双环形振子的超对称性*

黄博文
(首都师范大学物理系 北京 100037)

摘要 研究了双环形振子(DRSO)的超对称性和形不变性,并得到了DRSO的能量本征值和能量本征函数.

关键词 超对称性 形不变性 超势

1 引言

由于球谐振子模型在原子核物理中得到广泛的应用,所以在研究原子核结构时该模型起着十分重要的作用.然而,实际问题往往要偏离球谐振子模型,这样研究一些可以严格求解的非球谐振子模型具有十分重要的意义.1988年,C.Quesne研究了环形振子的动力学不变量代数[1].在球坐标系下环形振子的势能表示为

$$V(r,\theta) = \frac{1}{4}\omega^2 r^2 + b \times \frac{\csc^2\theta}{r^2}. \qquad (1)$$

1989年,M.V.Carpio-Bernido等人采用费曼路径积分的方法讨论了环形振子和双环形振子(Double ring-shaped oscillator 简称为DRSO)[2,3].在球坐标系下DRSO的势能表示为

$$V(r,\theta) = \frac{1}{4}\omega^2 r^2 + b \times \frac{\csc^2\theta}{r^2} + c \times \frac{\sec^2\theta}{r^2}. \qquad (2)$$

最近,国内有许多物理工作者从各个方面讨论了环形振子的量子力学问题[4–6].我们认为下一步有必要讨论具有更加普遍意义的DRSO的量子力学问题.

另一方面,近些年来超李代数在量子力学中的应用引起许多物理工作者的兴趣[7–11],逐渐形成了一门新的学科——超对称量子力学.在讨论量子力学中的超对称性时,重要任务之一是寻找物理系统的超势,写出超势的数学表达式,从而得到该系统的"超荷".本文将讨论DRSO的超对称性和形不变性,给出DRSO的超势的数学表达式,最后得到DRSO的能量本征值和本征波函数.

2 在球坐标系下的分离变量薛定谔方程[12]

在球坐标系下的薛定谔方程为

$$-\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} + \mathrm{ctg}\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} = (E - V)\Psi. \qquad (3)$$

为了方便起见,取$2m = \hbar = 1$.当势具有如下形式时

$$V(r,\theta,\varphi) = V(r) + \frac{V(\theta)}{r^2} + \frac{V(\varphi)}{r^2\sin^2\theta}, \qquad (4)$$

相应的波函数形式取为

$$\Psi(r,\theta,\varphi) = \frac{R(r)}{r} \times \frac{H(\theta)}{(\sin\theta)^{1/2}} \times K(\varphi), \qquad (5)$$

于是,方程(3)式可分离成函数$K(\varphi)$,$H(\theta)$和$R(r)$分别满足的常微分方程

$$-\frac{d^2K}{d\varphi^2} + V(\varphi)K(\varphi) = m^2K(\varphi), \qquad (6a)$$

$$-\frac{d^2H}{d\theta^2} + \left[V(\theta) + \left(m^2 - \frac{1}{4}\right)\csc^2\theta\right]H(\theta) = l^2H(\theta), \qquad (6b)$$

$$-\frac{d^2R}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{l^2 - 1/4}{r^2}\right]R(r) \quad ER(r). \qquad (6c)$$

式中m^2和l^2为分离变量常数,只要上述3个方程具有超对称性和形不变性,就很容易求出能量本征

2003-01-03 收稿
* 北京市自然科学基金(1952004)资助

值和本征波函数．而 DRSO 恰好是这一类问题．

3 DRSO 的能量本征值和本征波函数

在球坐标系下，DRSO 的势能表达式为(2)式，其中 b,c 为正常数．从(2)式可以看出该式只与球坐标系的自变量 r,θ 有关，而与自变量 φ 无关．将(2)式与(4)式相比较得到

$$V(r) = \frac{1}{4}\omega^2 r^2, \tag{7a}$$

$$V(\theta) = b \times \csc^2\theta + c \times \sec^2\theta, \tag{7b}$$

$$V(\varphi) = 0. \tag{7c}$$

这样波函数可取(5)式的形式，其中 $K(\varphi)$，$H(\theta)$ 和 $R(r)$ 分别满足

$$-\frac{\mathrm{d}^2 K}{\mathrm{d}\varphi^2} = m^2 K(\varphi), \tag{8a}$$

$$-\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}\theta^2} + \left[\left(b + m^2 - \frac{1}{4}\right)\csc^2\theta + c \times \sec^2\theta\right]H(\theta) = l^2 H(\theta), \tag{8b}$$

$$-\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2} + \left[\frac{1}{4}\omega^2 r^2 + \frac{l^2 - 1/4}{r^2}\right]R(r) = ER(r). \tag{8c}$$

显然(8a)式的本征函数为

$$K_m(\varphi) = \exp(\mathrm{i}m\varphi). \tag{9}$$

而(8b)和(8c)式可根据量子力学中的超对称性和形不变性来确定它们的本征值和本征函数．

3.1 方程(8b)式的本征值和本征函数

求解(8b)式相当于求解哈密顿算子

$$\hat{H}(\theta) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2} + [c \times \sec^2\theta + (b + m^2 - 1/4)\csc^2\theta] \tag{10}$$

的本征值和本征函数问题．假设

$$(b + m^2)^{1/2} = \nu(m), \quad (1 + 4c)^{1/2} = 2\mu,$$
$$A = \frac{1}{2} + \mu, \qquad B = \frac{1}{2} + \nu(m), \tag{11}$$

那么(10)式改写为

$$\hat{H}(\theta) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2} + [A(A-1)\sec^2\theta + B(B-1)\csc^2\theta] = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2} + V(\theta), \tag{12}$$

其中 $V(\theta)$ 为 Poschl-Teller Ⅰ 型势．根据文献[12, 13]中的讨论，超对称伙伴势和超势之间的关系为

$$V_{\pm}(\theta, A, B) = W^2(\theta, A, B) \pm W'(\theta, A, B), \tag{13}$$

该系统的超势为

$$W(\theta, A, B) = A\mathrm{tg}\theta - B\mathrm{ctg}\theta, \tag{14}$$

超对称伙伴势分别为

$$V_-(\theta, A, B) = -(A + B)^2 + A(A - 1)\sec^2\theta + B(B - 1)\csc^2\theta, \tag{15a}$$

$$V_+(\theta, A, B) = -(A + B)^2 + A(A + 1)\sec^2\theta + B(B + 1)\csc^2\theta, \tag{15b}$$

$V_-(\theta,A,B)$ 和 $V_+(\theta,A,B)$ 之间满足形不变性关系

$$V_+(\theta, A, B) = V_-(\theta, A + 1, B + 1) + R(A + 1, B + 1), \tag{16}$$

其中

$$R(A + 1, B + 1) = [(A + 1) + (B + 1)]^2 - (A + B)^2. \tag{17}$$

为了得到哈密顿算子(12)式的本征值，可构造一个哈密顿算子级数

$$H^{(s)}(\theta, A + s, B + s) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2} + V_-(\theta, A + s, B + s) + \sum_{k=1}^{s} R(A + s, B + s) \quad (s = 1, 2, \cdots).$$

显然有

$$H^{(0)}(\theta, A, B) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2} + V_-(\theta, A, B), \tag{19a}$$

$$H^{(1)}(\theta, A + 1, B + 1) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2} + V_+(\theta, A, B), \tag{19b}$$

对于哈密顿量 $H^{(s+1)}(\theta, A+s+1, B+s+1)$ 有如下关系

$$H^{(s+1)}(\theta, A + s + 1, B + s + 1) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2} + V_-(\theta, A + s + 1, B + s + 1) + \sum_{k=1}^{s+1} R(A + k, B + k) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2} + V_+(\theta, A + s, B + s) + \sum_{k=1}^{s} R(A + k, B + k). \tag{20}$$

由(18)式和(20)式可以看出 $V_-(\theta, A+s+1, B+s+1)$ 和 $V_+(\theta, A+s, B+s)$ 是一对超对称伙伴势，满足形不变性关系

$$V_+(\theta, A + s, B + s) = V_-(\theta, A + s + 1, B + s + 1) + R(A + s + 1, B + s + 1), \tag{21}$$

其中

$$R(A+s+1,B+s+1)=$$
$$[(A+s+1)+(B+s+1)]^2-$$
$$[(A+s)+(B+s)]^2. \quad (22)$$

假设(18)式中的哈密顿量的最低一级的本征值为$E_0^{(s)}$,相应的本征函数为$\Psi_0^{(s)}(\theta,A+s,B+s)$,即

$$\left[-\frac{d^2}{d\theta^2}+V_-(\theta,A+s,B+s)+\sum_{k=1}^{s}R(A+s,B+s)\right]\Psi_0^{(s)}=E_0^{(s)}\Psi_0^{(s)}, \quad (23)$$

由于所讨论的情况是非破缺的超对称量子力学系统,所以应该有

$$\left[-\frac{d^2}{d\theta^2}+V_-(\theta,A+s,B+s)\right]\Psi_0^{(s)}=0. \quad (24)$$

对比(23)式和(24)式有

$$E_0^{(s)}=\sum_{k=1}^{s}R(A+k,B+k,), \quad (25)$$

再根据(22)式得到

$$E_0^{(s)}=(A+B+2s)^2-(A+B)^2, \quad (26)$$

由于超对称伙伴势本征值之间存在关系

$$E_n^{(+)}=E_{n+1}^{(-)}, \quad (27)$$

所以哈密顿量(19a)式的第s级本征值为

$$E_s^{(0)}=E_0^{(s)}=(A+B+2s)^2-(A+B)^2, \quad (28)$$

对比(12)式中的哈密顿算子和(19a)式中的哈密顿算子,可以看出,(12)式中的哈密顿算子的本征值为

$$E_s=(A+B+2s)^2, \quad (29)$$

从而可确定(8b)式中的本征值

$$l^2=(A+B+2s)^2, \quad (30)$$

再由(11)式

$$l=1+\mu+\nu+2s. \quad (31)$$

下面确定(8b)式中的本征函数,也就是哈密顿算子(12)式的本征函数. 由(8b),(12)和(29)式可得方程

$$\left[-\frac{d^2}{d\theta^2}+A(A-1)\sec^2\theta+B(B-1)\csc^2\theta\right]H(\theta)=(A+B+2s)^2H(\theta), \quad (32)$$

假设函数

$$H(\theta)=(2\sin^2\theta)^{B/2}(2\cos^2\theta)^{A/2}Y(\theta), \quad (33)$$

将(33)式代入(32)式得到$Y(\theta)$满足的方程

$$-\frac{d^2Y}{d\theta^2}-2\left[B\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-A\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]\frac{dY}{d\theta}+(A+B)^2Y$$
$$(A+B+2s)^2Y. \quad (34)$$

再进行变量代替,取

$$y=1-2\sin^2\theta, \quad (35)$$

方程(34)式简化为

$$(1-y^2)\frac{d^2Y}{dy^2}+\left[\left(A-\frac{1}{2}\right)-\left(B-\frac{1}{2}\right)-\left(A-\frac{1}{2}+B-\frac{1}{2}+2\right)y\right]\frac{dY}{dy}+s\left(s+A-\frac{1}{2}+B-\frac{1}{2}+1\right)Y=0. \quad (36)$$

该式为标准的Jacobi多项式所满足的微分方程,即$Y(y)$为Jacobi多项式. 综上所述,函数

$$H_s(\theta)=(1-y)^{B/2}(1+y)^{A/2}P_s^{B-1/2,A-1/2}(y). \quad (37)$$

3.2 方程(6c)式的本征值和本征函数[12]

(6c)式的求解,显然是求解哈密顿算子

$$\hat{H}(r)=-\frac{d^2}{dr^2}+\left[\frac{1}{4}\omega^2r^2+\frac{l^2-1/4}{r^2}\right] \quad (38)$$

的本征值和本征函数问题. 该情况的超势为

$$W(r)\quad\frac{1}{2}\omega r-\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{r}, \quad (39)$$

相应的伙伴势为

$$V_0(r)=\frac{1}{4}\omega^2r^2+\left(l-\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{r^2}-(l+1)\omega, \quad (40a)$$

$$V_1(r)=\frac{1}{4}\omega^2r^2+\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{3}{2}\right)\frac{1}{r^2}- \quad (40b)$$

显然它们是一对形不变势,满足形不变性关系

$$V_1(r,a_0)=V_0(r,a_1)+R(a_1), \quad (41)$$

其中 $a_0=l,a_1=a_0+1=l+1$. $R(a_1)=2\omega$.

为了求得(38)式的本征值,可构造哈密顿量级

$$H^{(s)}(r,a_s)=-\frac{d^2}{dr^2}+V_0(r,a_s)+\sum_{k=1}^{s}R(a_k),$$

其中$a_s=f\cdot f\cdot f\cdots f(a_0)$. f作用a_0 一共s次. 按照3.1小节中类似的讨论,取

$$H^{(s+1)}(r,a_{s+1})=-\frac{d^2}{dr^2}+V_0(r,a_{s+1})+\sum_{k=1}^{s+1}R(a_k)=-\frac{d^2}{dr^2}+V_1(r,a_s)+\sum_{k=1}^{s}R(a_k), \quad (43)$$

比较(42)式和(43)式看到,它们是一对超对称伙伴哈密顿量,满足形不变性关系

$$V_1(r,a_s)=V_0(r,a_{s+1})+R(a_{s+1}), \quad (44)$$

从而可确定最低一级的本征值为

$$E_0^{(s)} = \sum_{k=1}^{s} R(a_k) = 2s\omega . \tag{45}$$

再利用哈密顿量级数之间的关系,可确定哈密顿量

$$H^{(0)}(r, a_0) = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{4}\omega^2 r^2 + \left(l - \frac{1}{2}\right)\left(l + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{r^2} - (l+1)\omega \tag{46}$$

的本征值

$$E_n^{(0)} = 2n\omega . \tag{47}$$

对比(38)式和(46)式可见哈密顿算子(38)式的本征值为

$$E_n = (2n + 1 + l)\omega . \tag{48}$$

下面计算方程(8c)式中的函数 $R(r)$,取

$$R(r) = \left(\frac{1}{2}\omega r^2\right)^{\frac{l+1/2}{2}} \exp\left(-\frac{1}{4}\omega r^2\right) L(r), \tag{49}$$

代入(8c)式得到 $L(r)$满足的微分方程

$$\frac{d^2 L}{dr^2} + 2\left[\frac{l + 1/2}{r} - \frac{1}{2}\omega r\right]\frac{dL}{dr} + 2n\omega L(r) = 0. \tag{50}$$

进行变量代替,取 $z = \frac{1}{2}\omega r^2$,则方程(50)式简化为

$$z\frac{d^2 L}{dz^2} + [l + 1 - z]\frac{dL}{dz} + nL(r) = 0. \tag{51}$$

该式为标准的 Laguerre 多项式满足的微分方程,故

$$L(r) = L_n^l(z). \tag{52}$$

综上所述,函数

$$R(r) \quad z^{\frac{l+1/2}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}z\right) L_n^l(z). \tag{53}$$

综合上面计算的结果,将(31)式代入(48)式就得到 DRSO 的能量本征值

$$E_{nsm} = (2n + 2s + \nu + \mu + 2)\omega . \tag{54}$$

这一结果与文献[2]中的(18)式一致. 将(9)式,(37)式和(53)式代入(5)式就得到 DRSO 的非归一化的本征波函数

$$\Psi_{nsm}(r,\theta,\varphi) = z^{\frac{l-1/2}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}z\right) L_n^l(z)(1-y)^{\frac{B-1/2}{2}} (1+y)^{\frac{A}{2}} P_s^{B-1/2, A-1/2}(y) \exp(im\varphi). \tag{55}$$

4 结束语

在文献[2]中,M. V. Carpio-Bernido 等人采用柱坐标系下的费曼路径积分的方法讨论了 DRSO,而本文的特点是采用球坐标系下分离变量薛定谔方程和超对称量子力学的方法讨论了 DRSO. 并且建立了 DRSO 问题与 Poschl-Teller Ⅰ型势(第(12)式)和球谐振子势(第(35)式)之间的联系. DRSO 问题的非球谐振子性质主要体现在 θ 方向上的 Poschl-Teller Ⅰ型势. DRSO 的超对称性质主要体现在超势上,r 方向上的超势为(39)式,θ 方向上的超势为(14)式. DRSO 的能量本征值为(54)式,非归一化的本征波函数为(55)式,与文献[2]中的结果相比较可以看到,能量本征值完全一致. 以上所得到的结果将有助于讨论原子核结构等问题.

参考文献(References)

1 Quesne C. J.Phys., 1988, **A21**:3093

2 Carpio-Bernido M V, Bernido C C. Phys. Lett., 1989, **A134**:395

3 Carpio-Bernido M V, Bernido C C. Phys. Lett., 1989, **A137**:1

4 CHEN Chang-Yan. Acta Phys. Sin. 2002, **51**:468(in Chinese)
(陈昌远. 物理学报, 2002, **51**:468)

5 WANG De-Yun, HUANG Bo-Wen. High Ener. Phys. and Nucl. Phys., 1999, **23**:1078(in Chinese)
(王德云,黄博文. 高能物理与核物理,1999,**23**:1078)

6 QIAN S W, HUANG B W, GU Z Y. Commun. Theor. Phys., 2002, **38**:139

7 YANG Wei-Min, JING Si-Cong. Acta Phys. Sin. 2001, **50**:825(in Chinese)
(杨为民,井思聪. 物理学报,2001, **50**:825)

8 ZHANG De-Xing, CAI Shao-Hong. High Ener. Phys. and Nucl. Phys., 2002, **26**:895 (in Chinese)
(张德兴,蔡绍洪. 高能物理与核物理,2002,**26**:895)

9 HUANG Bo-Wen, WANG De-Yun. Acta Phys. Sin., 2002, **51**:1163 (in Chinese)
(黄博文,王德云. 物理学报,2002,**51**:1163)

10 HUANG Bo-Wen, WANG De-Yun. High Ener. Phys. and Nucl. Phys., 1997, **21**:757(in Chinese)
(黄博文,王德云. 高能物理与核物理,1997,**21**:757)

11 QIAN S W, HUANG B W, GU Z Y. New Journal of Physics, 2002, **4**:13.1—13.6

12 Cooper F, Khare A, Sukhatme U. Phys. Rep., 1995, **251**:267

13 Dutt R, Khare A, Sukhatme U. Am.J.Phys., 1988, **56**(2):163

Supersymmetry of a Double Ring-Shaped Oscillator*

HUANG Bo-Wen

(Department of Physics, Capital Normal University, Beijing 100037, China)

Abstract Supersymmetry and Shape invariance of Double ring-shaped oscillator (DRSO) is studied. The energy eigenvalues and eigenfunctions of DRSO are obtained.

Key words supersymmetry, shape invariance, superpotential

Received 3 March 2003

* Supported by Natural Science Foundation of Beijing(1952004)