第 26 卷 第 8 期
2002 年 8 月

高 能 物 理 与 核 物 理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol.26, No.8
Aug., 2002

激发 $SU_q(1,1)$ 奇偶 q 相干态的压缩特性*

江俊勤[1)]
(广东教育学院物理系　广州　510303)
(中国高等科学技术中心(世界实验室)　北京　100080)

摘要　研究了激发奇 q 相干态 $a_q^{+m}|\alpha\rangle_q^o$ 和激发偶 q 相干态 $a_q^{+m}|\alpha\rangle_q^e$ 的压缩特性，数值计算了参数 q 和 m 对 q 压缩函数的影响. 结果表明：当 q 较小时，态 $a_q^{+m}|\alpha\rangle_q^o$ 和 $a_q^{+m}|\alpha\rangle_q^e$ 都能呈现出强烈的 q 压缩，而且随着 r^2 的增大，q 压缩函数出现振幅和周期都递增的振荡现象，其振幅随 q 的减小和 m 的增大而急剧增大，其周期随 q 的减小而增大，但与 m 无关.

关键词　量子代数　激发奇偶 q 相干态　压缩特性　q 压缩函数

1　引言

近年来，量子群和量子代数由于在原子核物理学和量子光学等许多领域中有着广泛的应用，而倍受关注[1]. 例如，在原子核物理学中，量子群理论的 q 变形转子模型可用于描述原子核转动谱[2,3]. 在量子光学中，自从 Biedenharn[4] 将具有李群结构的相干态推广到具有量子群结构的 q 相干态以来，q 相干态的统计性质和应用前景引起了人们的注意. Wang 和 Kuang[5] 在此基础上构造了具有重要意义的 $SU_q(1,1)$ 奇偶 q 相干态，它们的非经典特性得到了许多研究[6—10].

自 Agarwal 提出一种通过在相干态上重复作用光子产生算符产生新量子态的方法[11]以来，已有不少作者[12—18]研究了在其他的量子态上作用光子产生算符对态的性质的影响. 为了进一步认识变形参数 q 的物理意义，文献[19]通过在 $SU_q(1,1)$ 奇偶 q 相干态上重复作用光子产生算符，引入了激发 $SU_q(1,1)$ 奇偶 q 相干态，并用数值计算的方法对它们的平均光子数、亚泊松特性和反聚束效应进行了研究. 本文进一步研究激发 $SU_q(1,1)$ 奇偶 q 相干态的压缩特性，数值计算了参数 q 和 m 对 q 压缩函数的影响.

2001 - 12 - 11 收稿
* 广东省自然科学基金资助
1) E-mail: jjq203@21cn.com

2　激发 $SU_q(1,1)$奇偶 q 相干态

激发 $SU_q(1,1)$奇 q 相干态(用上标 o 表示)和激发偶 q 相干态(用上标 e 表示)定义为[19]

$$|\alpha,m\rangle_q^o = C_m^o a_q^{+m}|\alpha\rangle_q^o = C_m^o\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{[2n+1]_q!}}\sqrt{\frac{[2n+1+m]_q!}{[2n+1]_q!}}|2n+1+m\rangle_q, \tag{1}$$

$$|\alpha,m\rangle_q^e = C_m^e a_q^{+m}|\alpha\rangle_q^e = C_m^e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{[2n]_q!}}\sqrt{\frac{[2n+m]_q!}{[2n]_q!}}|2n+m\rangle_q, \tag{2}$$

式中 $\alpha = re^{i\theta}$(r 为压缩参量,θ 为相位角),a_q^+ 为 q 变形玻色产生算符,它与湮没算符 a_q 以及粒子数算符 N_q 满足如下对易关系:

$$a_q a_q^+ - q a_q^+ a_q = q^{-N_q}, \tag{3}$$

$$[N_q, a_q] = -a_q,\ [N_q, a_q^+] = a_q^+. \tag{4}$$

$[n]_q!$ 定义为

$$[n]_q! = [n]_q[n-1]_q\cdots[1]_q, \tag{5}$$

$$[n]_q = (q^n - q^{-n})/(q - q^{-1}). \tag{6}$$

由于$[n]_{1/q} = [n]_q$,所以只须考虑 $0<q\leqslant 1$.

为了保持奇偶性不变,取 $m = 2,4,6,\cdots$;当 $m = 0$ 时(1)和(2)式还原为奇偶 q 相干态. C_m^o 和 C_m^e 为归一化常数

$$(C_m^o)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(r^2)^{2n+1}}{[2n+1]_q!}\times\frac{[2n+1+m]_q!}{[2n+1]_q!},\ (C_m^e)^{-2}\ \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(r^2)^{2n}}{[2n]_q!}\times\frac{[2n+m]_q!}{[2n]_q!}.$$

3　激发 $SU_q(1,1)$奇偶 q 相干态的压缩特性

类似于普通单模电磁场压缩的定义,对于 q 电磁场可由 a_q^+ 和 a_q 定义两个算符[6]

$$X_1 = (a_q^+ + a_q)/2,\qquad X_2 = i(a_q^+ - a_q)/2.$$

由$[X_1, X_2] = \frac{i}{2}[a_q, a_q^+]$容易得如下的测不准关系:

$${}_q\langle(\Delta X_1)^2\rangle_q\ {}_q\langle(\Delta X_2)^2\rangle_q \geqslant \frac{1}{4}|{}_q\langle[X_1, X_2]\rangle_q|^2 = \frac{1}{16}|{}_q\langle[a_q, a_q^+]\rangle_q|^2.$$

如果

$$\Delta_k = {}_q\langle(\Delta X_k)^2\rangle_q - \frac{1}{4}|{}_q\langle[a_q, a_q^+]\rangle_q| < 0, \tag{10}$$

则称 X_k 分量($k = 1,2$)存在 q 压缩. Δ_k 称为 q 压缩函数.

对于态$|\alpha,m\rangle_q^e$ 和态$|\alpha,m\rangle_q^o$,有

$$\Delta_1^e = \frac{1}{4}\{{}_q^e\langle\alpha,m|(a_q^{+2} + a_q^2)|\alpha,m\rangle_q^e + {}_q^e\langle\alpha,m|a_q^+a_q|\alpha,m\rangle_q^e + {}_q^e\langle\alpha,m|a_q a_q^+|\alpha,m\rangle_q^e\} -$$

$$\frac{1}{4}\left|\,{}^{e}_{q}\langle\alpha,m|a_q a_q^+|\alpha,m\rangle_q^e - {}^{e}_{q}\langle\alpha,m|a_q^+ a_q|\alpha,m\rangle_q^e\right|, \tag{11a}$$

$$\Delta_1^o = \frac{1}{4}\{\,{}^{o}_{q}\langle\alpha,m|(a_q^{+2}+a_q^2)|\alpha,m\rangle_q^o + {}^{o}_{q}\langle\alpha,m|a_q^+ a_q|\alpha,m\rangle_q^o + {}^{o}_{q}\langle\alpha,m|a_q a_q^+|\alpha,m\rangle_q^o\} -$$

$$\frac{1}{4}\left|\,{}^{o}_{q}\langle\alpha,m|a_q a_q^+|\alpha,m\rangle_q^o - {}^{o}_{q}\langle\alpha,m|a_q^+ a_q|\alpha,m\rangle_q^o\right|, \tag{11b}$$

其中

$${}^{e}_{q}\langle\alpha,m|a_q^+ a_q|\alpha,m\rangle_q^e = (C_m^e)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{[2n]_q!}\times\frac{[2n+m]_q!}{[2n]_q!}\times[2n+m]_q, \tag{12a}$$

$${}^{o}_{q}\langle\alpha,m|a_q^+ a_q|\alpha,m\rangle_q^o = (C_m^o)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{[2n+1]_q!}\times\frac{[2n+1+m]_q!}{[2n+1]_q!}\times[2n+1+m]_q, \tag{12b}$$

$${}^{e}_{q}\langle\alpha,m|a_q a_q^+|\alpha,m\rangle_q^e = (C_m^e)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{[2n]_q!}\times\frac{[2n+m]_q!}{[2n]_q!}\times[2n+1+m]_q, \tag{13a}$$

$${}^{o}_{q}\langle\alpha,m|a_q a_q^+|\alpha,m\rangle_q^o = (C_m^o)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{[2n+1]_q!}\times\frac{[2n+1+m]_q!}{[2n+1]_q!}\times[2n+2+m]_q, \tag{13b}$$

$${}^{e}_{q}\langle\alpha,m|(a_q^{+2}+a_q^2)|\alpha,m\rangle_q^e =$$

$$2x\cos(2\theta)(C_m^e)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{[2n]_q!}\times\frac{[2n+m]_q!}{[2n]_q!}\times\frac{[2n+1+m]_q[2n+2+m]_q}{[2n+1]_q[2n+2]_q}, \tag{14a}$$

$${}^{o}_{q}\langle\alpha,m|(a_q^{+2}+a_q^2)|\alpha,m\rangle_q^o =$$

$$2x\cos(2\theta)(C_m^o)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{[2n+1]_q!}\times\frac{[2n+1+m]_q!}{[2n+1]_q!}\times\frac{[2n+2+m]_q[2n+3+m]_q}{[2n+2]_q[2n+3]_q}, \tag{14b}$$

其中 $x=r^2$. 当 $m=0$ 时,Δ_1^e 还原为$\frac{1}{2}r^2\{\cos(2\theta)+\tanh_q(r^2)\}$,$\Delta_1^o$ 还原为$\frac{1}{2}r^2\{\cos(2\theta)+\coth_q(r^2)\}$(如文献[6]所得). 当 $\theta=\pi/2$ 时,q 压缩最大.

当 $\theta=\pi/2, q=0.25, 0.5, m=0,2,4$ 时,Δ_1^e 和 Δ_1^o 随 $x(=r^2)$变化的规律如图1和图2所示.

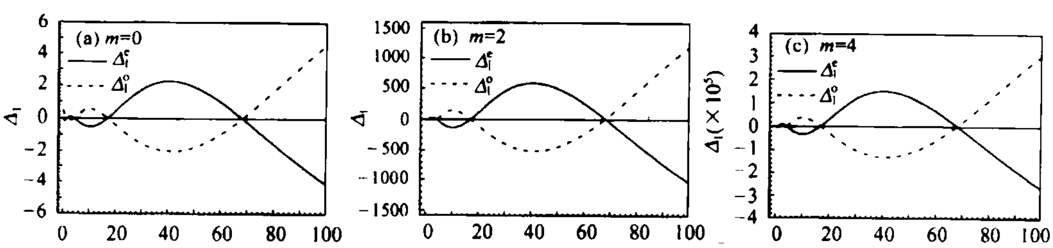

图1 当 $\theta=\pi/2, q=0.25$ 时,Δ_1^e 和 Δ_1^o 与 $x(=r^2)$的关系

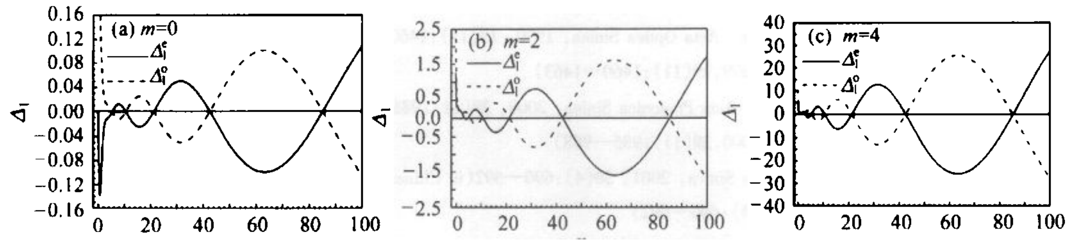

图 2　当 $\theta=\pi/2, q=0.5$ 时,Δ_1^e 和 Δ_1^o 与 $x(=r^2)$的关系

可见,对于较小的 q(如 $q=0.25$),态 $|\alpha,m\rangle_q^e$ 和 $|\alpha,m\rangle_q^o$ 都能呈现出强烈的压缩效应. 在 x 较大的区间,随着 x 的增大,q 压缩函数 Δ_1^e(和 Δ_1^o)出现振幅和周期都递增的振荡现象,其振幅随 q 的减小和 m 的增大而急剧增大、其周期随 q 的减小而增大但与 m 无关,而且 Δ_1^e 和 Δ_1^o 的值基本上是互补的.

此外,对于相同的 q,不同的 m,q 压缩函数的振动规律相似.

当 $\theta=\pi/2, q=0.8$ 和 $m=0,2,4$ 时,Δ_1^e 和 Δ_1^o 随 $x(=r^2)$变化规律如图 3,4 所示.

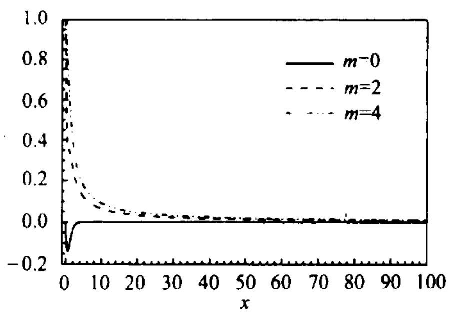

图 3　当 $\theta=\pi/2, q=0.8$ 时,
Δ_1^e 与 $x(=r^2)$的关系

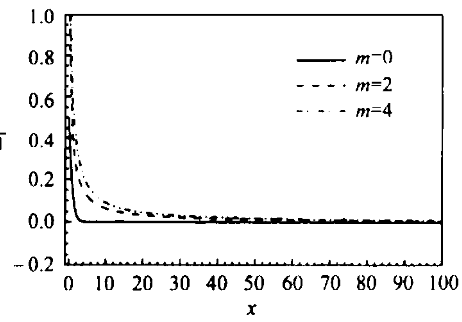

图 4　当 $\theta=\pi/2, q=0.8$ 时,
Δ_1^o 与 $x(=r^2)$的关系

由图 3 和图 4 可见,对于较大的 q(如 $q=0.8$),q 压缩函数 Δ_1^e(和 Δ_1^o)的振荡现象消失. 只有在 $m=0$ 且 x 较小时才出现 q 压缩, 而其他情况都不出现,这与文献[20]所讨论的普通激发奇偶相干态的压缩效应十分相似.

参考文献(References)

1 Haret C. Rosu, Carlos Castro. Phys. Lett., 2000, **A264**:350—356

2 Raychev P P, Roussev R P, Smimov Yu F. J. Phys. 1990, **G16**:L137;Iwao S. Prog. Thero. Phys., 1990, **83**:363

3 FANG Xiang-Zheng, RUAN Tu-Nan. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2001, **25**:212;2001,**25**:315(in Chinese)
(方向正,阮图南. 高能物理与核物理,2001,**25**:212;2001,**25**:315)

4 Biedenharn L C. J. Phys., 1989, **A22**(18):L873—878

5 WANG F B, KUANG L M. Phys. Lett., 1992, **A169**(4):225—228

6 KUANG L M, WANG F B. Phys. Lett., 1993, **A173**(3):221—227

7 ZHU Cong-Xu, WANG Fa-Bo, KUANG Le-Man. Acta Physica Sinica, 1994, **43**(8):1262—1267(in Chinese)

(朱从旭,王发伯,匡乐满. 物理学报,1994,**43**(8):1262—1267)
8 LIU You-Wen, CHEN Chang-Yuan. Acta Optica Sinica, 1999, **19**(11):1460—1463(in Chinese)
(刘友文,陈昌远. 光学学报,1999,**19**(11):1460—1463)
9 WANG Xiao-Chu, LIU You-Wen. Acta Photonica Sinica, 2000, **29**(11):985—988(in Chinese)
(王晓初,刘友文. 光子学报,2000,**29**(11):985—988)
10 WANG Zhong-Qing. Acta Physica Sinica, 2001, **50**(4):690—692(in Chinese)
(汪仲清. 物理学报, 2001,**50**(4):690—692)
11 Agarwal G S, Tara K. Phys. Rev., 1991, **A43**(1):492—497
12 ZHANG Z X, FAN H Y. Phys. Lett., 1992, **A165**:14—18
13 Jones G N, Haight J, Lee C T. Quantum and Semiclass Opt., 1997, **9**:411—418
14 ZHANG Z X, FAN H Y. Phys. Lett., 1993, **A174**(3):206—209
15 LU Hong, GUO Guang-Can. Acta Physica Sinica (Overseas Edition), 1999, **8**(8):577—582
16 LU Hong. Chin. Phys. Lett., 1999, **16**(9):646—647
17 HUANG Chun-Qing, LU Hong. Acta Photonica Sinica, 2000, **29**(6):481—486 (in Chinese)
(黄纯青,路洪. 光子学报,2000,**29**(6):481—486)
18 JIANG Jun-Qin, HUANG Chun-Qing, LU Hong. Acta Photonica Sinica, 2000, **29**(11):989—992 (in Chinese)
(江俊勤,黄纯青,路洪. 光子学报,2000,**29**(11):989—992)
19 JIANG Jun-Qin. High Energy Phys. and Nucl. Phys. 2002, **26**(4):331—337 (in Chinese)
(江俊勤. 高能物理与核物理,2002,**26**(4):331—337)
20 Dodonov V V, Korennoy Y A, Man'ko V I et al. Quantum and Semiclass Opt., **8**(1996):413—427

Squeezing Property of the States Generated by the Excitation on the $SU_q(1,1)$ Even and Odd q-Coherent States*

JIANG Jun-Qin[1]

(Department of Physics, Guangdong Institute of Education, Guangzhou 510303, China)

(CCAST (World Laboratory), Beijing 100080, China)

Abstract The squeezing property of states generated by the excitation on the $SU_q(1,1)$ even and odd q-coherent states ($a_q^{+m}|\alpha\rangle_q^e$ and $a_q^{+m}|\alpha\rangle_q^o$) is numerically studied. It is shown that for small q, the state $a_q^{+m}|\alpha\rangle_q^e$ and state $a_q^{+m}|\alpha\rangle_q^o$ can exhibit strong q-squeezing, and as r^2 increases the q-squeezing function $\Delta_1^e(\Delta_1^o)$ exhibits a wonderful oscillating phenomenon of increasing-amplitude and increasing-period. As m increases and q decreases, the amplitude of $\Delta_1^e(\Delta_1^o)$ increases greatly. As q decreases, the period of $\Delta_1^e(\Delta_1^o)$ increases but is independent of m.

Key words quantum algebra, excited even and odd q-coherent state, squeezing property, q-squeezing function

Received 11 December 2001

* Supported by Natural Science Foundation of Guangdong Provioce

1)E-mail: jjq203@21cn.com