无限深阱势的非线性谱生成代数与新型相干态*

倪致祥[1)]
(阜阳师范学院物理系　阜阳　236032)
(徐州师范大学物理系　徐州　221009)

摘要　利用对称一维无限深阱势的哈密顿算符和自然算符构造出该势场的非线性谱生成代数,并在此基础上得到了一种新的非线性相干态.该相干态具有时间稳定性,既可以看成本征值为算符函数的降算符本征态,也可以看成广义极小测不准状态的转动态.

关键词　一维无限深阱势　非线性谱生成代数　相干态　时间稳定性

1　引言

对称一维无限深阱势是最简单的量子势场理论模型.由于它具有严格可解性,并且可以看成是幂势阱 $V=x^n$[1] 或对称 Pöschl-Teller 势[2] 的某种极限结果,成为人们检验量子力学中新理论、新概念和新方法理想场所.

近年来,非线性李代数引起了人们的高度重视和广泛兴趣[3].利用非线性李代数理论已成功地构造出一些重要量子势场的非线性谱生成代数[4—7].本文利用自然变量[8]得到了对称一维无限深阱势的一个非线性谱生成代数.将其化为正则形式后,与零根对应的基算符为哈密顿算符,与非零根对应的基算符为能量阶梯算符[2].利用非线性谱生成代数不仅可以简便求解量子系统的能量本征值和本征态,而且能够漂亮地处理该系统的其它相关问题.

从数学的角度看,普通相干态可以通过线性李代数(或者李群)来构造[9],最近 Junker 和 Roy 提出了以非线性李代数为基础来构造非线性相干态的问题[10].在对称一维无限深阱势的非线性谱生成代数的基础上,我们得到了一种新的非线性相干态.该相干态可以定义为本征值为算符函数的降算符本征态,也可以看成广义极小测不准状态的转动态更重要的是,它还能在时间的演化过程中保持原先的相干态性质,即具有时间稳定性[11]

2000-06-15 收稿
* 安徽省自然科学基金(99047217)和安徽省教委资助
1)华东理论物理研究所,上海 200237

2 一维无限深阱势的非线性谱生成代数

在量子力学中，对称一维无限深阱势是一种严格可解势，其形式为

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| < \frac{1}{2}a \\ \infty & |x| \geqslant \frac{1}{2}a \end{cases} . \tag{1}$$

按 Nieto 和 Simmons 的观点[8]，在该势阱中运动的粒子存在如下形式的自然坐标 X_c 和自然动量 P_c

$$X_c = A\sin\omega_c t, P_c = \mu\omega_c A\cos\omega_c t , \tag{2}$$

其中 ω_c，A 分别为自然角频率和振幅．由(2)式可得

$$\dot{X}_c = P_c/\mu, P_c = \mu\omega_c\sqrt{A^2 - X_c^2} . \tag{3}$$

而一维无限深阱势中运动的粒子的普通变量 x，p 所满足的运动方程为 $\dot{x} = p/\mu$，$p = \sqrt{2\mu E}$，其中 $E = p^2/(2\mu)$ 为势阱中运动的粒子的能量．于是可以得到关系式

$$\frac{\mathrm{d}X_c}{\mathrm{d}x} = \frac{P_c}{p} = \mu\omega_c\sqrt{\frac{A^2 - X_c^2}{2\mu E}} \tag{4}$$

由上式可以解出

$$\sin^{-1}\frac{X_c}{A} = \omega_c\sqrt{\frac{\mu}{2E}} \cdot x . \tag{5}$$

考虑到对一个速度为 v 的粒子，其运动周期为 $T = 2a/v = 2\pi/\omega_c$，能量为 $E = \frac{1}{2}\mu v^2$．于是可推出自然变量与普通变量之间的关系

$$X_c = \frac{1}{k}\sin(kx), P_c = p \cdot \cos(kx), \tag{6}$$

上式中 $k = \pi/a$，为了方便，这里取自然振幅 $A = 1/k$．对(6)式进行量子化后，就得到自然坐标算符 X 与自然动量算符 P 的表达式

$$X = \frac{1}{k}\sin(kx), P = \frac{1}{2}\left\{\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \cos(kx)\right\}, \tag{7}$$

上式中 $\{A, B\} = AB + BA$．而与系统能量对应的哈密顿算符为

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x) . \tag{8}$$

根据以上两式，不难得到如下对易关系：

$$\begin{aligned} &[H, X] = -(\mathrm{i}\hbar/\mu)P, \\ &[H, P] = 2\mathrm{i}\hbar k^2 X\left(H - \frac{1}{4}\varepsilon\right) + 2\varepsilon P, \\ &[X, P] = \mathrm{i}\hbar[1 - (kX)^2] , \end{aligned} \tag{9}$$

式中 $\varepsilon = \hbar^2 k^2/(2\mu)$．由此可见，自然算符 X，P 与哈密顿算符 H 生成了一个封闭的非线性李代数．可以验证它们之间满足如下约束方程

(10)

上述非线性李代数的性质可以通过其正则形式看出来. 显然在一个由哈密顿算符 H 生成的域 F 上,(9)式中的前两个对易式对自然算符 X 和 P 而言都是线性的,可以使用推广的嘉当分解方法[12]. 哈密顿算符 H 与零根相对应,而与非零根 λ 相对应的基算符 b 可由本征方程

$$ad(H)b = [H, b] = b\lambda \tag{11}$$

求出来. 由(9)和(11)两式不难看出基算符 b 可以用自然算符 X 和 P 线性表示,即

$$b \quad X \cdot C_1 + P \cdot C_2, \tag{12}$$

式中的组合系数 C_1 和 C_2 均在 F 域上. 将(12)式代入(11)式,并考虑到(9)式,可以解出两个根算符为

$$\lambda_{\pm} = \varepsilon \pm \sqrt{4\varepsilon H}, \tag{13}$$

与根 λ_- 对应的基算符为

$$b_- = \frac{1}{\hbar k}(X \cdot \mu\lambda_- / \hbar + \mathrm{i}P), \tag{14}$$

上式中系数的选取是为了让 b_- 成为无量纲算符. 设与根 λ_+ 对应的基算符为 b_+,将(13)代入(11)式可得

$$[H, b_{\pm}] = b_{\pm}(\varepsilon \pm \sqrt{4\varepsilon H}) \tag{15}$$

由(14)和(15)式可以证明

$$[H, (b_-)^+] = (b_-)^+ \lambda_+ . \tag{16}$$

可见 $(b_-)^+$ 也是对应于 λ_+ 的基算符. 为简单起见,取 $b_+ = (b_-)^+$. 容易验证

$$[H, b_+ b_-] = 0 . \tag{17}$$

这表明 $b_+ b_-$ 是哈密顿算符 H 的函数,即

$$b_+ b_- = h(H) \tag{18}$$

为了确定 $h(H)$ 的具体形式,设 $|E\rangle$ 为 H 的本征态,其本征值为 E. 利用(9)和(10)两式,可以推出

$$h(E) = \langle E | b_+ b_- | E \rangle = E/\varepsilon . \tag{19}$$

同样地可以得到

$$b_- \quad 1 + H/\varepsilon + \sqrt{4H/\varepsilon} \tag{20}$$

由此,b_+ 与 b_- 的对易关系为

$$[b_-, b_+] = 1 + \sqrt{4H/\varepsilon} \tag{21}$$

(15)和(21)两式构成了对称一维无限深阱势的非线性谱生成代数的正则形式.

3　能量本征值与本征态的递推公式和通项

设对称一维无限深阱势中粒子的能量本征值和对应的本征态分别为 E_n 和 $|n\rangle$, $n \in N$

(为了与习惯标记法一致,文中记基态为$|1\rangle$,对应的基态能量为 E_1). 由(15)式可以推出

$$Hb_\pm|n\rangle=(E_n+\epsilon\pm2\sqrt{\epsilon E_n})b_\pm|n\rangle.\tag{22}$$

这表明 b_+ 与 b_- 分别为能量的上升和下降算符. 从(22)式可以得出能量本征值谱的递推关系为

$$E_{n\pm1}=E_n+\epsilon\pm2\sqrt{\epsilon E_n}.\tag{23}$$

考虑到一维束缚态无简并,$b_\pm|n\rangle$一般应是哈密顿算符的本征态,即

$$b_\pm|n\rangle=C_\pm(n)|n\pm1\rangle,\tag{24}$$

(24)式给出了能量本征态的递推关系. 由于$|1\rangle$为基态,故应有截断条件 $b_-|1\rangle=0$. 在坐标表象中求解此方程,可以得到

$$\psi_1(x)=\langle x|1\rangle=C(\cos kx)^{\sqrt{E_1/\epsilon}},\tag{25}$$

其中 C 为归一化系数. 波函数的单值有界条件要求上式中的指数必须为自然数,于是可得基态能量 $E_1=\epsilon$. 将此结果代入(23)式,得到能谱的通项公式

$$E_n=\epsilon n^2,\tag{26}$$

这一结果与其它方法所得出的结果完全一样. 对(24)式两边同时取模,可求出比例系数为

$$\begin{aligned}|C_-(n)|^2&=h(E_n)=n^2\\|C_+(n)|^2&=h(E_n+\epsilon+2\sqrt{\epsilon E_n})=(n+1)^2.\end{aligned}\tag{27}$$

将上面的结果代入递推公式(24)式,得到能量本征态的通项公式

$$|n\rangle=\frac{b_+^{n-1}}{n!}|1\rangle.\tag{28}$$

上述结果说明了我们得到的确实是一个谱生成代数.

4 一维无限深阱势的非线性相干态

一般来说,可以通过下面3种方法来构造与一个物理势场对应的相干态[8],即可以把相干态定义为1) 基态在相空间中的平移态;2) 降算符的本征态;3) 极小测不准状态. 对于等间隔能谱的简谐振子势,这3种定义完全等价;而对于非等间隔能谱的其它势场,3种定义将得到不同的结果. 不仅如此,对于非等间隔能谱情况(例如本文所研究的对称一维无限深阱势),上面3种方法构造出来的相干态往往不具有时间稳定性,即在时间的演化过程中不能保持其初始的相干态结构[11]. 从物理的角度看,这不能说不是一个明显的缺陷.

在上节得到的非线性谱生成代数的基础上,我们发现可以给出一种构造具有时间稳定性的相干态的新方法. 一般来说,相干态是一个二参数态矢量,把它记为$|r,\varphi\rangle$. 从数学上看,把相干态定义为降算符的本征态是一种较简明的做法,即定义

$$b_-|r,\varphi\rangle=\beta(r,\varphi)|r,\varphi\rangle,\tag{29}$$

在简谐振子的情况下,有 $\beta(r,\varphi)=r\cdot\exp(\mathrm{i}\varphi)$. 根据第二节的分析,从非线性李代数的角

度，完全可以把相干态定义为降算符 b_- 在一个由哈密顿算符生成的算子域上的本征态．为了保持与简谐振子的对应关系，选择如下形式：

$$b_-|r,\varphi\rangle = r\exp[\mathrm{i}A(H)\varphi]|r,\varphi\rangle . \tag{30}$$

当算符函数 $A(H)$ 为恒等算符 I 时，上式回到了简谐振子情况．对本文研究的对称一维无限深阱势，利用本征函数的完备性，我们有展开式

$$|r,\varphi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} C_n|n\rangle \tag{31}$$

将上式代入(30)式，经过仔细的计算后可以得到

$$|r,\varphi\rangle = C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{n-1}\exp[\mathrm{i}\sigma(E_n)\varphi]}{n!}|n\rangle , \tag{32}$$

其中 $\sigma(E_n) = \sum_{i=1}^{n-1}A(E_i)$．借助算符函数，新相干态(32)又可以改写为

$$|r,\varphi\rangle = \exp[\mathrm{i}\sigma(H)\varphi]|r,0\rangle \tag{33}$$

时间稳定性要求相干态满足条件

$$U(t)|r,\varphi\rangle = |r,\varphi+\omega t\rangle , \tag{34}$$

其中 $U(t)=\exp(-\mathrm{i}Ht/\hbar)$ 为时间演化算符，具有幺正性．将(33)式代入到上式中，不难得到

$$\exp(-\mathrm{i}Ht/\hbar)\exp[\mathrm{i}\sigma(H)\varphi]|r,0\rangle = \exp[\mathrm{i}\sigma(H)(\varphi+\omega t)]|r,0\rangle \tag{35}$$

这个条件要求

$$\sigma(H) = -H/(\hbar\omega) , \tag{36}$$

于是新相干态成为

$$|r,\varphi\rangle = \exp(-\mathrm{i}H\varphi/\varepsilon)|r,0\rangle = C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{n-1}\exp(-\mathrm{i}n^2\varphi)}{n!}|n\rangle \tag{37}$$

其中已取特征频率为 $\omega=\varepsilon/\hbar$．而归一化系数 C 仅依赖参数 r，满足

$$C^2\cdot F(r^2) = 1, F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n!)^2} \tag{38}$$

由(37)式容易验证新相干态具有时间稳定性．借助(28)式，新相干态还可以表示为

$$|r,\varphi\rangle = \exp(-\mathrm{i}H\varphi/\varepsilon)\frac{F(rb_+)}{\sqrt{F(r^2)}}|1\rangle , \tag{39}$$

由此容易看出它对于参数有很强的连续依赖性．如果定义测度

$$\mathrm{d}\mu = \frac{2}{\pi}F(r^2)K_0(2r)r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \tag{40}$$

其中 $K_0(x)$ 为虚宗量贝塞尔函数[13]，可以验证下面的过完备性关系成立[14]

$$\iint|r,\varphi\rangle\langle r,\varphi|\mathrm{d}\mu = 1 \tag{41}$$

定义无量纲算符

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2}(b_- + b_+) = \frac{1}{4}\{kX,\lambda_+/\varepsilon\} \\ P_1 &= \frac{1}{2}(b_- - b_+) = \frac{1}{\hbar k}P - \frac{\mathrm{i}}{4}[kX,\lambda_+/\varepsilon] \end{aligned} \tag{42}$$

不难看出上面定义的算符其经典对应为无量纲化的自然变量. 利用(30)和(42)两式,容易验证$|r,0\rangle$是无量纲化的自然算符X_1,P_1的广义极小测不准状态,即满足下面的广义极小测不准关系:

$$\Delta X_1 \Delta P_1 = \frac{1}{2}\left|\langle r,0|[X_1,P_1]|r,0\rangle\right| . \tag{43}$$

考虑到(37)式,本文构造的新型相干态也可以认为是广义极小测不准状态的相空间转动态.

5 结论

通过本文的研究,得出如下主要结果:

(1) 对称一维无限深阱势中运动的粒子所对应的自然算符和哈密顿算符构成一个非线性谱生成代数;其正则形式中与零根对应的基算符为哈密顿算符,与非零根对应的基算符为能量阶梯算符,物理意义非常明显.

(2) 在非线性谱生成代数的基础上,可以引入一类新型非线性相干态. 这些相干态既可以看成对称一维无限深阱势中降算符的广义本征态,对应的本征值在由哈密顿生成的算子域中;又可以看成广义极小测不准状态的相空间转动态.

(3) 新型相干态除了具有相干态的基本性质:对参数的强连续性和过完备性,而且还具有时间稳定这个重要物理性质.

参考文献(References)

1 Bender C M, Boettcher S, Jones H F et al. J. Phys., 1999, **A32**: 6771

2 NI Zhi-Xiang. High Energy Physics and Nuclear Physics, 1999, **23**: 289(in Chinese)
(倪致祥. 高能物理与核物理, 1999, **23**: 289)

3 Beckers J, Brihaye Y, Debergh N. J. Phys., 1999, **A32**: 2791

4 NI Zhi-Xiang. Phys. Lett., 1997, **A235**: 313

5 CHEN Jing-Ling, LIU Yong, GE Mo-Lin. J. Phys., 1998, **A31**: 6473

6 Quesne C. J. Phys., 1999, **A32**: 6705

7 NI Zhi-Xiang. Acta Physica Sinica, 1999, **8**: 8

8 Nieto M M, Jr Simmons L M. Phys. Rev., 1979, **D20**: 1321

9 Perelomow A. Generalized Coherent States and Their Applications. Springer-Verlag, Berlin: 1986

10 Junker G, ROY P. Phys. Lett., 1999, **A257**: 113

11 Klauder J R. J. Phys., 1996, **A29**: L293

12 HAN Qi-Zhi, SUN Hong-Zhou. Group Theory. Beijing University, 1987, 225(in Chinese)
(韩其智, 孙洪洲. 群 论. 北京大学出版社, 1987. 225)

13 WANG Zhu-Xi, GUO Dun-Ren. An Introduction to Special Functions, Beijing: Science Press, 1979. 412(in Chinese)
(王竹溪 郭敦仁. 特殊函数概论, 北京: 科学出版社, 1979. 412)

14 NI Zhi-Xiang. Acta Physica Sinica, 1998, **7**: 183

Nonlinear Spectrum and Generating Algebra for Infinitely Deep Square Well Potential and New Coherent State*

NI Zhi-Xiang[1)]

(*Department of Physics, Fuyang Teachers College, Fuyang* 236032, *China*)
(*Department of Physics, Xuzhou Normal University, Xuzhou* 221009, *China*)

Abstract Using the Hamiltonian of symmetrical one-dimersional infinitely deep square well potential and natural operators, we obtain its nonlinear spectrum and generating algebra, and get a class of new nonlinear coherent states on the basis of the nonlinear algebra obfained. These coherent states are of temporal stability, and can be regarded as the eigenstates of the lower operator with the eigenvalues in an operator field and as the rotational states of the generalized minimal uncertainly states as well.

Key words one-dimensional infinitely deep square well potential, nonlinear spectrum-generating algebra, coherent states, temporal stability.

Received 15 June 2000

* Supported by Science Foundation of Anhui Province(99047217) and Anhui Education Commission

1) East China Institute for Theoretical Physics, Shanghai 200237, China