

部分子关联函数的性质*

朱伟 李军 阮建红 薛迅

(华东师范大学物理系 上海 200062)

摘要 利用共线极限下的时序微扰理论将关联函数的切割法则推广到包含 a_s^2 (μ^2) 阶的微扰 QCD 修正, 并指出该法则的适用范围.

关键词 关联函数 时序微扰论 共线极限

1 引言

深度非弹散射的研究很大程度上依赖于因子化方法的应用^[1]. 例如, 扭度为 2 的散射振幅, 可以因子化为可作微扰计算的硬的部分和包括非微扰效应的靶部分. 后者可用部分子的分布函数来表示, 它由少数选定的实验来确定. 对于高扭度的振幅, 我们仍希望获得这一结果. 但是 S 矩阵元的么正性条件要求对同一过程的不同切割图求和, 这样同一过程的计算中会包括许多有不同切割的关联函数. 同分布函数一样, 我们至今无法从理论上完全确定关联函数, 所以它们原则上仍需要依靠有限的典型实验来确定. 如果不能发现这些关联函数之间的联系, 则会降低高扭度理论的预言能力.

Jaffe 首先讨论了朴素部分子模型中同一过程的不同关联函数间的关系^[2]. 一个有用的结果是在光锥坐标下, 当割线经过同一高扭度振幅的不同位置时, 所得到的各种关联函数有对 Bjorken 变量相类似的依赖关系. 该法则被广泛的用于高扭度理论的研究^[3]. 我们称之为关联函数的切割法则.

本文的目的是讨论当考虑了微扰 QCD 对关联函数的修正后, 上述切割法则的有效性. 尽管部分子关联函数本质上由非微扰理论支配, 但我们仍可在因子化点 $\mu^2 \sim 1 \text{ GeV}^2$ 附近运用微扰理论. 我们将采用在无限动量坐标系下的时序微扰理论 (TOPT). 众所周知, 时序微扰理论和费曼协变微扰理论是完全等价的^[4]. 一个费曼传播子在时序微扰理论中能分解为一个向前的传播子和一个向后的传播子. 在协变微扰理论中的传播子是在能壳上而非质壳上. 而在时序微扰理论下其分解成的向前传播子和向后传播子, 单独而言, 是在质壳上而非能壳上. 因为向前和向后传播子的相干效应将传播子从质壳回到离

2001 - 09 - 17 收稿

* 国家自然科学基金 (10075020, 90103013, 10135060) 资助

开质壳的状态,所以上述两种微扰论是等价的.如果向前传播子和向后传播子中某一个贡献能被忽略,那剩余的传播子可以被认为是质壳上的.时序微扰理论的这一特点对于讨论关联函数的切割法则尤其重要,我们在下面的讨论中将可以看到,切割线之所以可以在不同部位切割关联函数,条件是初态部分子间所有中间态均处于质壳上.

对于本文讨论的关联函数的切割性质而言,初态部分子的横动量的影响不是重要的,它们可以被忽略.相应的时序微扰理论必须取共线近似,一个相关的问题是如何处理无质量部分子过程的共线奇异性.类似的问题曾在高扭度振幅的硬子过程,即系数函数的研究中遇到过. Ellis, Furmanski 和 Petronzio (EFP) 在协变场论框架中用复杂的图形技巧从共线传播子中分离出有限的短程效应^[5]. 邱建伟发现一系列特殊传播子简化了上述图形技巧^[6]. 在文献[7]中证明了共线近似下的时序微扰理论是共线安全的,而且它给出与 EFP 和邱建伟相同的结果. 所以本文将采用文献[7]发展的共线时序微扰理论研究对关联函数的 QCD 修正. 为此在第二节对有关共线时序微扰理论作一简述. 尤其强调它所反映的传播子的时空性质. 对于关联函数切割法则的 QCD 修正,则在第三节中给出. 最后一节是总结部分.

2 共线近似下的时序微扰理论

本节简述在文献[7]中发展的共线近似下的时序微扰理论,将直接用于下一节讨论. 选择如下的无限动量坐标系,其中强子的动量沿光锥的正方向,即

$$p^+ = p^+ \bar{n}^+, \quad (1)$$

这里

$$\bar{n}^+ = (\bar{n}^0, \bar{n}_1, \bar{n}^3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0_\perp, 1); n^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0_\perp, -1), \quad (2)$$

因此, $\bar{n}^2 = 0, n^2 = 0, \bar{n} \cdot n = 1$. 由于要考虑 QCD 修正,我们选择光锥规范,即

$$A^+ = n \cdot A = 0. \quad (3)$$

在时序微扰理论中一个费曼传播子被分解为一个向前传播子和一个向后传播子. 例如,一个具有动量 k 的费米(夸克或反夸克)传播子对振幅贡献为

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} S(k) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k) (2\pi)^4 \delta^4(k - p'_1 - p'_2) = \\ & \int \frac{dk_0 d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^4} \frac{\gamma \cdot k}{k_0^2 - \omega^2 + i\epsilon} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k) (2\pi)^4 \delta^4(k - p'_1 - p'_2) = \\ & [S_B(k) + S_F(k)] (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \end{aligned} \quad (4)$$

其中 F 和 B 分别代表向前和向后的传播子. 费曼法则下的传播子是在能壳上而非质壳上,所以每个顶角保持能量守恒. 然而,时序微扰理论在复平面上对传播子的极点作柯西积分,将使传播子从能壳转到质壳. 因此,向前的传播子和向后的传播子都是在质壳上而非能壳上,并且,每个顶角上的能量守恒被一个总的能量守恒代替.

若取传播子横动量 $k_\perp = 0$,在光锥规范 $A^+ = 0$ 下,从时序微扰理论中获得如下结果^[7]:

对于夸克和反夸克:

$$S_B(k) = \frac{\gamma \cdot n}{2k \cdot n} \delta(k_0 + \omega), S_F(k) = \frac{\gamma \cdot \bar{n}}{2k \cdot \bar{n}} \delta(k_0 - \omega). \quad (5)$$

对于胶子:

$$G_B^{\alpha\beta}(k) = \frac{n^\alpha n^\beta}{(k \cdot n)^2} \delta(k_0 + \omega), G_F^{\alpha\beta}(k) = \frac{\delta_{\perp}^{\alpha\beta}}{2k \cdot \bar{n}(k \cdot n - k \cdot \bar{n})} \delta(k_0 - \omega). \quad (6)$$

其中 $\omega = k_z$, 可以看出向后传播的胶子是纵向极化的, 而向前传播的胶子是横向极化的. 当顶角是 FFF 型时, 动量 k 仅有 \bar{n} 方向分量, 从而 $k \cdot \bar{n} = 0$. 所幸的是, 这样的图形由于手征守恒条件而被禁止. 文献[7]进一步证明了一个向后传播的胶子仅和两个向前传播的部分子耦合, 而一个向前传播的胶子和一对沿相反方向传播的夸克和反夸克耦合. 这个选择法则表示在共线极限下非零贡献的 QCD 顶角只可能是 FFB 型耦合.

上述共线极限时序微扰理论形式下的传播子有很简单的时空特性. 为此对等式(5, 6)作傅里叶变换, 得到

$$\int \frac{d^4 k}{2\pi} S_F(k^-) \exp[ik \cdot (y_1 - y_2)] = S_F(y_1^+ - y_2^+) \delta(y_1^- - y_2^-) \delta^{(2)}(y_1^\perp - y_2^\perp), \quad (7)$$

$$\int \frac{d^4 k}{2\pi} S_B(k^+) \exp[ik \cdot (y_1 - y_2)] = S_B(y_1^- - y_2^-) \delta(y_1^+ - y_2^+) \delta^{(2)}(y_1^\perp - y_2^\perp),$$

和

$$\int \frac{d^4 k}{2\pi} G_B(k^+) \exp[ik \cdot (y_1 - y_2)] = G_B(y_1^- - y_2^-) \delta(y_1^+ - y_2^+) \delta^{(2)}(y_1^\perp - y_2^\perp), \quad (8)$$

上述共线近似下的向前传播子和向后传播子是分别和 y^+ 轴、 y^- 轴平行. 向前传播的胶子由于同时依赖 k^+ 和 k^- 分量没有这一性质, 但是在程函近似下它也和 y^+ 轴方向平行. 为此, 考虑一个软的向后传播的胶子共线地挂在一个快速移动的胶子上, (8)式结合三胶子顶角 $\Gamma_{\mu\nu}$ 的贡献为

$$\frac{d_{\perp}^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}}{k^- (p^+ + k^+) - (k^-)^2} \sim \frac{2d_{\perp}^{\mu\nu}}{k^-}, \quad (9)$$

它只与 k^- 有关, 从而是和 y^- 轴平行的. 我们将利用在时序微扰理论的框架下得到的这些性质, 讨论考虑 QCD 修正后的关联函数的切割法则.

3 关联函数的切割法则

考虑一个动量为 p^+ , 沿 \bar{n}^+ 方向运动的强子. 在朴素的部分子模型中, 没有与初态部分子耦合的规范场, 部分子分布函数定义为强子态下部分子算符的时序乘积平均值. 例如, 夸克分布函数是

$$f_{q^h}(x) = \frac{1}{4\pi} \int dy^- e^{-i\varphi^+ x^-} \langle p | T(\bar{\Psi}_b(0, y^-, 0_\perp) \gamma^+ \Psi_a(0, 0^-, 0_\perp) | p) \rangle_{y^+ = 0}, \quad (10)$$

这里 T 是时序算符, $y^- \neq 0$ 意味着等式(10)是双定域函数. 在时序算符的泰勒展开下, 等式(10)中两个部分子场间可能的联系只是一个费曼传播子图 1(b), 其中的虚线代表在质壳上的中间态. 在文献[2]论证中的一个关键点是, 在光锥上图 1(b)中有发散项, 为了使得(10)式收敛必须丢掉发散项. 结果是使得图 1(c)中所有的中间态是在质壳上.

我们可以在时序微扰理论中更好的来理解这一点. 事实上, 根据等式(5,6), 图 1(b) 中的传播子由于 $y^- \neq 0^-$, 在时序微扰理论下仅有向后的传播项. 因此, 传播的部分子是在质壳上的, 能被图 1(c) 中的虚线吸收.

类似的方法可以用于朴素部分子模型的多部分子关联函数上. 对于多胶子关联函数我们有相似的结论.

下面讨论 QCD 对关联函数的修正. 首先考虑图 2(a) 的例子, 其中有一个胶子传播子和两个邻近的初态夸克连接, 胶子传递动量为 k , 两个邻近的同方向高速移动的部分子间的交换动量相对而言总是很小的, 因此我们有 $k^- < k^+ \ll xx_1 p^+$.

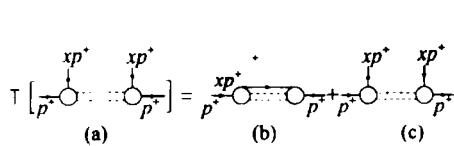


图 1 在朴素部分子模型近似中部分子分布函数定义的示意图(其中 T 是编时算符)

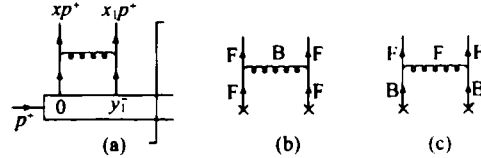


图 2 (a) 考虑 $QCD\alpha_s^2$ 修正的夸克关联函数; (b)和(c)QCD 关联部分的 TOPT 分解图 其中 F 和 B 分别为向前和向后的传播子

根据上面的讨论, 时序微扰图 2(b)和(c)对关联函数的贡献分别是

$$F_b \sim \frac{1}{(2k^-)^2} \cdot \frac{1}{(k^+)^2}, F_c \sim \frac{1}{(2xx_1 p^+)^2} \cdot \frac{1}{k^- k^+}. \quad (11)$$

因此, 图 2(c) 的贡献可以忽略. 这样, 剩余的有贡献的胶子传播子只是向后的传播子, 由于它处于质壳, 可以被切割.

现在考虑更加普遍的情况, 即有多个胶子耦合初态部分子, 如图 3 所示, 它们给出 QCD 的 $\alpha_s^n (\mu^2)$ 阶修正. 运用以上讨论的方法, 在图 3 中表示出对关联函数有贡献的向前传播子和向后传播子, 尤其是初态部分子间的所有关联的胶子传播子只有向后分量, 它们处于质壳上, 从而可以被切割. 一个有趣的结果是图 3 中的关联函数能进一步写成程函近似形式

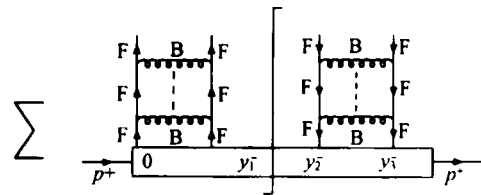


图 3 对四夸克关联函数的多胶子关联修正 (可以表示为沿 y^+ 方向的 Wilson 线)

$$C_{qq_1 q_2 q_3/h}(x, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi} \int dy_1^- dy_2^- dy_3^- e^{-i(x_1 p^+ y_1^- - x_2 p^+ y_2^- - x_3 p^+ y_3^-)} \langle p | \Psi_d(0^+, y_3^-, 0_-) \xi_3^+ \bar{\Psi}_c(0^+, y_2^-, 0_-) \xi_2^+ \gamma^+ \Psi_b(0^+, y_1^-, 0_-) \xi_1 \Psi_a(0^+, 0, 0_-) \xi | p \rangle_{i, \alpha, 0}, \quad (12)$$

其中:
$$\xi_i = P \exp \left[i g \int_{-\infty}^0 dy^- \bar{n} \cdot A_c(0, y^-, 0_\perp) t_q \right], \quad (13)$$

是 Wilson 线算符, A 是强子中规范场算符, t_q 是夸克颜色矩阵.

基于相同的物理考虑, 对于四胶子关联函数, 其定义为,

$$C_{gg_1 g_2 g_3/h}(x, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi} \int dy_1^- dy_2^- dy_3^- e^{-i(x_1 p^+ y_1^- - x_2 p^+ y_2^- - x_3 p^+ y_3^-)}.$$

$$\langle p | F_d^+(0^+, y_3^-, 0_\perp^+) \xi_3^+ F_c^+(0^+, y_2^-, 0_\perp^-) \xi_2^+ F_b(0^+, 0^-, 0_\perp^+) \xi_1 F_a(0^+, 0^-, 0_\perp^+) \xi | p \rangle_{t=0}, \quad (14)$$

其中 Wilson 线算符 ξ_i 除颜色矩阵 t_a 是胶子的外, 有和等式(14)相同的形式.

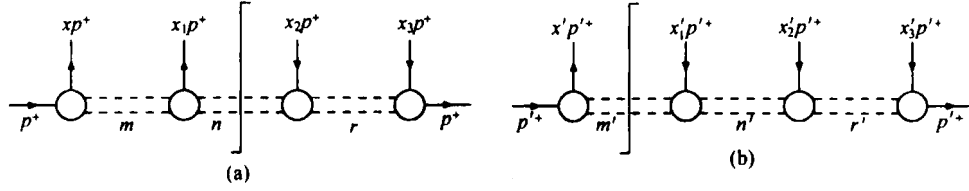


图 4 (a) 四部分子关联函数(其中割线经过第二和第三个部分子间的中间态);

(b)同(a),但割线经过第一和第二个部分子间的中间态

现在写出图 4(a)所示的四部分子关联函数,其中 Φ 为初态部分子场算符,利用中间态处于质壳的条件,在其中插入 3 个完备的中间态,并对 y_1^-, y_2^-, y_3^- 积分,可以得到

$$\begin{aligned} C_{p_1, p_2, p_3, h}(x, x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{4\pi} \int dy_1^- dy_2^- dy_3^- e^{i(x_1 p^+ y_1^- - x_2 p^+ y_2^- - x_3 p^+ y_3^-)} \cdot \\ &\sum_{n, m, r} \langle p | \Phi_d^+(0^+, y_3^-, 0_\perp^+) | n \rangle \langle n | \Phi_c^+(0^+, y_2^-, 0_\perp^-) | m \rangle \\ &\langle m | \Phi_b(0^+, y_1^-, 0_\perp^+) | r \rangle \langle r | \Phi_a(0^+, 0^-, 0_\perp^+) | p \rangle_{t=0} = \\ &2\pi^2 \sum_{n, m, r} \delta(p^+ - x_3 p^+ - p_n^+) \delta(p_n^+ - x_2 p^+ - p_m^+) \delta(p^+ - x_1 p^+ - p_r^+) \cdot \\ &\langle p | \Phi_d^+(0) | n \rangle \langle n | \Phi_c^+(0) | m \rangle \langle m | \Phi_b(0) | r \rangle \langle r | \Phi_a(0) | p \rangle, \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $x + x_1 = x_2 + x_3$.

因为所有的中间态部在质壳上,可以设想一个切割线的插入使得该切割线左边是产生部分子而右边是湮没部分子. 例如,图 4(b)的关联函数,为

$$\begin{aligned} C_{p'_1, p'_2, p'_3, h}(x', x'_1, x'_2, x'_3) &= \frac{1}{4\pi} \int dy_1^- dy_2^- dy_3^- e^{i(x'_1 p'^+ y_1^- - x'_2 p'^+ y_2^- - x'_3 p'^+ y_3^-)} \cdot \\ &\sum_{n', m', r'} \langle p' | \Phi_d^+(0^+, y_3^-, 0_\perp^+) | n' \rangle \langle n' | \Phi_c^+(0^+, y_2^-, 0_\perp^-) | m' \rangle \cdot \\ &\langle m' | \Phi_b(0^+, y_1^-, 0_\perp^+) | r' \rangle \langle r' | \Phi_a(0^+, 0^-, 0_\perp^+) | p' \rangle_{t=0} = \\ &2\pi^2 \sum_{n', m', r'} \delta(p'^+ - x'_3 p'^+ - p_{n'}^+) \delta(p_{n'}^+ - x'_2 p'^+ - p_{m'}^+) \delta(p'^+ - x'_1 p'^+ - p_{r'}^+) \cdot \\ &\langle p' | \Phi_d^+(0) | n' \rangle \langle n' | \Phi_c^+(0) | m' \rangle \langle m' | \Phi_b(0) | r' \rangle \langle r' | \Phi_a(0) | p' \rangle, \end{aligned} \quad (16)$$

其中要求 $x' = x'_1 + x'_2 + x'_3$, 可以看到除了 Bjorken 变量的取值范围不同, 等式(16)和等式(15)有相似的函数形式. 由此证明了 Jaffe 的切割法则.

4 讨论

在上一节的讨论中,我们均忽略了初态部分子的 S 道关联,它将两个初态胶子湮没为一个胶子,此类 QCD 修正图不可能被平行于 y^+ 轴的切割线切割,所以必须排除它们. 其条件是所有初态部分子的 y^- 坐标必须是分离的,即

$$y_n^- > y_{n-1}^- > \dots > y_1^- > 0, \tag{17}$$

上述条件是否被满足,取决于振幅中硬的子过程的结构.例如考虑以下对 QCD 演化方程的四扭度修正的一个图(图 5),它在文献[3]详细讨论过.其中阴影区为所有可能的 QCD 子过程.如果假定初态部分子具有相同的 x 分量,则阴影区的 S 道贡献消失.由于部分子横动量对于上述硬子过程不可忽略,所以阴影区中非共线的传播子将在 $\Delta y^+ \neq 0$ 的区域传播.从而使关联函数满足条件(17).

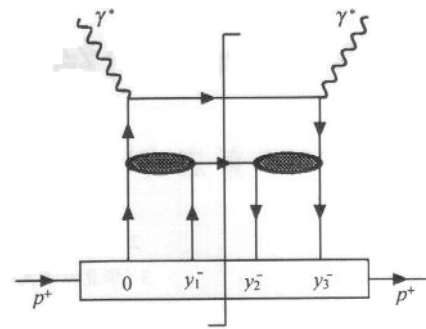


图 5 对 QCD 演化方程的一种扭度为 4 的修正

以上我们用共线近似下的时序微扰论对 Jaffe 的关联函数的切割法则在考虑到 QCD 修正后仍存在的条件进行了分析,给出了 Jaffe 的关联函数的切割法则在考虑到 QCD 修正后仍存在的条件是,它的初态部分子在光锥 y^- 坐标上相互分离.我们希望以上讨论有助于对于高扭度理论的理解,而且再次显示时序微扰理论对于揭示高能部分子过程的时空性质是有用的工具.

参考文献 (References)

- 1 Collins J C, Soper D E, Sterman G. In: *Perturbative Quantum Chromodynamics*, edited by A. H. Muller, Singapore: World Scientific, 1989, 1
- 2 Jaffe R L. *Phys. Lett.*, 1982, **1168**:437; *Nucl. Phys.*, 1983, **B229**:205
- 3 Gribov L V, Levin E M, Ryskin M G. *Phys. Rep.*, 1983, **100**:1; Muller A H, QIU J W. *Nucl. Phys.*, 1986, **B268**:427; ZHU W. *Nucl. Phys.*, 1999, **B551**:245
- 4 Sterman G. *An Introduction to Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1993; Brodsky S J, Lepage G P. *Phys. Rev.*, 1981, **D24**:1808; Brodsky S J, Huang T, Lepage G P. In: Capri A Z, Kamal A N ed. *Particles and Fields*. 1983, **V2**:143
- 5 Ellis P K, Furmanski W, Petronzio R. *Nucl. Phys.*, 1983, **B212**:29
- 6 QIU J W. *Phys. Rev.*, 1990, **D42**:30
ZHU W, XIONG H W, RUAN J H. *Phys. Rev.*, 1999, **D60**:094006

Properties of Parton Correlation Function *

ZHU Wei¹⁾ LI Jun RUAN Jian-Hong XUE Xun

(Department of Physics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract A cutting rule for the correlation functions of higher twist amplitudes, which is proposed on the naive parton level by Jaffe, is justified for its valid when considering QCD corrections. Using the collinear time ordered perturbation theory, we show that this cutting rule is held at any orders of $\alpha_s^n(\mu^2)$ provided all initial parton operators are separable on the light-cone direction y^- .

Key words correlation function, time ordered perturbative theory, collinear limit

Received 17 September 2001

* Supported by NSFC (10075020)