# 1+1 维非线性 σ 模型的 BRST 变换的等价性和 Ward 恒等式

王晶　黄永畅[1)]
(北京工业大学应用物理系　北京　100022)

**摘要**　在依据 Dirac 约束规范理论和作推广后的条件下,导出了规范生成元,推导出了 1+1 维 $O(3)$ 非线性 $\sigma$ 模型的一般条件($\beta\neq0$)下的 BRST 变换,给出了其 BRST 变换与 Dirac 规范变换的等价关系,得到了鬼场的新的一般对易关系,且其一般参数 $\beta$ 为零时就回到通常的鬼场的对易关系.并由规范生成元导出了 BRST 荷,进而完成了此模型的一种 BRST 量子化.还在此基础上进一步导出了此系统的 Green 函数生成泛函、连通 Green 函数生成泛函和正规顶角生成泛函,获得了 3 种不同的 Ward 恒等式.

**关键词**　BRST 量子化　Ward 恒等式　约束系统　生成泛函

## 1　引言

1+1 维的非线性 $\sigma$ 模型最初是作为描述 Goldstone 粒子的相互作用的有效理论而被引进的[1],后来人们认识到这些理论与四维 Yang-Mills 理论有许多共同点,在经典意义下两者都是标度不变的,作为量子场论它们都是可重整的、渐进自由的[2].

1+1 维非线性 $\sigma$ 模型像许多其他的 2 维可重整理论一样是精确可解的[3].这使它具有特殊的价值,即可用来作为各种非微扰方法的试验场,如 $1/N$ 展开[4],算符乘积展开.最近对这些 $\sigma$ 模型的兴趣来自超弦理论,在超弦理论中它们作为经典极限而出现[5].并且它还为超弦理论的发展奠定了一些相关的基础,这也因为超弦的内禀时空是 1+1 维的,它们有相同的内禀时空维数,故本文对超弦的低能维象的研究有一定的现实意义.

在协变规范理论中引入鬼场的必要性由 Feynman 在 Yang-Mills 理论中认识到[6],其法则由 Dewit 给出[7].后来,Faddeev 和 Popov 在以路径积分方法为基础研究规范场量子化时自然地引入了鬼场[8].

在发展规范理论过程中,Becchi,Rouet 和 Stora 注意到包括规范固定项和 Faddeev-Popov 鬼场的拉氏量不满足规范不变性,并给出了满足在今天称之为 BRS 变换的不变性[9],这 BRS 不变性在证明规范理论的可重整化和幺正性时非常有用,BRST 变换是和 BRS 变换性质上非常相近的对称变换,它们与 Dirac 的约束体系正则量子化比较,显得较先进,它不需要计算新的泊松括号,且量子化结果的物理意义明确,有时还是可以作为寻找正确规范固定项的指导性原则[10].

## 2　1+1 维带约束的 $O(3)$ 非线性 σ 模型

1+1 维带约束 $O(3)$ 非线性 $\sigma$ 模型的无拓扑项且考虑了拉氏乘子场的 Lagrange 密度为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2g^2}(\partial_\mu\boldsymbol{\zeta})(\partial^\mu\boldsymbol{\zeta})-\lambda(t)(\boldsymbol{\zeta}^2-1),\quad(1)$$

其中 $g$ 是耦合常数,$\mu=0.1$,$\boldsymbol{\zeta}=(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$,$\lambda$ 为拉格朗日乘子场.

2003-03-24 收稿
1) 联系人

因依据约束理论,$\lambda$ 为时间的函数,据此可求其对应的正则变量,则有

$$\pi_i = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0 \zeta_i)} = \frac{1}{g^2}\partial_0 \zeta_i, i = 1,2,3.$$

$$\pi_\lambda = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0 \lambda)} = 0, \tag{2}$$

(2)式的第二式为典型的初级约束,由它可得次级约束 $\zeta^2 = 1$,故理论自洽. 由于系统具有 $O(3)$ 对称性,故可用极坐标形式.

将场量改变为极坐标的变量,故有 $\zeta_1 = R\sin\theta\cos\phi$, $\zeta_2 = R\sin\theta\sin\phi$, $\zeta_3 = R\cos\theta$. 则(1)式中的约束可写为 $C \equiv R - 1 = 0$,经计算得其极坐标下的 Lagrange 密度为

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2g^2}\{(\partial_\mu R)(\partial^\mu R) + R^2[(\partial_\mu\theta)(\partial^\mu R) + \sin^2\theta(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)]\} - \lambda(t)(R-1), \tag{3}$$

在新的场变量 $\{R,\theta,\phi,\lambda\}$ 下,其正则动量为

$$\pi_R = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0 R)} = \frac{\dot R}{g^2},\ \pi_\theta = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0 \theta)} = \frac{R^2\dot\theta}{g^2},$$

$$\pi_\phi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \frac{R^2\dot\phi\sin^2\theta}{g^2},\ \pi_\lambda = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0 \lambda)} = 0, \tag{4}$$

其中(4)式最后一式为初级约束. 则其相空间的 Lagrange 密度为

$$\mathscr{L}_p = \frac{g^2}{2}\pi_R^2 - \frac{1}{2g^2}(\partial_1 R)^2 + \frac{g^2}{2R^2}\pi_\theta^2 - \frac{R^2}{2g^2}(\partial_1\theta)^2 + \frac{g^2}{2R^2\sin^2\theta}\pi_\phi^2 - \frac{R^2\sin^2\theta}{2g^2}(\partial_1\phi)^2 - \lambda(t)(R-1), \tag{5}$$

进而利用(4)和(5)式可作一个推广的变换,得其对应的 Hamilton 密度

$$\mathscr{H}_p = \alpha\pi_R\dot R + \pi_\theta\dot\theta + \pi_\pi\dot\varphi - \mathscr{L}_p = \frac{g^2}{2}\left[(2\alpha-1)\pi_R^2 + \frac{1}{R^2}\left(\pi_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\pi_\varphi^2\right)\right] + \frac{1}{2g^2}\{(\partial_1 R)^2 + R^2[(\partial_1\theta)^2 + \sin^2\theta(\partial_1\phi)^2]\} + \lambda(t)(R-1), \tag{6}$$

其中 $\alpha$ 为一般参数. 有了以上的一般性讨论的基础就可进行深入的研究.

## 3 规范固定的推广、规范生成元、规范不变性和 BRST 变换的推导

利用以上系统的 Lagrange 密度和 Hamilton 密度,通过引入规范固定项和规范生成元来导出 BRST 变换.

利用 Dirac-Bergman 约束理论[11]的方法,由系统初级约束

$$\lambda_0 = \pi_\lambda = 0 \tag{7}$$

可得系统次级约束

$$\lambda_1 = -(R-1), \tag{8}$$

当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时,经计算系统无其他约束,$\lambda_0$,$\lambda_1$ 都为第一类约束. 按规范生成元定义[11]可得

$$G = \int[\dot\varepsilon\pi_\lambda + \varepsilon(R-1)]\mathrm{d}x, \tag{9}$$

生成元 $G$ 所对应的规范变换为

$$\begin{aligned}
&\delta R = \{R,G\} = 0,\ \delta\theta = \{\theta,G\} = 0,\\
&\delta\phi = \{\phi,G\} = 0,\ \delta\lambda = \{\lambda,G\} = \dot\varepsilon,\\
&\delta\pi_R = \{\pi_R,G\} = -\varepsilon,\ \delta\pi_\theta = \{\pi_\theta,G\} = 0,\\
&\delta\pi_\lambda = \{\pi_\lambda,G\} = 0,\ \delta\pi_\phi = \{\pi_\phi,G\} = 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

令 $\varepsilon(t) = \omega c(t)$,$\omega$ 为不依赖时间的 Grassmann 数,其中 $c$ 为 Grassmann 数,则 $\varepsilon(t)$ 为可对易数. 通过如此定义,我们把规范变换和 BRST 变换联系起来,故可得

$$\delta\pi_R = -\omega c,\quad \delta\lambda = \omega\dot c. \tag{11}$$

对此模型,取一般规范固定项

$$\mathscr{L}_{GF} = -b[(\beta+1)\dot\lambda - \pi_R] - \frac{1}{2}b^2, \tag{12}$$

其中 $\beta$ 为不等于 $-1$ 的任意常数,它是不同于所有已知规范固定项的. 另外取 F-P 鬼场的一个新的一般 Lagrange 密度部分如下

$$\mathscr{L}_{FP} = (\beta+1)\dot{\bar c}\,\dot c - \bar c c, \tag{13}$$

因此得到了一般的有效 Lagrange 密度 $\mathscr{L}_{eff} = \mathscr{L} + \mathscr{L}_{GF+FP}$,其中 $\mathscr{L}_p$ 为(5)式,$c$ 为 F-P 鬼场,$\bar c$ 为反鬼场,$b$ 为 $c$ 数标量辅助场.

在求保持 $\mathscr{L}_{eff}$ 不变的情况下,鬼场项和规范固定项也保持不变时场的变换,即

$$\begin{aligned}
\delta\mathscr{L}_{GF+FP} = \delta(\mathscr{L}_{GF} + \mathscr{L}_{FP}) = {}& \delta b[\pi_R - (\beta+1)\dot\lambda + b] - \\
&(bw + \delta\bar c)[(\beta+1)\ddot c + c] - \\
&[(\beta+1)\ddot{\bar c} + \bar c]\delta c + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta[(\beta+1)\bar c\dot c].
\end{aligned} \tag{14}$$

由于 $\delta\mathscr{L}_{GF+FP} = 0$,而且最后一项是关于时间的全微分项,可忽略. 所以得出当 $(\beta+1)\dot\lambda - \pi_R - b \neq 0$ 和 $(\beta+1)\ddot c + c \neq 0$ 时,有变换

$$\delta b = 0,\quad \delta\bar c = -b\omega,\quad \delta c = 0, \tag{15}$$

于是最后就得到了具有一般条件(12)和(13)式的

BRST变换

$$\delta R = \delta\theta = \delta\phi = \delta\pi_\theta = \delta\pi_\lambda = \delta\pi_\phi = \delta c = \delta b = 0,$$
$$\delta\bar{c} = -b\omega,\ \delta\lambda = \omega\dot{c},\ \delta\pi_R = -\omega c, \tag{16}$$

故当$\beta(\beta\neq -1)$取不同值时，我们得到不同的规范固定项的Lagrange密度和F-P鬼场的Lagrange密度．当$\beta=0$时为文献[12]所得的在Lorentz规范下的取值，故我们的研究是一般的．

## 4 推广的一般Lagrange密度和对应的Hamilton密度

利用以上的讨论，我们得一般BRST变换下不变的推广的Lagrange密度

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\rm BRST} &= \mathscr{L}_{\rm p} + \mathscr{L}_{\rm GF+FP} = \\ &\frac{g^2}{2}\pi_R^2 + \frac{g^2}{2R^2}\left[\pi_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\pi_\varphi^2\right] - \\ &\frac{1}{2g^2}\{(\partial_1 R)^2 + R^2[(\partial_1\theta)^2 + \\ &\sin^2\theta(\partial_1\varphi)^2]\} - \lambda(R-1) - \\ &b[(\beta+1)\dot{\lambda} - \pi_R] - \frac{1}{2}b^2 + \\ &(\beta+1)\dot{\bar{c}}\,\dot{c} - \bar{c}c + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(\beta+1)\delta(\bar{c}c)],\end{aligned} \tag{17}$$

其中$\delta\mathscr{L}_{\rm BRST}$满足幂零性即$\delta^2\mathscr{L}_{\rm BRST}=0$，同理，最后一项由于是关于时间的全微分项，故可略去，则其正则动量变量为

$$\pi_\lambda = -(\beta+1)b,\ \pi_c = -(\beta+1)\dot{\bar{c}},$$
$$\pi_{\bar{c}} = (\beta+1)\dot{c}, \tag{18}$$

故其包含鬼场的对应的一般的Hamilton密度为

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_{\rm BRST} &= \alpha\pi_R\dot{R} + \pi_\theta\dot{\theta} + \pi_\varphi\dot{\varphi} + \pi_\lambda\dot{\lambda} + \pi_c\dot{c} + \dot{\bar{c}}\pi_{\bar{c}} - \mathscr{L}_{\rm BRST} = \\ &\frac{g^2}{2}(2\alpha-1)\pi_R^2 + \frac{g^2}{2R^2}\left(\pi_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\pi_\varphi^2\right) + \\ &\frac{1}{2g^2}\{(\partial_1 R)^2 + R^2[(\partial_1\theta)^2 + \sin^2\theta(\partial_1\varphi)^2]\} + \\ &\lambda(R-1) + \frac{1}{(\beta+1)}\pi_c\pi_{\bar{c}} + \frac{1}{2(\beta+1)^2}\pi_\lambda^2 + \\ &\frac{1}{(\beta+1)}\pi_\lambda\pi_R + \bar{c}c,\end{aligned} \tag{19}$$

其中已略去关于时间的全微分项，下面我们可求其对易关系[13]，即可得$c$和$\bar{c}$的正则方程

$$\partial_0 c = \frac{\pi_{\bar{c}}}{(\beta+1)},$$
$$\partial_0\bar{c} = -\frac{\pi_c}{(\beta+1)}, \tag{20}$$

可见(20)式与(18)式关于$c$与$\bar{c}$的方程自洽，即本文的推广是自洽的．并且可得$\partial_0 c$与$\bar{c}$或$\partial_0\bar{c}$与$c$具有反对易关系，于是得到

$$\{\pi_c, \pi_{\bar{c}}\} = \{c, \bar{c}\} = 0,$$
$$\partial_0\{\bar{c}, c\} = 0,$$
$$\{\partial_0\bar{c}, c\} = (-1)\{\partial_0 c, \bar{c}\}, \tag{21}$$

其中$c$还应该满足关于费米场的海森堡运动方程，则得

$$\mathrm{i}\,\partial_0 c = \frac{\mathrm{i}\pi_{\bar{c}}}{(\beta+1)}, \tag{22}$$

另一方面，由于$\{c(x), \pi_c(x')\} = \mathrm{i}\delta(x-x')$，则得

$$-\{c(x), \dot{\bar{c}}(x')\} = \frac{\mathrm{i}\delta(x-x')}{(\beta+1)} = \{\bar{c}(x), \dot{c}(x')\},\ (\beta\neq -1). \tag{23}$$

因此，本文第一次给出了关于鬼场的一个一般对易关系，(23)式中的负号是非平凡的[14]，当$\beta=0$，(23)式回到通常的鬼场的对易关系．

## 5 BRST荷、反BRST荷和BRST量子化

BRST荷$Q_{\rm BRST}$是BRST变换的生成元，用该荷生成BRST变换为

$$\delta\Phi = [Q_{\rm BRST}, \Phi],\ \delta\psi = \{Q_{\rm BRST}, \psi\}, \tag{24}$$

其中$\Phi$为玻色场，$\psi$为费米场，由于在导出BRST变换时已取$\varepsilon=\omega c$，当$\omega=-\mathrm{i}\omega'$时，其$\omega'$仍为Grassmann数，则$\varepsilon=-\mathrm{i}\omega' c$，故可得

$$G = -\mathrm{i}\omega'\int[\dot{c}\pi_\lambda + c(R-1)]\mathrm{d}x, \tag{25}$$

定义$G = Q_{\rm BRST}\omega'$，则得

$$Q_{\rm BRST} = -\mathrm{i}\int[(R-1)c + \dot{c}\pi_\lambda]\mathrm{d}x, \tag{26}$$

故由规范变换的生成元导出了BRST荷，因此得到了规范生成元和BRST荷的关系．

进而可得反BRST荷

$$\bar{Q}_{\rm BRST} = \mathrm{i}\int[(R-1)\bar{c} + \pi_\lambda\dot{\bar{c}}]\mathrm{d}x. \tag{27}$$

由于所导出的(22)和(23)式是自洽的，则再次表明(23)式是首次获得的关于鬼场的一个一般的对易关系，当$\beta=0$时回到通常文献[15]的对易关系．因此可得正则等时对易关系

$$[\lambda(x), \pi_\lambda(x')] = [R(x), \pi_R(x')] = [\theta(x), \pi_\theta(x')] = [\phi(x), \pi_\phi(x')] = \mathrm{i}\delta(x-x') \tag{28}$$

和反对易关系

$$\{c(x), \pi_c(x')\} = -(\beta+1)\{\bar{c}(x), \dot{c}(x')\} =$$

$$i\delta(x-x').\tag{29}$$

$Q_{\rm BRST}$,$\bar{Q}_{\rm BRST}$分别产生 BRST 变换和反 BRST 变换,而且可得 $Q_{\rm BRST}$产生的 BRST 变换与由规范变换产生的 BRST 只相差一个常量 $-\omega$,则两种变换的等价性得证. 易证 $Q_{\rm BRST}$和 $\bar{Q}_{\rm BRST}$满足幂零性

$$Q^2_{\rm BRST}=\bar{Q}^2_{\rm BRST}=0.\tag{30}$$

经典约束条件 $\phi_i(q,p)=0$ 量子化后,其约束对应的算符 $\hat{\phi}_a(\hat{q},\hat{p})$作用在物理态上应满足

$$\hat{\phi}_i(\hat{q},\hat{p})|\Psi\rangle_{\rm phy}=0,\ i=1,2\tag{31}$$

适合这种要求的态的集合的 Hilbert 子空间才是真正的物理的 Hilbert 空间[11]. 这也因为根据定量因果原理,任意物理量的定量作用(因)必导致对应的相等的效应(果)[16],故由于存在经典约束条件的作用,则它们量子化后必导致对应的相等的效应,所以还必须考虑方程(31)对 Hilbert 空间的影响. 因此,我们最后给出了一种 BRST 量子化.

## 6 WARD 恒等式和正规顶角的生成泛函

考虑该系统相空间的 Green 函数的生成泛函

$$Z=\int D\varphi^a D\pi_a\delta(\Lambda)\delta(\Omega)\det|\{\Lambda,\Omega\}|\cdot \exp\left\{i\int d^2x(\mathscr{L}_{\rm p}+J^a\varphi_a+K^a\pi_a\right\},\tag{32}$$

其中重复指标 $\alpha$ 表示求和,$\varphi^a=(R,\theta,\phi,\lambda)$,$\pi_a=(\pi_R,\pi_\theta,\pi_\varphi,\pi_\lambda)$,$J_a,K^a,M,\xi,\bar{\xi}$ 分别为$\varphi^a,\pi_a,b,c,\bar{c}$ 的外源,$\Omega$ 是规范条件,$\Lambda$ 是与之对应的约束,则依据文献[11]的方法可得

$$Z=\int D\varphi^a D\pi_a D\bar{c}DcDb\exp\left\{i\int d^2x(\mathscr{L}_{\rm eff}+J_a\varphi^a+K^a\pi_a+Mb+\bar{\xi}c+\bar{c}\xi\right\},\tag{33}$$

其中 $\mathscr{L}_{\rm eff}=\mathscr{L}+\mathscr{L}_{\rm GF}+\mathscr{L}_{\rm PH}$. 同时 BRST 变换的 Jacobi 行列式为 1,$\delta\mathscr{L}_{\rm eff}$在 BRST 变换下为零. 并由于 $\delta^2\phi=\delta^2\pi=\delta^2c=\delta^2\bar{c}=\delta^2b=0$,我们对此引入相应的外源($U_a,V^a,\eta,\bar{\eta},P$)分别与($\delta\varphi^a,\delta\pi_a,\delta c,\delta\bar{c},\delta b$)对应. 这样就可以把格林函数的生成泛函写成

$$Z=\int D\varphi^a\ D\pi_a\ D\bar{c}\ Dc\ Db\exp\{id^2x(\mathscr{L}_{\rm eff}+J_a\varphi^a+K^a\pi_a+\bar{c}\xi+\bar{\xi}c+Mb+\delta\varphi^aU_a+\delta\pi_aV^a+\delta\bar{c}\eta+\bar{\eta}\delta c+\delta b\,p\},\tag{34}$$

生成泛函在 BRST 变换下不变,这个不变性可以写为

$$\int D\varphi^a\ D\pi_a\ D\bar{c}\ Dc\ Db\left[\int d^2x(J_a\delta\varphi^a+K^a\delta\pi_a+\delta\bar{c}\xi+\bar{\xi}\delta c+M\delta b)\right]\exp\{id^2x(\mathscr{L}_{\rm eff}+J_a\varphi^a+K^a\pi_a+\bar{c}\xi+\bar{\xi}c+Mb+\delta\varphi^aU_a+\delta\pi_aV^a+\delta\bar{c}\eta+\bar{\eta}\delta c+\delta bp\}=0,\tag{35}$$

即

$$\int d^2x(J_a\delta\varphi^a+K^a\delta\pi_a+\delta\bar{c}\xi+\bar{\xi}\delta c+Mb)Z=0,\tag{36}$$

把 $\delta\varphi,\delta\pi,\delta c,\delta\bar{c},\delta b$ 换成相应的外源

$$\delta\varphi^a\to\frac{\delta}{i\delta U_a},\delta\pi_a\to\frac{\delta}{i\delta V^a},\delta c\to\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}},\delta\bar{c}\to-\frac{\delta}{i\delta\eta},$$

$\delta b\to\dfrac{\delta}{i\delta P}$,则有

$$\int d^2x\left[J_a\frac{\delta}{\delta U_a}+K^a\frac{\delta}{\delta V^a}+\bar{\xi}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}-\frac{\delta}{\delta\eta}\xi+M\frac{\delta}{\delta P}\right]\cdot Z[J_a,K^a,U_a,V^a,\bar{\xi},\xi,M,\bar{\eta},\eta,P]=0,\tag{37}$$

这就是以格林函数生成泛函 $Z$ 表示的 W.T 恒等式.

把 $Z=e^{iW}$代入上式,就得到以连通格林函数生成泛函 W 表示的 W.T 恒等式

$$\int dx^2\left[J^\mu_a\frac{\delta}{\delta U^\mu_a}+K^a_\mu\frac{\delta}{\delta V^a_\mu}-\bar{\xi}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}+\frac{\delta}{\delta\eta}\xi+M\frac{\delta}{\delta P}\right]\cdot W[J_a,K^a,U_a,V^a,\bar{\xi},\xi,M,\bar{\eta},\eta,P]=0,\tag{38}$$

将外源变量 $J^\mu_a,K^a_\mu,\bar{\xi},\xi,M$ 按照

$$\frac{\delta W}{\delta J^\mu_a}=\varphi^a_\mu,\quad\frac{\delta W}{\delta K^a_\mu}=\pi^\mu_a,\quad\frac{\delta W}{\delta\xi}=-\bar{c},\quad\frac{\delta W}{\delta\bar{\xi}}=c,\quad\frac{\delta W}{\delta M}=b\tag{39}$$

换成新的变量 $\varphi,\pi,c,\bar{c},b$,它们是相应的算符在外源不为零时的真空期待值.

将连通格林函数的生成泛函 $W$ 按照

$$\Gamma=W[J_a,K^a,U_a,V^a,\bar{\xi},\xi,M,\bar{\eta},\eta,P]-\int d^2x(J^\mu_a\varphi^a_\mu+K^a_\mu\pi^\mu_a+\bar{c}\xi+\bar{\xi}c+Mb)\tag{40}$$

换成正规顶角的生成泛函 $\Gamma$,则可得

$$J^\mu_a=-\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi^a_\mu},\ K^a_\mu=-\frac{\delta\Gamma}{\delta\pi^\mu_a},\ \xi=-\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}},\ \bar{\xi}=\frac{\delta\Gamma}{\delta c},$$
$$M=-\frac{\delta\Gamma}{\delta b},\ \frac{\delta W}{\delta U^\mu_a}=\frac{\delta\Gamma}{\delta U^\mu_a},\ \frac{\delta W}{\delta V^a_\mu}=\frac{\delta\Gamma}{\delta V^a_\mu},\ \frac{\delta W}{\delta\eta}=\frac{\delta\Gamma}{\delta\eta},$$
$$\frac{\delta W}{\delta\bar{\eta}}=\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\eta}},\ \frac{\delta W}{\delta P}=\frac{\delta\Gamma}{\delta P},\tag{41}$$

进而可得到

$$\int d^2x\left[\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi^a_\mu}\frac{\delta\Gamma}{\delta U^\mu_a}+\frac{\delta\Gamma}{\delta\pi^\mu_a}\frac{\delta\Gamma}{\delta V^a_\mu}+\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\eta}}\frac{\delta\Gamma}{\delta c}+\right.$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}}\frac{\delta\Gamma}{\delta\eta}+\frac{\delta\Gamma}{\delta b}\frac{\delta\Gamma}{\delta P}\Big]=0, \tag{42}$$

于是得出了正规顶角生成泛函的 W.T 恒等式.

由于本文的研究有一般的现实意义,加之篇幅限制,故有关本文的推广等更多更详细的研究将另文给出.

## 7 总结和结论

依据 Dirac 约束规范理论并在对规范固定条件和鬼场的 Lagrange 密度作推广的条件下,导出了规范生成元,首次推导出了 1 + 1 维 $O(3)$非线性 σ 模型的一般条件($\beta\neq0$)下的 BRST 变换,给出在一般条件下的 BRST 变换与 Dirac 规范变换的关系,得到 $Q_{BRST}$产生的 BRST 变换与由规范变换产生的 BRST 变换只相差一个常量 $-\omega$,首次得到了鬼场的一般对易关系,且其一般参数 $\beta$ 为零时就回到通常的鬼场的对易关系,由规范生成元导出了 BRST 荷,完成了此模型的一种 BRST 量子化,并在此基础上进一步给出了此系统的 Green 函数生成泛函、连通 Green 函数生成泛函和正规顶角生成泛函,最后获得了 Green 函数生成泛函、连通 Green 函数生成泛函和正规顶角生成泛函的三种 Ward 恒等式.

作者感谢李子平教授的讨论.

**参考文献(References)**


1 Coleman S, Weiss J, Zumino B. Phys. Rev., 1961, **177**:2239; Callan C, Coleman S, Weiss et al. Phys. Rev., 1969, **177**:2247
2 Vainshtein A I, Zakharov V I, Novikov V I et al. Sov. J. Pant, Nucl., 1986, **17**:204
3 Zamolodchikov A B. Ann. Phys., (NY) 1979, **120**:253
4 Dadda A, Luschcer M, Divecchia P. Nucl. Phys., 1978, **B146**:63
5 Candelas P et al. Nucl. Phys., 1985, **B258**:46; Henneaux A, Eziucescu L M. Phys. Letts., 1985, **B152**:340
6 Feynman R P. Acta., Phys. Pol., 1963, **24**:697
7 Dewit B S. Relativity Group and Topology, (Blackie 1964):589
8 Faddev L D, Popov V N. Phys. Letts., 1967, **B25**:29
9 Becchi C, Rouet A, Stora R. Ann. Phys., (N. Y) 1976, **98**:287
10 Kugo T, Vehara S. Nucl. Phys., 1982, **B197**:378
11 Henneaux M, Teclchlboim C. Quantization of Gauge Systems, Princeton University Press, Princeton, New Jersey. 1992
12 Kulshreshthaint U. Int. J. of Theor. Phys., 2000, **39** **N**(10):2489
13 Dirac P A M, (1964). Lectures on Quantum Mechanics, New York: Yeshiva University Press, 1950
14 Becchi C, Rouet A, Stora A. Phys. Letts., 1974, **B52**:344; Nemesschansky D, Preitschopf D, Weinstein M. Ann Phys (N.Y), 1988, **183**:226
15 Banerjee R, Mandal B P. Phys. Lett., 2000, **B488**:7
16 HUANG Y C et al. J. Nature, 2001, **4**:227(in Chinese)
(黄永畅等. 自然杂志, 2001, **4**:227)


## BRST Transformation Equivalence and Ward Identities of 1 + 1 Dimensional Non-linear σ Model

WANG Jing　HUANG Yong-Chang[1)]
(Department of Applied Physics, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China)

**Abstract** According to the Dirac constraint theory and the extended gauge condition, the gauge generators and the BRST transformation of (1 + 1) dimension $O(3)$ non-linear model under the new general condition have been deduced. A new general commutation relation of ghost field, the BRST charge from gauge generator is obtained and a kind of BRST quantization of the model is completed, on these bases, then the generating functionals of Green function, connecting Green function and proper vertex are also deduced and finally three kinds of Ward identities of this model are acquired.

**Key words** BRST quantization, Ward identity, constraint system, generating functional

Received 24 March 2003

1) Corresponding author