

量子凝聚体的量子关联与微分散射 截面之间的关系*

张德兴

(贵州大学物理系 贵阳 550025)

摘要 研究量子系统的量子关联和导致量子关联形成的基本的动力学过程. 讨论凝聚的出现与非对角长程序的形成的相互联系. 讨论作为显示这样一个序的一个初级表示形式的单粒子密度矩阵. 并在最低阶导出直接和反转过程的散射截面的一个表示. 由此, 关于量子关联的重要信息能够直接地从这些过程的微分散射截面导出.

关键词 量子关联 凝聚 非对角长程序 密度矩阵

1 量子关联的意义

在量子理论研究中, 对于量子系统的量子关联研究和导致量子关联形成的基本动力学过程的探索是有重要意义的. 通常, 通过快速原子散射在一个限定的原子云中检测量子关联. 我们提出通过快速原子散射在一个限定过冷的原子云外的纯动量态中测量此原子云的单粒子密度矩阵. 产生有一个入射部分和它的时间反演对应部分的一对出射快速原子过程的最低阶的几率被证明是由密度矩阵傅里叶变换给出. 由此, 关于量子关联的重要信息能够直接地从这些过程的微分散射截面导出.

量子关联形成机理是一个很有意义和值得探讨的问题. 凝聚的出现与非对角长程序(ODLRO)的形成相联系. 显示这样一个序的初级表示形式是单粒子密度矩阵(OPDM): $\rho(x_1, x_2)$. 典型的距离能与原子内间距 r_s 相比较, 而在典型距离上这些关联是重要的. 结果, 这样明显关联的早期检测是很难通过具有通常为了检测原子云密度所采用的一个波长 $\lambda \gg r_s$ 的光而实施. 关于短程密度关联(在距离 $r < a$ 上)的情况能够从失调共振光的吸收得到. 在局域的 m -体密度关联($m!$ 效应)中的这个变化通过测量重新组合率能够观测到, 且实验上对于平衡情形已经做到. 然而, 成形非对角长程序(ODLRO)的相

关长度 r_c (远比 λ 小)的测量很难由这些方法得到. 因此, 希望有一个能够在易接近的距离上不受到基本限制而直接得到单粒子密度矩阵(OPDM)的方法^[1,2].

2 非对角长程序的形成

以一个密度矩阵 ρ 来考虑具有固定粒子数的多粒子系统. 由下式定义约化密度矩阵 ρ_1, ρ_2, \dots :

$$\text{sp} \rho = 1, \quad (1)$$

$$\langle j | \rho_1 | i \rangle = \text{sp} a_j \rho a_i^\dagger \quad (2)$$

$$\langle kl | \rho_2 | ij \rangle = \text{sp} a_k a_l \rho a_j^\dagger a_i^\dagger \quad \text{etc.},$$

式中 i, j, \dots 表示单粒子态, a_i, a_j 表示这些态的湮没算子. 这里, 考虑全同粒子的一个集合, 无论是费米子还是玻色子

在一个玻色子或费米子多体系统中, 存在坐标空间表示中的约化密度矩阵的一个非对角长程序(ODLRO)是可能的. 这样一个序的出现导致该系统新的热力学状态. 气体, 液体和固体的一般特征众所周知, 且在经典力学术语中是能够表述的. 特别是固体位相由一个长程相关性的存在所表征. 然而在固体中此长程相关性在量子力学中, 在坐标空间 ρ_2 的对角元中被显示出来且与非对角长程序完全不同. 因为非对角元没有经典类似, 所以非对角长

2002-06-21 收稿, 2002-11-13 收修改稿

* 贵州省科学基金(003066)资助

程序是在经典力学术语中不能够描述的量子现象。

在固体中程相关性是固体性质的几乎所有近似计算的基础。非对角长程序(ODLRO)在 ρ_n 中存在意味着它在约化密度矩阵 ρ_m ($m > n$) 中存在。ODLRO 出现的最小 n 值的情形给出 n 个粒子的集合, 此集合一定意义上形成一个基本群, 此群显示长程相关性。我们所考虑粒子系统可能是不同类型粒子(如核和电子)的一个集合。基本群必定由玻色子和偶数个费米子组成。ODLRO 现象因而基本上与玻色-爱因斯坦凝聚现象相关。或者, 更精确地说, 玻色-爱因斯坦凝聚是 ODLRO 的最简单形式。在固体中, 长程相关性的存在有必要引入附加宏观变量(也就是形变)以描述系统的热力学。应当认识到, 类似地, ODLRO 的出现使附加宏观变量引入成为必要。

由实际例子可知, ODLRO 可以在液体中出现, 它也可以在固体中出现。但是在固体中, 基本组合不能包含如核那样被局域化的粒子。^[3]

3 原子散射过程微分散射截面的导出

在 A. B. Kuklov 等人工作^[4]中, 提出了一个检测 OPDM 的方法, 此方法依赖于从原子云出来的相干原子散射。以中子和从液态氦出来的氦原子为散射对象的方法是一个常用方法。对于与在靶中原子的一个典型势能相比较, 有一个相对小的动能入射中子(或原子), 典型散射事件在汇合激发产生中出现。相反, 一个入射的快速中子(原子), 从液体中投射出一个几乎自由的快速原子。弱相互作用玻色气体对于快速原子几乎是完全能够穿透的, 只要由它们横越的原子云尺度比自由路程长度 $l = 1/na^2$ 更小。上式中 n 和 a 分别地表示密度和散射长度。

我们认为快速入射原子等同于原子云中的原子。一个携带动量 k 的快速原子能够把它的能量的主要部分传递给在原子云中的一个原子, 因而在末态有两个具有动量 k_1 和 k_2 的出射原子。这个过程量子力学几率在最低阶中结果与密度矩阵(OPDM)的傅里叶变换成正比, 称这个过程为直接过程。另有一个通过时间反演与直接过程相联系的过程。特别是两个携带各自动量 k_1 和 k_2 的快速入射原子进入原子云中并且实施由原子云中的原子所激发的散射, 因而在末态仅仅有一个具有动量 k 的快速原子。称这一过程为反转过程。

应考虑到存在另一原子散射过程, 此过程与光的弹性散射相类似。它的几率依赖于对 r_c 不灵敏

的原子云密度。在此情形中散射角是小的, 只要在云中密度改变在比 $1/k$ 更大得多尺度上出现。这个特征使区分这个过程与直接和反转的过程成为可能。

直接和反转过程散射截面的表示能够在最低阶相对于自旋极化的玻色子最简单情形两体相互作用被导出。基本要求是具有质量 m 的一个快速原子动能 $k^2/2m$ (我们采用原子单位, 因而 $\hbar = 1$) 比原子云中最密部分的每个粒子典型相互作用能大得多。此典型能量由化学势 $\mu \approx 4\pi an/m$ 给出。因此, 得到 $ka \gg \sqrt{8\pi na^3} \approx \xi^{1/2}$ 。换言之, 入射原子的德布罗意波长必须比原子云的恢复长度 $1/\sqrt{an}$ 更短。为了简化起见, 附加一个要求 $ka \ll 1$, 以保证 s 波散射近似是足够的。把这两个要求结合起来, 得到条件

$$\xi^{1/2} \ll ka \ll 1, \quad (3)$$

此条件有广泛有效范围, 只要气体参数 $\xi \ll 1$ 。

以通常的形式表示相互作用哈密顿量如下:

$$H_{im} = \frac{u_0}{2} \int dx \Psi'(x) \Psi'(x) \Psi(x) \Psi(x),$$

$$u_0 = \frac{4\pi a}{m}. \quad (4)$$

在条件(3)下, 快速原子的行为几乎像自由粒子一样, 并且它们与气体中其他部分的相互作用能够按照微扰来处理。因而, 能够把总的场 Ψ 分别分解为低能和高能部分, Ψ 和 Ψ' :

$$\Psi = \Psi + \Psi', \quad \Psi' = \sum_k a_k e^{ik \cdot x}, \quad (5)$$

式中入射态和散射态借助在单位体积上归一化平面波的描述; a_k 湮没具有动量 k 的高能粒子。(5)式代入(4)式并选择描述直接和反转过程项, 从而得到

$$H'_{im} = u_0 \sum_{k_1, k_2, k} a_{k_1}^+ a_{k_2}^+ a_k \Psi_q + \text{h.c.} \quad (6)$$

式中场 $\Psi(x)$ 的傅里叶分量 $\Psi_q = \int dx \exp(-iq \cdot x) \cdot \Psi(x)$ 被引入, 并且 $q = k_1 + k_2 - k$ 应当被作为从原子云传递到原子云的动量来解释。

首先考虑直接过程。在初态存在一个具有动量 k 的快速原子和由 N 个原子组成的原子云。在末态有两个具有动量 k_1, k_2 的快速原子和 $N-1$ 个原子组成的云。假定两个出射原子认为相等, 因而动量传递 q 和能量传递 $\omega = (k_1^2 + k_2^2 - k^2)/2m$ 两者均被测量。于是在最低阶上相对于 H'_{im} 的直接过程相应的二次微分散射截面由下列球规则公式给出:

$$W(q, \omega) = \frac{2mu_0^2}{k} \int \frac{dk_1}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \omega_{k_1}) \iint \times$$

$$d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)-i\omega t} \rho(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0). \quad (7)$$

这里 $\rho(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) = \langle \Psi^*(\mathbf{x}_1, t_1) \Psi(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle$;
 $\omega_{\beta} = [q^2/2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} + k_1^2 - (\mathbf{q} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}_1]/m$ 是末态和初态快速原子动能差, 式中第二个原子动量 \mathbf{k}_2 由关系式 $\mathbf{k}_2 = \mathbf{q} + \mathbf{k} - \mathbf{k}_1$ 确定.

在(7)式中 \mathbf{k}_1 的积分能精确计算. 如果 k 的值足够大, 由(7)式中相关函数 $\rho(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$ 选定的 q 和 ω 值满足条件 $q \ll k$ 和 $|\omega| \ll k^2/m$. 导致近似式 $\delta(\omega - \omega_{\beta}) \approx m\delta(k_1^2 - k \cdot \mathbf{k}_1)$ 成立. 且(7)式成为

$$W(\mathbf{q}, \omega) = 4a^2 \iint d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \int_{-\infty}^{\infty} \times dt e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)-i\omega t} \rho(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0). \quad (8)$$

$W(\mathbf{q}, \omega)$ 直接与动力学相关函数 $\rho(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0)$ 相关, 而此相关函数包括有相关系统的丰富信息.

限于单粒子密度矩阵 (OPDM) $\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \rho(\mathbf{x}_1, 0; \mathbf{x}_2, 0)$ 所描述的静止关联, 可借助于微分散射截面 $W(\mathbf{q}) = \int d\omega W(\mathbf{q}, \omega)$ 得到较简单的关系式:

$$W(\mathbf{q}) = 8\pi a^2 \iint d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)} \rho(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2). \quad (9)$$

这说明, 在单粒子密度矩阵(OPDM)和散射截面之间简单的对应是由于两粒子间相互作用散射长度的近似计算(见(4)式), 如果快速原子的动量比 $1/a$ 大, 那末一般没有简单的关系式.

现在考虑时间反转过程. 在这个情形中, 初态由具体动量 \mathbf{k}_1 和 \mathbf{k}_2 的两个粒子和在原子云中 N 个原子组成. 在末态有一个具有动量 \mathbf{k} 的快速原子和在原子云中的 $N+1$ 个原子. 考虑此过程被认为是物质波的四波混合. 也就是说, 瞄准原子云快速和相干原子的两个人射束可能产生第三(出射的)原子束. 在某一单位矢量 \mathbf{n} 的方向上, 每一单位立体角的强度 $J(\mathbf{n})$ 由球规则公式给出, 式中微扰为(6)式中第二项, 并且末态求和应当在 $\mathbf{k} = n\mathbf{k}$ 的绝对值上进行. 于是, 得到表达式:

$$J(\mathbf{n}) = \frac{8a^2 n_{k_1} n_{k_2}}{\pi m} \int d\omega k(\omega) \iint d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \int_{-\infty}^{\infty} \times dt e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)-i\omega t} \rho^{(r)}(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0), \quad (10)$$

式中 $\rho^{(r)}(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0) = \langle \Psi(\mathbf{x}_1, t) \Psi^*(\mathbf{x}_2, 0) \rangle$ 被引入; n_{k_1}, n_{k_2} 表示入射原子束的原子密度; 携带能量余量 ω 和动量余量 q 的出射原子动量 $\mathbf{k} = n\mathbf{k}(\omega)$ 由下式给出:

$$n\mathbf{k}(\omega) = \mathbf{q} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2,$$

$$k(\omega) = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + 2m\omega} \quad (11)$$

在凝聚态波函数 $\exp(-i\mu t) \Phi(\mathbf{x})$ 表征的一个纯粹玻色-爱因斯坦凝聚态情形中得到: $\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = \Phi^*(\mathbf{x}_1) \Phi(\mathbf{x}_2)$ 和 $\rho^{(r)}(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, 0) = \exp(-i\mu t) \cdot \rho(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$. 这产生

$$W(\mathbf{q}) = 8\pi a^2 |\Phi_{\mathbf{q}}|^2, J(\mathbf{n}) = 2n_{k_1} n_{k_2} \frac{k(\mu)}{\pi m} W(\mathbf{q}), \quad (12)$$

式中 $\Phi_{\mathbf{q}} = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x})$. 在对称中心线的势阱中, $\Phi(\mathbf{x})$ 由确定的宇称表征. 于是, $\Phi_{\mathbf{q}}$ 被取为实的. 在这个情形中, $\Phi(\mathbf{x})$ 能够从 $W(\mathbf{q})$ 得到^[5]

4 量子系统凝聚的检测

一个有意义的情形是轴向对称的量子涡旋. 一个携带旋量 $l = \pm 1, 2, 3 \dots$ 的涡旋的存在在轴向对称的凝聚中心极大地改变散射模式. 这时, $\Phi = \exp(i/\theta) \sqrt{n(r, z)}$, 式中 θ 是轴向角并且 $n(r, z)$ 表示作为分别垂直轴向和沿轴向距离 r, z 的一个函数的轴对称凝聚密度. 因此(12)式表明, 对于指向沿着涡旋线的 \mathbf{q} , $W(\mathbf{q}) = 0$. 只要存在 \mathbf{q} 的一个垂直轴的分量 q_{\perp} 或者涡旋从凝聚中心消失, 微分散射截面成为有限的. 此时, $q_{\perp} \rightarrow 0, W(\mathbf{q}) \sim q_{\perp}^{2l}$.

现在考虑通过所讨论的方法来测量在两个凝聚之间相对位相的问题. 在分裂的势阱内部, 玻色场被表达为^[6]

$$\psi = a_1 \psi_1(\mathbf{x}) + a_2 \psi_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (13)$$

式中 a_1 和 a_2 分别在凝聚数 1 和 2 中消灭一个原子: $\psi_1(\mathbf{x})$ 表示第一凝聚的单粒子态; 第二凝聚的单粒子态 $\psi_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, 是由 \mathbf{x}_0 从第一凝聚的位置上替换所得到的. 我们假定两个态没有空间重叠, 在(7)式中利用(13)式, 得到

$$W(\mathbf{q}) = 8\pi a^2 |\psi_{1\mathbf{q}}|^2 [\langle a_1^{\dagger} a_1 \rangle + \langle a_2^{\dagger} a_2 \rangle + (\langle a_1^{\dagger} a_0 \rangle e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}_0} + \text{h.c.})], \quad (14)$$

式中 $\psi_{1\mathbf{q}}$ 表示 $\psi_1(\mathbf{x})$ 的傅里叶变换. 平均值 $\langle a_1^{\dagger} a_1 \rangle = N_1$ 和 $\langle a_2^{\dagger} a_2 \rangle = N_2$ 表示在凝聚中原子的平均数 N_1, N_2 . 干涉效应由交叉项 $\langle a_1^{\dagger} a_2 \rangle$ 表示. 如果这两个凝聚是在相干迭加中, 那么被确切地定义的相对位相 φ 被引入, 因而 $\langle a_1^{\dagger} a_2 \rangle = \exp(i\varphi) \sqrt{N_1 N_2}$. 因此, 在 $N_1 = N_2 = N$ 的情形中(12)式成为

$$W(\mathbf{q}) = 2W_1(\mathbf{q}) [1 + \cos(\varphi - \mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_0)]. \quad (15)$$

这里 $w_1(\mathbf{q}) = 8\pi a^2 |\psi_{1\mathbf{q}}|^2 N$ 表示凝聚存在的情况下可能产生的分布. (15) 式表示在 (12) 式中 $W(\mathbf{q})$ 和 $J(\mathbf{n})$ 对于 φ 极具明显的依赖性.

在其中两个凝聚初始处于数字态 $|N_1, N_2\rangle$ 的情形中, 在测量前不存在相对位相. 这意味在 (14) 式中, 初始时刻 $\langle a_1^\dagger a_2 \rangle = 0$. 于是, 在散射和测量过程中, 相对位相应按照一般理解被建立^[6]. 为了描述位相构成的动力学, 关连子 $\langle a_1^\dagger a_2 \rangle$ 的展开应当被得到, 式中 $\langle \rangle$ 被理解为在某一定量的散射事件已经被检测到的条件下, 有条件的量子力学的平均值.

现在讨论对于原子检测器和原子源的普遍的要求. 目前, 所设想的惟一实际的检测方案是由 M. R. Andrews 所提出. 这个方法依赖于通过共振光来得到原子干涉条纹. 在此, 只要条件 (3) 式和 $r_c \gg n^{-1/3}$ 被满足, 在原子干涉条纹之间典型的角距离由 $\alpha \approx 1/r_c, k \ll 1$ 给出. 选择 $n = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$, $a = 3 \times 10^7 \text{ cm}$, 得到气体参数 $\xi = 3 \times 10^{-5}$. 于是, 按照 (3) 式,

$k = 2 \times 10^4 - 3 \times 10^6 \text{ cm}^{-1}$. 并且 $r_c \approx 10^{-3} \text{ cm}$. 角分辨率应当是 $\alpha \approx 5 \times 10^{-2} - 5 \times 10^{-4}$. 由势能改变 U 表征的阱状场的存在, 将通过产生动量不确定量 $\delta k \sim m|U|/k$ 使这些原子干涉条纹变形. 这导出极限 $\delta k < 1/r_c$ 或 $|U|/\mu < ka^2/(\xi r_c)$. 对于所选择的参数, 意味 $|U|/\mu \leq 1$. 原子的激光(快速和相干原子的一个源)必须有一个比 $1/r_c$ 小的人射动量的不确定量 Δk . 于是, $\Delta k/k = \alpha$.^[7-11]

我们已经提出一个在足够纯的动量态上, 从阱状原子云散射快速原子的方法. 此方法可以直接检测这个原子云的单粒子密度矩阵. 当一个人射快速原子产生二个快速原子时, 非弹性过程以及反转过程的微分散射截面确定后可以进行局域非对角长程序的测量. 这个方法能用来检测量子涡旋和超流态, 以及凝聚的量子耗散效应. 也能够测量分离凝聚的相对位相.

参考文献 (References)

- 1 Sokol P E. in Excitations in Two- Dimensional and Three- Dimensional Quantum Fluids, edited by Wyatt A F G, Lauter H J. New York: Plenum press, 1990
- 2 Fried D G et al. Phys. Rev. Lett., 1998, **81**: 3811
- 3 Yang C N. Rev. Mod. Phys., 1962, **34**: 694
- 4 Kuklov A B, Svistunov B V. Phys. Rev. 1999, **A60**: 769
- 5 Edwards D O et al. Phys. Rev. Lett., 1975, **34**: 1153
- 6 Parkins A S, Walls D F. Phys., 1998, **303**: 1
- 7 Stenger J et al. Phys. Rev. Lett., 1999, **82**: 2422
- 8 Forrey R C et al. Phys. Rev., 1999, **A59**: 2146
- 9 Inouye S et al. Nature (London), 1998, **392**: 151
- 10 Mewes M O et al. Phys. Rev. Lett., 1996, **77**: 416
- 11 Stenger J et al. Phys. Rev. Lett., 1999, **82**: 4569

The Relation between the Quantum Correlation of the Quantum Condensate Object and the Differential Scattering Cross Section *

ZHANG De-Xing

(Department of Physics, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

Abstract This paper studies quantum correlations of quantum systems and the basic dynamics process, which initiates the forming of quantum correlations. It discusses the mutual contact between the emergence of the condensate and the formation of off-diagonal long-range order. It discusses the one-particle density matrix as a primary object displaying such an order. And it derives an expression for the cross section of the direct and the reversed processes in the lowest order. Accordingly, important information about quantum correlations can be deduced directly from the differential scattering cross section of these processes.

Key words quantum correlation, condensate, off-diagonal long-range order, density matrix

Received 21 June 2002, Revised 13 November 2002

Supported by Guizhou Province Science Foundation (003066)