第 27 卷 第 9 期
2003 年 9 月
高 能 物 理 与 核 物 理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS
Vol.27, No.9
Sep., 2003

二维 Dilaton 引力模型中的带电 Sine-Gordon 孤子解*

颜骏[1] 陶必友
1(西南交通大学物理研究所 成都 610031)
2(成都77信箱工学院 成都 610066)

摘要 获得了二维 dilaton 引力模型中的周期解,通过坐标变换证明了周期解和带电 sine-Gordon 孤子解的等价性.

关键词 二维 dilaton 引力模型 周期解 带电 sine-Gordon 孤子解

由于 Einstein 张量的平凡性,所以二维引力不同于四维时空中的引力理论,这时通常的 Einstein 方程不能应用于 $D=2$ 的时空. 为了避免这一困难,Mann 等人提出了一种具有辅助场的修正模型[1],并且获得了守恒的能量、动量、张量,这类模型已被应用于研究二维带电黑洞的各种物理性质[2,3].

众所周知,在平坦的二维时空中存在一种非线性标量场的作用模型,即 sine-Gordon 模型,这一模型中存在孤子解. 因此,人们自然希望研究二维引力和 sine-Gordon 物质场的相互影响. Shin 等人研究了 sine-Gordon 物质场作用下的黑洞解[4,5],同时,Stotzel 发现了不带电的 sine-Gordon 孤子解[6],在文献[7,8]中,通过引力耦合各种 sine-Gordon 标量势获得了一些裸奇点解. 由于采用 Stotzel 的方法很难直接获得带电孤子解,因此本文尝试一种新的思路来研究这一问题.

二维 dilaton 引力模型的作用量为[3]

$$S=\int \mathrm{d}^2 x\sqrt{-g}\left\{\frac{(\nabla\Psi)^2}{2}+\Psi R+2b(\nabla\Phi)^2\right.$$
$$\left.8\pi G\left[-f(\Phi)\Lambda+\frac{1}{4}h(\Phi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]\right\}. \qquad (1)$$

这里 Ψ 是辅助标量场,Φ 是 dilaton 场,$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ 是电磁场张量,h 和 f 是 Φ 的函数,G 是牛顿常数,b 是耦合常数,Λ 为宇宙常数.

作用量(1)式对应的二维场方程为

$$\nabla^2\Psi \quad R=0,$$
$$\frac{1}{2}\left[\nabla_\mu\Psi\nabla_\nu\Psi-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla\Psi)^2\right]+g_{\mu\nu}\nabla^2\Psi$$
$$\nabla_\mu\nabla_\nu\Psi=8\pi G T_{\mu\nu}, \qquad (3)$$
$$-4b\nabla^2\Phi+8\pi G\left(\Lambda\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\Phi}-\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\Phi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)=0, \qquad (4)$$
$$\nabla_\mu[h(\Phi)F^{\mu\nu}]=0. \qquad (5)$$

这里物质场的能量动量张量为

$$T_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Lambda f(\Phi)+\frac{1}{2}h(\Phi)\left(F_{\mu\tau}F_\nu^\tau-\frac{1}{4}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}g_{\mu\nu}\right)-$$
$$2b\left[\nabla_\mu\Phi\nabla_\nu\Phi-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla\Phi)^2\right].$$

选择如下静态度规

$$\mathrm{d}s^2=-\alpha(x)\mathrm{d}t^2+\alpha(x)^{-1}\mathrm{d}x^2$$

消除辅助标量场后,引力 - 物质系统方程约化为

$$\alpha''=-8\pi G\Lambda f(\Phi)+4\pi G\frac{Q^2}{h(\Phi)},$$
$$(\alpha\Phi')'=\frac{2\pi G}{b}\Lambda\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\Phi}+\frac{\pi G}{b}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Phi}\left(\frac{Q^2}{h(\Phi)}\right).$$

这里 $F_{\mu\nu}=\epsilon_{\mu\nu}\frac{Q}{h(\Phi)}$, $\alpha'=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}$, $\Phi'=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}$, Q 是电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 对应的荷. 设 $\frac{1}{h(\Phi)}=f(\Phi)$,则有

$$\alpha'' \quad 4\pi G(Q^2-2\Lambda)f(\Phi), \qquad (10)$$
$$(\alpha\Phi')' \quad \frac{\pi G}{b}(Q^2+2\Lambda)\frac{\mathrm{d}f(\Phi)}{\mathrm{d}\Phi}. \qquad (11)$$

2002 - 12 - 25 收稿
* 西南交通大学基础科学专项基金资助

由(10),(11)式推出

$$\alpha''' = \delta(\alpha\Phi')'\Phi' \tag{12}$$

其中

$$\delta = 4b\frac{(Q^2 - 2\Lambda)}{(Q^2 + 2\Lambda)}. \tag{13}$$

若设 $\Phi = x$,那么(12)式变成

$$\alpha''' = \delta\alpha' \tag{14}$$

经观察知上式的解为

$$\alpha \quad \sin^2(Mx), \tag{15}$$

这里参量 M 满足

$$M = \pm\sqrt{b\frac{2\Lambda - Q^2}{2\Lambda + Q^2}}. \tag{16}$$

式中 $Q^2 < 2\Lambda$, $b > 0$ 或 $Q^2 > 2\Lambda$, $b < 0$,所以求得的二维度规为

$$\mathrm{d}s^2 = -\sin^2(Mx)\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{\sin^2(Mx)}\mathrm{d}x^2. \tag{17}$$

分析上面的解可知,当 $Mx = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots, n\pi$ 时(这里 n 是整数),度规出现奇异性,奇点在 $x_c = \frac{n\pi}{M}$ 处,而时空曲率为 $R(x) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\alpha(x) = -2M^2\cos(2Mx)$,在奇点处曲率却是有限的. 即 x_c 是坐标奇点,而非真正的时空奇点,此解不描写黑洞. 为了消除这一坐标奇点,可作如下变换,

$$x = \frac{2}{M}\arctan \mathrm{e}^{Mr}. \tag{18}$$

此时

$$\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{e}^{Mr}}{1 + \mathrm{e}^{2Mr}}\mathrm{d}r = \frac{1}{\cosh(Mr)}\mathrm{d}r. \tag{19}$$

并且

$$\sin Mx = \sin(2\arctan \mathrm{e}^{Mr}) = \frac{1}{\cosh(Mr)}. \tag{20}$$

度规(17)式变为

$$\mathrm{d}s^2 = -\cosh^{-2}(Mr)\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2.$$

由 $\Phi = x$ 可得

$$\Phi = \frac{2}{M}\arctan \mathrm{e}^{Mr}. \tag{22}$$

这时 dilaton 场 Φ 是如下的静态 sine-Gordon 方程的解

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}r^2} = \frac{M}{2}\sin(2M\Phi). \tag{23}$$

度规(17)式对应曲率变为

$$R = -\frac{\mathrm{d}^2\alpha(x)}{\mathrm{d}x^2} = -2M^2\cos(4\arctan \mathrm{e}^{Mr}) = 2M^2\left(\frac{2}{\cosh^2 Mr} - 1\right). \tag{24}$$

所以度规(21)式和曲率(24)式在整个 r 轴上保持有限.

本文通过简洁的方法发现了一种带电的 sine-Gordon 孤子解. 首先获得了 dilaton 引力中的一种定态周期解,这种解的度规和曲率随空间位置变化而周期性振荡,振荡周期随参量 M 的增大而减小,这种解具有坐标奇点,经过一定的坐标变换,这类周期解等价于 sine-Gordon 孤子解. 由孤子场所感应的度规和曲率在整个空间有限,电磁场通过场荷 Q 而影响孤子解和时空的性质,研究这一孤子时空中粒子的运动性质将是令人感兴趣的问题.

参考文献(References)

1 Mann R, Morsink S, Sikkema A. Phys. Rev., 1991, **D43**:3948—3957

2 Mann R, Gen Rel Grav., 1992, **24**:433—449

3 Mann R, Phys. Rev., 1993, **D47**:4438—4442

4 Callan C et al. Phys. Rev., 1992, **D45**:R1005—R1009

5 Shin H, Soh K. Phys. Rev., 1995, **D52**:981—984

6 Stotzel B. Phys. Rev., 1995, **D52**:2192—2199

7 YAN J QIU X M. Gen Rel Grav., 1998, **30**:1319—1329

8 YAN Jun, WANG Shun-Jin, TAO Bi-You. Commun. Theor. Phys., 2001, **35**:19—21

A Electric Sine-Gordon Soliton Solution in Two-Dimensional Dilaton Gravity Model

YAN Jun[1]　TAO Bi-You[2]

1(Institute of Physics, Southwest Jiao-Tong University, Chengdu 610031, China)

2(Technology Institute of Box77, Chengdu 610066, China)

Abstract　A periodic solution in two-dimensional dilaton gravity model is obtained in this paper, the equivalence of periodic solution with electric sine-Gordon soliton solution is proved through coordinate transformation.

Key words　two-dimensional dilaton gravity model, periodic solution, electric sine-Gordon soliton solution

Received 25 December 2002

* Supported by Basic Science Foundation of Southwest Jiao-Tong University