ \hat{p}_2\end{pmatrix}=$$

$$(-)(\hat{q}_1\quad \hat{q}_2\quad \hat{p}_1\quad \hat{p}_2)\left[C\begin{pmatrix}\hat{q}_1\\ \hat{q}_2\\ \hat{p}_1\\ \hat{p}_2\end{pmatrix},\right.$$

$$\left.(\hat{q}_1\quad \hat{q}_2\quad \hat{p}_1\quad \hat{p}_2)\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\end{pmatrix}\right]+$$

$$\left[(b_1\quad b_2\quad b_3\quad b_4)\begin{pmatrix}\hat{q}_1\\ \hat{q}_2\\ \hat{p}_1\\ \hat{p}_2\end{pmatrix},\right.$$

$$\left.(\hat{q}_1\quad \hat{q}_2\quad \hat{p}_1\quad \hat{p}_2)\right]C\begin{pmatrix}\hat{q}_1\\ \hat{q}_2\\ \hat{p}_1\\ \hat{p}_2\end{pmatrix}=$$

$$(-)(\boldsymbol{r}^tCJ\boldsymbol{s})\mathrm{i}+(\boldsymbol{s}^tJC\boldsymbol{r})\mathrm{i}=$$
$$2(\boldsymbol{s}^tJC\boldsymbol{r})\mathrm{i}.$$

由于(5)式左边应该等于(5)式右边,所以得到:

$$2(\boldsymbol{s}^tJC\boldsymbol{r})\mathrm{i}=\lambda(\boldsymbol{s}^t\boldsymbol{r}).\qquad(7)$$

这样发现,满足(5)式的矢量 $\boldsymbol{s}$ 该满足(7)式.由于 $\boldsymbol{r}$ 的各分量 $\hat{q}_1,\hat{q}_2,\hat{p}_1,\hat{p}_2$ 是线性独立的力学量.这样就得到

$$(2\mathrm{i})\boldsymbol{s}^tJC=\lambda\boldsymbol{s}^t,\qquad(8)$$

注意到 C 是对称矩阵,且 $J^t=-J$,所以将(8)式转置变形得

$$2CJ\boldsymbol{s}=\lambda\mathrm{i}\boldsymbol{s}.\qquad(9)$$

可见满足(5)式的矢量 $\boldsymbol{s}$ 该满足(9)式,即 $\boldsymbol{s}$ 是 $2CJ$ 对应于本征值 $\lambda\mathrm{i}$ 的本征矢量.

3.2　2CJ 的本征值以及本征矢量的特点

将(9)式两边同时左乘 J 得,

$$2JCJ\boldsymbol{s}=(\lambda\mathrm{i})J\boldsymbol{s},\qquad(10)$$

将(10)式两边同时左乘 $\boldsymbol{s}^\dagger$ 得

$$2\boldsymbol{s}^\dagger JCJ\boldsymbol{s}=(\lambda\mathrm{i})\boldsymbol{s}^\dagger J\boldsymbol{s},\qquad(11)$$

其中 $\boldsymbol{s}^\dagger=(b_1^*\quad b_2^*\quad b_3^*\quad b_4^*)$ 是 $\boldsymbol{s}$ 的厄米共轭行矢量.将(11)式取转置和复共轭得到

$$2\boldsymbol{s}^\dagger J^\dagger C^\dagger J^\dagger\boldsymbol{s}=(-\lambda^*)\mathrm{i}\boldsymbol{s}^\dagger J^\dagger\boldsymbol{s},\qquad(12)$$

整理(12)式并注意到 $J^\dagger=-J$ 得

$$2\boldsymbol{s}^\dagger JCJ\boldsymbol{s}=(\lambda^*\mathrm{i})\boldsymbol{s}^\dagger J\boldsymbol{s}.\qquad(13)$$

(13)式左边等于 $-2(J\boldsymbol{s})^\dagger C(J\boldsymbol{s})$,由于 C 是正定实对称矩阵,因而(11)式和(13)式左边都是非零实数,所以 λ 和 λ^* 都非零.比较(11)式和(13)式得

$$\lambda=\lambda^*\neq0.$$

可见 λ 是非零实数.这样得知:$2CJ$ 的本征值($\lambda\mathrm{i}$)是纯虚数.并且由于 $2CJ$ 是实数矩阵,所以是 $\boldsymbol{s}$ 复数矢量.现在对(9)式两边取共轭复数得

$$2CJ\boldsymbol{s}^*=(-\lambda\mathrm{i})\boldsymbol{s}^*.$$

可见,当 $\boldsymbol{s}$ 是对应于 $2CJ$ 本征值是 $\lambda\mathrm{i}$ 的本征矢量时候,则 $\boldsymbol{s}^*$ 也是 $2CJ$ 的本征矢量,对应的本征值是($-\lambda\mathrm{i}$).即 $2CJ$ 的本征值是纯虚数并且成对出现.这样,对于矩阵 $2CJ$,肯定可以找到两个不同的本征矢量 $\boldsymbol{s}_1$ 和 $\boldsymbol{s}_1^*$,为了明确起见,令 $\boldsymbol{s}_1$ 对应的本征值是 $\lambda_1\mathrm{i}$,$\boldsymbol{s}_1^*$ 对应的本征值是 $-\lambda_1\mathrm{i}$,其中的 λ_1 是正实数.

现在考虑 $\boldsymbol{s}_1$ 和 $\boldsymbol{s}_1^*$ 所在的空间以及斜正交关系,找出与 $\boldsymbol{s}_1$ 和 $\boldsymbol{s}_1^*$ 都斜正交的四维矢量 $\boldsymbol{e}_j(j=1,2)$,即

$$\boldsymbol{e}_j^tJ\boldsymbol{s}_1=\boldsymbol{e}_j^tJ\boldsymbol{s}_1^*=0.$$

由于 $J\boldsymbol{s}_1$ 和 $J\boldsymbol{s}_1^*$ 线性独立,$\boldsymbol{e}_j$ 组成一个二维空间.下面证明这个空间在 $2CJ$ 下是不变的.由于

$$J^2=-I,J^t=-J,C^t=C.$$

有

$$(2CJ\boldsymbol{e}_j)^tJ\boldsymbol{s}_1=2\boldsymbol{e}_j^t(-J)C^tJ\boldsymbol{s}_1=-\boldsymbol{e}_j^tJ(\lambda_1\mathrm{i})\boldsymbol{s}_1=$$
$$-\lambda_1\mathrm{i}(\boldsymbol{e}_j^tJ\boldsymbol{s}_1)=0.$$

同理

$$(2CJ\boldsymbol{e}_j)^tJ\boldsymbol{s}_1^*=0.$$

所以,又可以在这个二维空间找出一对矢量 $\boldsymbol{s}_2$ 和 $\boldsymbol{s}_2^*$ 使

$$2CJ\boldsymbol{s}_2=\lambda_2\mathrm{i}\boldsymbol{s}_2,$$
$$2CJ\boldsymbol{s}_2^*=-\lambda_2\mathrm{i}\boldsymbol{s}_2^*(\lambda_2>0).$$

可以证明 $\boldsymbol{s}_1$ 和 $\boldsymbol{s}_1^*$,$\boldsymbol{s}_2$ 和 $\boldsymbol{s}_2^*$ 都不是斜正交的.

$$\boldsymbol{s}_j^{*t}J\boldsymbol{s}_j=\boldsymbol{s}_j^{*t}J\frac{2CJ\boldsymbol{s}_j}{\lambda_j\mathrm{i}}=\left(-\frac{2\mathrm{i}}{\lambda_j}\right)\boldsymbol{s}_j^{*t}JCJ\boldsymbol{s}_j=$$
$$\left(\frac{2\mathrm{i}}{\lambda_j}\right)(J\boldsymbol{s}_j)^\dagger C(J\boldsymbol{s}_j).$$

$(J\boldsymbol{s}_j)^\dagger C(J\boldsymbol{s}_j)>0$(由于 C 是正定对称矩阵).可以适当地将它们归一化,使得

$$(J\boldsymbol{s}_j)^\dagger C(J\boldsymbol{s}_j)=\frac{\lambda_j}{2}.\qquad(14)$$

于是有

$$\boldsymbol{s}_j^\dagger J\boldsymbol{s}_j=\mathrm{i}.\qquad(15)$$

由上述构造知道

$$\boldsymbol{s}_2^tJ\boldsymbol{s}_1=\boldsymbol{s}_2^tJ\boldsymbol{s}_1^*=0.\qquad(16)$$

(16)式取复共轭得到

$$\boldsymbol{s}_2^{*t}J\boldsymbol{s}_1^*=\boldsymbol{s}_2^{*t}J\boldsymbol{s}_1=0.\qquad(17)$$

而且容易看出:对任意复矢量 $\boldsymbol{\varphi}$ 都有

$$\boldsymbol{\varphi}^t J \boldsymbol{\varphi} = 0. \tag{18}$$

由一对复矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 组成的力学量 $\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{r}$ 的对易关系

$$[\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{r}] = [\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}^t\boldsymbol{v}] = \boldsymbol{u}^t\left[\begin{pmatrix}\hat{q}_1\\ \hat{q}_2\\ \hat{p}_1\\ \hat{p}_2\end{pmatrix},(\hat{q}_1\quad \hat{q}_2\quad \hat{p}_1\quad \hat{p}_2)\right]\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}^t J\boldsymbol{v})\mathrm{i}.$$

从前面(14)—(18)式,令

$$\hat{a}_j = \boldsymbol{s}_j^t\boldsymbol{r},\hat{a}_j^\dagger = \boldsymbol{s}_j^{*\,t}\boldsymbol{r}.$$

就得到

$$[\hat{a}_j,\hat{a}_k^\dagger] = \delta_{jk}. \tag{19}$$

其余对易关系是零.

3.3 哈密顿量的表达形式

由于 $\hat{a}_j$ 和 $\hat{a}_j^\dagger$ 满足(19)式,所以它们是线性独立的4个力学量,从而 $\hat{H}$ 可以由它们的二次型来组成.

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^{2}\alpha_j\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j + \sum_{j,k=1}^{2}\beta_{jk}\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_k^\dagger + \sum_{j,k=1}^{2}\gamma_{jk}\hat{a}_j\hat{a}_k + e_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + e_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 + \text{const}. \tag{20}$$

由对易关系(5)和(19)式,我们知道哈密顿量只能表达成以下的形式

$$\hat{H} = \lambda_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \lambda_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \text{const}. \tag{21}$$

由于哈密顿量是正定的,所以其中 $\lambda_1,\lambda_2>0$.

4 量子态的得出

综合以上的工作,我们其实是通过一个变换 B,将基底 $\hat{q}_1,\hat{q}_2,\hat{p}_1,\hat{p}_2$ 变成了 $\hat{a}_1,\hat{a}_2,\hat{a}_1^\dagger,\hat{a}_2^\dagger$.即

$$\begin{pmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\\ \hat{a}_1^\dagger\\ \hat{a}_2^\dagger\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}\hat{q}_1\\ \hat{q}_2\\ \hat{p}_1\\ \hat{p}_2\end{pmatrix}, \tag{22}$$

其中 B 是4维方矩阵,由前面的计算,知道它是由 $2CJ$ 的本征矢量 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_1^*,\boldsymbol{s}_2^*$(复数矢量)构成.

$$B = \begin{pmatrix}\boldsymbol{s}_1^t\\ \boldsymbol{s}_2^t\\ \boldsymbol{s}_1^{t*}\\ \boldsymbol{s}_2^{t*}\end{pmatrix}. \tag{23}$$

由(19)式得到

$$\left[\begin{pmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\\ \hat{a}_1^\dagger\\ \hat{a}_2^\dagger\end{pmatrix},(\hat{a}_1\quad \hat{a}_2\quad \hat{a}_1^\dagger\quad \hat{a}_2^\dagger)\right] = J. \tag{24}$$

结合(22),(2)和(24)式即有

$$\left[B\begin{pmatrix}\hat{q}_1\\ \hat{q}_2\\ \hat{p}_1\\ \hat{p}_2\end{pmatrix},(\hat{q}_1\quad \hat{q}_2\quad \hat{p}_1\quad \hat{p}_2)B^t\right] = B(J\mathrm{i})B^t = J. \tag{25}$$

由(23)式,所以可以把矩阵 B 写成如下的分块形式

$$B = \begin{pmatrix}a & b\\ a^* & b^*\end{pmatrix}, \tag{26}$$

其中的 a,b 等都是 2×2 矩阵.令

$$\begin{pmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\\ \hat{a}_1^\dagger\\ \hat{a}_2^\dagger\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{a}^\dagger\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{q}_1\\ \hat{q}_2\\ \hat{p}_1\\ \hat{p}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{q}\\ \boldsymbol{p}\end{pmatrix}.$$

由(22)和(26)式得 $\begin{pmatrix}\hat{a}\\ \hat{a}^\dagger\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ a^* & b^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix}$,将以上形式代入(25)式得

$$\mathrm{i}\begin{pmatrix}a & b\\ a^* & b^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^t & a^\dagger\\ b^t & b^\dagger\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}. \tag{27}$$

得到

$$ba^t = ab^t. \tag{28}$$

$$b^*a^\dagger = a^*b^\dagger. \tag{29}$$

$$\mathrm{i}(ab^\dagger - ba^\dagger) = I. \tag{30}$$

$$\mathrm{i}(b^*a^t - a^*b^t) = I. \tag{31}$$

4.1 基态波函数

现在来求基态波函数,按照量子力学中的熟知结果它应该是湮没算子 $\hat{a}_1$ 和 $\hat{a}_2$ 具有零本征值的本征态.我们注意到湮没算子的形式是

$$\hat{a} = a\boldsymbol{q} + b\boldsymbol{p}. \tag{32}$$

基态波函数该 $\langle q_1,q_2|\psi\rangle$ 满足

$$\hat{a}_m\langle q_1,q_2\mid\psi\rangle = 0,\quad (m=1,2). \tag{33}$$

令基态波函数具有的形式是

$$\langle q_1,q_2\mid\psi\rangle \sim \mathrm{e}^{\boldsymbol{q}^tA\boldsymbol{q}}. \tag{34}$$

将(32)式写成分量形式代入(33)式

$$\hat{a}_m\langle q_1,q_2\mid\psi\rangle = (a_{mj}\,\hat{q}_j + b_{mj}\,\hat{p}_j)\mathrm{e}^{\boldsymbol{q}^tA\boldsymbol{q}}(m,j=1,2) =$$

$$[a_{mj}\ \hat{q}_j + b_{mj}(-\mathrm{i})\nabla_j]\mathrm{e}^{q_kA_{kl}q_l} =$$
$$[a_{mj}\ \hat{q}_j + b_{mj}(-\mathrm{i})(\delta_{jk}A_{kl}q_l + q_kA_{kl}\delta_{jl})]\mathrm{e}^{q_kA_{kl}q_l} = 0.$$
所以得到
$$a_{ml} = \mathrm{i}b_{mj}(A_{jl} + A_{lj}).$$
写成矩阵形式即是
$$a = \mathrm{i}b(A + A^t). \tag{35}$$
由(30)式,可以证明 b 是非退化的,$\det b \neq 0$,所以 b^{-1} 是存在的.所以把(35)式化成
$$(-\mathrm{i})b^{-1}a = A + A^t \tag{36}$$
这个式子要求$(-\mathrm{i})b^{-1}a$ 是对称矩阵,A 才会有解.而 a,b 都是矩阵,由(28)式知道$(-\mathrm{i})b^{-1}a$ 是对称矩阵.所以可以令
$$A = \frac{1}{2}(-\mathrm{i}b^{-1}a) \tag{37}$$
(36)式就可以满足了.有
$$A + A^* = (-\frac{1}{2}\mathrm{i})[b^{-1}a - (b^{-1}a)^*]. \tag{38}$$
由(30)式得到
$$ab^\dagger - ba^\dagger = (-\mathrm{i})I,$$
即
$$\mathrm{i}[b^{-1}a - (b^{-1}a)^\dagger] = (b^\dagger b)^{-1}. \tag{39}$$
又因为 $b^{-1}a$ 是对称矩阵,所以
$$b^{-1}a = (b^{-1}a)^t. \tag{40}$$
(40)式两边取复共轭得
$$(b^{-1}a)^* = (b^{-1}a)^\dagger.$$
所以(39)式就是
$$\mathrm{i}[b^{-1}a - (b^{-1}a)^*] = (b^\dagger b)^{-1}. \tag{41}$$
因为 b 是非退化的,所以$(b^\dagger b)$是正定的,又由(41)式看出,它是实数矩阵.所以$(b^\dagger b)^{-1}$是正定的实数矩阵,因而$(b^{-1}a)$的虚部是负定的.又由于(36)式,所以这样的矩阵 A 必须满足的$(A + A^t)$的实部负定.这样由(34)式确定的波函数是平方可积的,属于 Hilbert 空间.

最后求这个波函数的归一化因子,假设这个因子是 D,那么
$$\langle q_1,q_2 \mid \psi\rangle = D\mathrm{e}^{q^tAq}.$$
假设基态波函数是归一的,则有
$$\langle\psi \mid \psi\rangle = \iint\langle\psi \mid q_1,q_2\rangle\langle q_1,q_2 \mid \psi\rangle \mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2 =$$
$$\iint D^* D\mathrm{e}^{q^tAq}\mathrm{e}^{q^tA^*q}\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2 =$$
$$\mid D\mid^2\iint \mathrm{e}^{q^tAq}\mathrm{e}^{q^tA^*q}\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2 =$$
$$\mid D\mid^2\sqrt{\frac{\pi^2}{\det(A + A^*)}}.$$
给出
$$\mid D\mid = \sqrt{\frac{\det(A + A^*)}{\pi^2}}.$$
利用(38)和(41)式得到
$$\mid D\mid = \frac{1}{\pi\mid \det b\mid}\sqrt{\frac{1}{2}}.$$
这样最终得到了基态波函数
$$\langle q_1,q_2 \mid \psi\rangle = \frac{1}{\pi\mid \det b\mid}\sqrt{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{q^tAq}.$$
这是一个保持 $\hat{H} = \sum_{j=1}^{4}\hat{X}_j^2$ 在转动群G下不变的态矢量的波函数,其中 A 由(37)式给出.

4.2 其他能级波函数

有了能量的基态波函数形式,其他能级的波函数也就可以相对容易地确定下来.它们是由 $\hat{a}_j^\dagger$ 的各幂次作用于基态的结果.由于 $\hat{a}_j^\dagger$ 是$\hat{q}$ 和$\hat{p}$ 的一次式,因而 $\hat{a}_j^\dagger$ 就是一些形如$\sum_{j=1}^{2}(\alpha_jq_j + \beta_j\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial q_j})$的微分算子,它们作用于基态后得到 $P(q)\mathrm{e}^{q^tAq}$ 的形式,其中 $P(q)$ 是 q 的多项式.这个方法可用于研究一个一般拉氏量由广义坐标和广义速度的二次型组成的体系.

5 转动不变态矢量

不难证明,$\hat{H}$ 的基态矢量在 G 下是不变的,因为对 $\hat{H}$ 的基态不简并。现在考虑在 G 下不变的激发态.在 $g \in G$ 的作用下,
$$\hat{a}'_j = \hat{g}\hat{a}_jg^{-1}, \tag{42}$$
$$\hat{a}_j'^\dagger = \hat{g}\hat{a}_j^\dagger g^{-1} = (\hat{g}\hat{a}_jg^{-1})^\dagger = (\hat{a}'_j)^\dagger.$$
$\hat{a}'_j$ 和 $\hat{a}_j^\dagger$ 作线性变换,令
$$\hat{a}'_j = m_{j_1}\hat{a}_1 + m_{j_2}\hat{a}_2 + m_{j_3}\hat{a}_1^\dagger + m_{j_4}\hat{a}_2^\dagger.$$
由于真空态是 g 下不变的,因此 $g^{-1}\mid 0\rangle = \lambda\mid 0\rangle$.所以有
$$\hat{a}'_j\mid 0\rangle = g\hat{a}_jg^{-1}\mid 0\rangle = g\hat{a}_j\lambda\mid 0\rangle = 0.$$
可见
$$m_{j_3} = m_{j_4} = 0. \tag{43}$$
设 $\hat{a}_j$ 和$\hat{a}_j^\dagger$ 作线性变换的变换矩阵是N.则由(43)式知道 N 可以写成这样的分块形式 $N = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M^* \end{pmatrix}$.

其中 M 是 2×2 矩阵.那么就有

$$\hat{a}'_j = M_{jl}\hat{a}_l, \hat{a}'^{\dagger}_j = M^*_{jl}\hat{a}^{\dagger}_l.$$

得到

$$g\hat{H}g^{-1} = \sum_j \lambda_j g\hat{a}^{\dagger}_j g^{-1} g\hat{a}_j g^{-1} = \sum_{jkl}\lambda_j M^*_{jl}\hat{a}^{\dagger}_l M_{jk}\hat{a}_k = \sum_j \lambda_j \ \hat{a}^{\dagger}_j \hat{a}_j.$$

因此

$$M^*_{jl}\lambda_j M_{jk} = \delta_{lk}\lambda_k.$$

令矩阵

$$\lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}.$$

则有

$$M^{\dagger}\lambda M = \lambda.$$

另一方面由于 $\hat{a}_j, \hat{a}^{\dagger}_k$ 的对易关系与 $\hat{a}'_j, \hat{a}'^{\dagger}_k$ 的对易关系一样,因此

$$[\hat{a}'_j, \hat{a}'^{\dagger}_k] = [M_{jj_1}\hat{a}_{j_1}, \hat{a}^{\dagger}_{j_2}M^{\dagger}_{j_2k}] = \delta_{jk},$$

$$M_{jj_1}\delta_{j_1j_2}M^{\dagger}_{j_2k} = \delta_{jk}.$$

推出 $MM^{\dagger} = I$.所以 $M\subset U(2)$,因此有

$$M^{\dagger}\lambda M = \lambda, M^{-1}\lambda M = \lambda, \lambda M = M\lambda.$$

当 $\lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$,其中 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时,M 是对角矩阵. $M = \begin{pmatrix}m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{pmatrix}$,其中 $|m_j| = 1$.也就是使

$$\hat{a}'_j = m_j\hat{a}_j, \hat{a}'^{\dagger}_j = m^*_j\hat{a}_j.$$

这里对 j 不求和.所以对于一般的 m_1, m_2 在 g 下不变的态是

$$|\psi_l\rangle = \frac{(\hat{a}^{\dagger}_1)^{l_1}(\hat{a}^{\dagger}_2)^{l_2}}{\sqrt{l_1!\,l_2!}}|0\rangle. \qquad (44)$$

问题完全分离为两个空间的直积.

而当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时,$M = M(g)$ 可以是任意的 $U(2)$ 矩阵,而在 G 不变的态由所有的在有关 $U(2)$ 子群 G 下不变的多项式 $P_l(\hat{a}^{\dagger}_1, \hat{a}^{\dagger}_2)$ 作用在真空态上构成

$$|l\rangle = P_l(\hat{a}^{\dagger}_1, \hat{a}^{\dagger}_2)|0\rangle.$$

非平庸的多项式 P_l 的存在,实际上给出 $U(2)$ 子群 G 的可能的形式,这也就是给出原来群 G 的可能形式.

至此得到一系列在 G 下不变的态矢量,在正交归一化之后,得到不变态矢量的集合$\{|\psi_l\rangle\}$,满足

$$\langle\psi_l|\psi_{l'}\rangle = \delta_{ll'}.$$

6 Orbifold R^4/G 上的孤子

非对易 Orbifold R^4/G 上的孤子,按文献[7,8]可以由在 R^4 上的对 G 群不变的投影算子组成,也就是要求投影算子 $\hat{P}$ 满足

$$\hat{P}^2 = \hat{P}, g\hat{P}g^{-1} = \hat{P}(g\in G).$$

可以构造投影算子 $\hat{P}$ 如下

$$\hat{P} = \sum_l |\psi_l\rangle\langle\psi_l|.$$

其中$|\psi_l\rangle$是满足

$$g|\psi_l\rangle = e^{i\alpha}|\psi_l\rangle, \langle\psi_l|\psi_{l'}\rangle = \delta_{ll'}$$

的波函数.求和的范围任意.请注意,即使是由(44)式中的 $|\psi_l\rangle$ 组成的投影算子也并非是两个直积空间的投影算子的直积.这就是说,虽然当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时,R^4/G 可以分解为$R^2/G_1\otimes R^2/G_2$ 即两个 Orbifold 的直积,但是 R^4/G 上的孤子一般并非是两个 Orbifold 上的孤子的直积.这个结果是 Martinec 在文献[8]中部分结果的推广.

另外还可以从这些不变态由 GHS 构造[9]来得到非对易 Orbifold T^4/G 上的孤子解的有限形式(基本方法由文献[5,6]给出).

7 讨论

我们可以推广以上的结果,研究非对易 2n 维空间.

参考文献(References)

1 Green M B, Schwarz J H, Witten E. Superstring. Cambridge: Cambridge University Press, 1984

2 Seiberg N, Witten E. JHEP, 1999, **032**:9909

3 HU J P, ZHANG S C. Cond-mat/0112432

4 CHEN Y X, HOU B Y, HOU B Y. Nucl. Phys., 2002, **B638**:220—242

5 HOU B Y, SHI K J, YANG Z Y. Lett. Math. Phys., 2002, **61**(3): 205—220

6 DENG H, HOU B Y, SHI K J et al. J. Math. Phys., preprint

7 Gopakumar R, Minwalla S, Strominger A. hep-th/0003160

8 Martinec E J, Moore G. hep-th/0101199

9 Gopakumar R, Headrick M, Spradin M. hep-th/0103256

Quantum States and Soltion Solutions on Noncommutative Orbifold R^4/G *

SHI Guo-Fang[1)]　DENG Hui[2)]　XIONG Hua-Hui[3)]　SHI Kang-Jie[4)]

(Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract We obtain the ground state of the Hamiltonian which is constructed by general quadratic form of generalized coordinates and momenta. Consequently we can obtain eigenstates of each order energy. Invariant quadratic form with respect to coordinates under rotation subgroup G of $SO(4)$ can be regularized as this kind of Hamiltonian, so we get the invariant ground state under rotation G. If G is a finite subgroup of $SO(4)$, we will get the eigenvectors on noncommutative Orbifold R^4/G. Based on this, we obtain the soliton solution on it.

Key words noncommutative, soliton, Hamiltonian, creation operator, annihilation operator, wave function of ground state

Received 12 February 2004

* Supported by NSFC(10175050)

1) E-mail: shiguofang@eyou.com

2) E-mail: hdeng-phy@yahoo.com.cn

3) E-mail: jimharry@eyou.com

4) E-mail: kjshi@nwu.edu.cn