

黎曼面上的温度对偶性与亏格数 $g=1$ 和 2 的弦宇宙学解*

颜 骏¹ 陶必友² 王顺金¹

1(西南交通大学现代物理研究所 成都 610031)

2(成都 77 信箱工学院 成都 610066)

摘要 考察了一个在引力场 $g_{\mu\nu}$ 和 dilaton 场背景下的有限温度玻色弦模型, 导出了高亏格黎曼面上能量动量张量满足的对偶关系式; 同时, 还在四维 Robertson-Walker(R-W) 度规下证明了弦气体物质作用量的温度对偶不变性, 获得了亏格数 $g=1$ 和 2 的弦宇宙学解, 并研究了运动方程的温度变换性质。

关键词 黎曼面 温度对偶性 弦宇宙学解

1 引言

近年来, 对偶(Duality)对称作为一种基本的物理对称性引起了人们广泛的兴趣和关注^[1], 这种对称性已经在诸多的物理模型中得到了研究, 例如超对称 QCD 模型^[2,3]、弦模型^[4-6]、共形场论^[7,8]、黑洞与宇宙学模型^[9-11]。在这些模型中通常存在两种基本的对偶性, 即 T 对偶性与 S 对偶性, T 对偶性可看作是环面紧致化中 $R \rightarrow 1/R$ 对偶性的推广, 而 S 对偶性则是将 QED 中的电磁对偶性扩充成 $SL(2, Z)$ 对称性^[12,13]。在弦微扰论中还存在着一种精确的对偶性, 即温度对偶性(或 β 对偶性), 弦的高圈自由能在 $\beta \rightarrow 1/\beta$ 变换时满足对偶关系式^[14]。由于这种对偶性和黎曼面上周期矩阵的模变换 $\Omega \rightarrow 1/\Omega$ 相联系, 因此类似于通常的 T 对偶变换。本文目的在于研究有限温度下超弦低能模型中的这种对偶性, 并在亏格数 $g=1$ 和 2 的情况下分析了 β 对偶性和弦运动方程中存在的宇宙解的关系。

2 亏格 g 黎曼面上能量动量张量的对偶性质

假定玻色弦气体物质与引力场和 dilaton 场具有相互作用, 那么用 σ 模型微扰论描述的运动方程为^[15]

1998-05-20收稿 1998-11-20收修改稿

* 国家教委博士点基金资助

$$\beta_{\mu\nu}^g = R_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \phi = \frac{e^{2\phi}}{2\pi\beta V_d} \sum_{g \geq 1} \langle \partial X_\mu \bar{\partial} X_\nu \rangle_g, \quad (2.1)$$

$$\beta^\phi = R - 4(\nabla\phi)^2 + 2\nabla^2\phi = \frac{e^{2\phi}}{8\pi\beta V_d} \sum_{g \geq 1} \langle R^{(2)} \rangle_g, \quad (2.2)$$

式中, 单圈 β 函数 $\beta_{\mu\nu}^g, \beta^\phi$ 都是引力场 $g_{\mu\nu}$ 和 dilaton 场 ϕ 的函数, $R_{\mu\nu}, R$ 是时空张量和曲率标量, β 和 V_d 分别是温度和体积因子, g 代表亏格数, X_μ 是弦坐标, $R^{(2)}$ 是二维世界面的曲率. 热真空期待值 $\langle \rangle$ 可以根据弦在 $S^1 \otimes R^d \otimes M_{\text{compact}}$ 流形上运动的欧氏路径积分计算, $\beta = 1/T$ 对应于紧致化欧氏时间的周期, 紧致化后的绕数态可以由亏格 g 黎曼面上二个矢量 $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbf{Z}^g$ 描述^[16]. 有限温度玻色弦的配分函数可表示为

$$Z_g(\beta) = Z_g^{\text{cl}}(\beta) \cdot Z_g^{\text{qu}}(\beta), \quad (2.3)$$

这里,

$$Z_g^{\text{cl}}(\beta) = V_d \beta \exp \left[-\frac{\beta^2}{2\pi} (\Omega \mathbf{n} - m) \frac{1}{\text{Im}\Omega} (\bar{\Omega} \mathbf{n} - m) \right] \quad (2.4)$$

表示经典配分函数, $Z_g^{\text{qu}}(\beta)$ 则表示经典解周围的量子起伏配分函数, Ω 是亏格 g 黎曼面上的 $g \times g$ 阶周期矩阵, 模型中的热自由能定义为

$$F(\beta) = \frac{\beta}{2\pi} Z(\beta). \quad (2.5)$$

根据对蝌蚪图(tadpoles)的计算, 热真空期待值 $\langle \rangle$ 可由配分函数表示成^[15]

$$\langle R^{(2)} \rangle_g = 4\pi(2-2g) \exp[(2-2g)\phi] Z_g(\beta), \quad (2.6)$$

$$\langle \partial X_i \bar{\partial} X_j \rangle_g = -\pi g \exp[(2-2g)\phi] Z_g(\beta), \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \langle \partial_0 X_0 \bar{\partial}_0 X_0 \rangle_g &= \langle \partial_0 X_0^{\text{cl}} \bar{\partial}_0 X_0^{\text{cl}} \rangle_g + \langle \partial_0 X_0^{\text{qu}} \bar{\partial}_0 X_0^{\text{qu}} \rangle_g = \\ &= - \left(\pi g Z_g(\beta) + \pi \beta^2 \frac{\partial F_g(\beta)}{\partial \beta} \right) \exp[(2-2g)\phi]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

将上述公式(2.6)至(2.8)代入单圈函数的表达式(2.1), (2.2)中, 可导出背景场方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \phi + 2g_{\mu\nu} [(\nabla\phi)^2 - \nabla^2\phi] = \sum_g \frac{1}{2} \exp(2g\phi) t_{\mu\nu}(\beta), \quad (2.9)$$

$$R - 4(\nabla\phi)^2 + 4\nabla^2\phi = - \sum_g (g-1) \exp(2g\phi) f_g(\beta), \quad (2.10)$$

式中

$$t_{\mu\nu}(\beta) = \text{diag}[\rho_g(\beta), p_g(\beta), \dots, p_g(\beta)] \quad (2.11)$$

可看成是一种理想流体的能量动量张量. 这里, $f_g(\beta) = F_g(\beta)/V_d$ 是单位体积自由能, 物质密度 $\rho_g(\beta)$ 和压力 $p_g(\beta)$ 分别由下面的公式定义

$$\begin{cases} \rho_g(\beta) = f_g(\beta) + \beta \frac{\partial f_g(\beta)}{\partial \beta}, \\ p_g(\beta) = -f_g(\beta). \end{cases} \quad (2.12)$$

2.1 能量动量张量满足的温度对偶性

根据(2.4)和(2.5)式, 如果仅对自由能的经典解感兴趣, 那么采用黎曼面上 θ 函数的模变换性质不难导出 $f_g(\beta)$ 满足的对偶关系式^[17]

$$f_g(\beta) = \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{2g-2} f_g\left(\frac{4\pi^2}{\beta^2}\right), \quad (2.13)$$

这里应该注意 $\beta = 2\pi$ 是自由能的一个自对偶点. 再根据单位体积比热的定义

$$c_g(\beta) = -\beta^2 \frac{\partial f_g(\beta)}{\partial \beta}, \quad (2.14)$$

将(2.13)式代入(2.14)式, 经过详细的推算后得到

$$c_g(\beta) + \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{2(g-2)} \cdot c_g\left(\frac{4\pi^2}{\beta^2}\right) = 2(g-1)\beta f_g(\beta). \quad (2.15)$$

这类似于前面工作中导出的比热所满足的模对偶关系式^[17]. 由公式(2.12)可得到

$$\rho_g(\beta) + p_g(\beta) = -\frac{1}{\beta} c_g(\beta), \quad (2.16)$$

将(2.15)式代入(2.16)式后化简得

$$[\rho_g(\beta) + p_g(\beta)] + \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{2(g-2)} \left[\rho_g\left(\frac{4\pi^2}{\beta^2}\right) + p_g\left(\frac{4\pi^2}{\beta^2}\right) \right] = 2(g-1)p_g(\beta). \quad (2.17)$$

这就是黎曼面上能量动量张量分别满足的温度对偶关系式.

必须指出的是, 背景场运动方程(2.9)和(2.10)式还可用等效作用量变分得到

$$S_{\text{eff}} = \int d^{d+1}x \sqrt{-g} \left\{ \exp(-2\phi) [R + 4(\nabla\phi)^2] - \sum_g \exp[(2-2g)\phi] f_g(\sqrt{-g_{00}}\beta) \right\}, \quad (2.18)$$

式中, d 是空间维数, g_{00} 是度规的时间分量. 另外, 上式中的第二项可认为是玻色弦气体物质在弯曲时空中的等效作用量, 它决定了能量动量张量的具体形式.

2.2 玻色弦气体物质项的温度对偶性

当 $d = 3$ 时, 时空度规选取四维 R-W 度规

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}[-1, a^2(t), a^2(t), a^2(t)], \quad (2.19)$$

即 $g_{00} = -1$, $a(t)$ 是三维空间的标度因子, 于是(2.18)式中的物质项可以表示成

$$S_m(\phi, \beta) = \sum_g \exp[(2g-2)\phi] f_g(\beta), \quad (2.20)$$

将 $f_g(\beta)$ 满足的温度对偶关系式 (2.13) 代入 (2.20) 式得

$$S_m\left(\phi, \frac{4\pi^2}{\beta}\right) = \sum_g \exp[(2g-2)\phi] \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{-(2g-2)} f_g(\beta), \quad (2.21)$$

这时再对 dilaton 场 ϕ 作平移变换 $\phi \rightarrow \phi - \ln \frac{\beta}{2\pi}$, 那么有

$$S_m\left(\phi - \ln \frac{\beta}{2\pi}, \frac{4\pi^2}{\beta}\right) = \sum_g \exp[(2g-2)\phi] f_g(\beta) = S_m(\phi, \beta). \quad (2.22)$$

这表明弦气体物质作用量在温度对偶变换和 dilaton 场平移变换下保持不变。

3 亏格数 $g = 1$ 时具有量子修正的弦宇宙学解

为了获得适当的弦宇宙学解, 可先定义单位体积自由能 f , 密度 ρ 和压力 p :

$$f = \sum_g (g-1) \exp(2g\phi) f_g(\beta), \quad (3.1)$$

$$\rho = \sum_g \exp(2g\phi) \rho_g(\beta), \quad (3.2)$$

$$p = \sum_g \exp(2g\phi) p_g(\beta). \quad (3.3)$$

所以在四维 R-W 度规 (2.19) 式下可将背景场方程 (2.9) 和 (2.10) 写成运动方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) = -3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2\dot{\phi} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) + \frac{1}{2} (p - f), \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{dt} (\dot{\phi}) = (\dot{\phi})^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{1}{4} (3p - 2f) \quad (3.5)$$

以及约束方程

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - 6\dot{\phi} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) + (\dot{\phi})^2 = \frac{1}{2} \rho, \quad (3.6)$$

将约束方程 (3.6) 代入方程 (3.4) 和 (3.5) 得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) = -2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{1}{3} (\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} \left(p - \frac{\rho}{3} \right) - \frac{f}{2}, \quad (3.7)$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\phi}) = \frac{3}{2}(\dot{\phi})^2 - 3\dot{\phi}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + \frac{3}{4}\left(p - \frac{\rho}{3}\right) - \frac{f}{2}, \quad (3.8)$$

对于辐射为主的宇宙,物态方程可假定为 $p = \frac{\rho}{3}$,考虑单圈自由能贡献的情形($g = 1$),此时根据(3.1)式知 $f = 0$,因此无法讨论温度对偶对运动方程的影响.当 $(\dot{\phi})^2 \approx 0$ 时,运动方程(3.7)和(3.8)存在一组宇宙解^[15]

$$a(t) \approx t^{\frac{1}{2}}, \quad \phi(t) \approx t^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.9)$$

这组经典宇宙解表明标度因子随时间增加按幂律膨胀,而 dilaton 场随时间增大按幂律缩小,这与大爆炸宇宙学中描述的情况类似.还有一组解是经典宇宙学模型中很少讨论的.由于弦的单圈量子效应对物态方程存在修正,所以应当考虑这种效应下运动方程是否存在新的宇宙解.根据定义(3.2)和(3.3)式,我们可假定物态方程修正为

$$p = \frac{\rho}{3} + \frac{4}{3}e^{2\phi}, \quad (3.10)$$

当 $(\dot{\phi})^2 \neq 0$ 时,不难发现运动方程(3.7)和(3.8)式存在另一组宇宙解

$$a(t) = t^{-\frac{1}{2}}, \quad \phi(t) = -\ln t. \quad (3.11)$$

不同于经典宇宙解(3.9)式,这组解描述的标度因子随时间增大而衰减,dilaton 场随时间增大而增大.因此在极早期宇宙中,由于弦的量子效应的作用,这种形式的宇宙解有可能存在.随着时间的增加,量子效应开始减弱,宇宙的演化将由经典解描述.

4 亏格数 $g = 2$ 时的弦宇宙解及其温度对偶变换性质

为了获得亏格数 $g = 2$ 的精确宇宙解,我们假定 $(\dot{\phi})^2 \approx 0$,物态方程仍取为 $p = \frac{\rho}{3}$,根据(3.7)和(3.8)式得到运动方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = -2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{1}{2}e^{4\phi}f_2(\beta), \quad (4.1)$$

$$\ddot{\phi} = -3\dot{\phi}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) - \frac{1}{2}e^{4\phi}f_2(\beta), \quad (4.2)$$

式中, $f_2(\beta)$ 表示亏格数 $g = 2$ 的玻色弦自由能.

4.1 温度对偶变换和 dilaton 场平移变换性质

对方程(4.1)、(4.2)做如下变换

$$\beta \rightarrow \frac{4\pi^2}{\beta}, \quad \phi \rightarrow \phi - \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{2\pi}, \quad (4.3)$$

即可得到

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) = -2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{1}{2} e^{4\left(\phi - \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{2\pi}\right)} f_2 \left(\frac{4\pi^2}{\beta} \right), \quad (4.4)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\phi - \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{2\pi} \right) = -3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \frac{d}{dt} \left(\phi - \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{2\pi} \right) - \frac{1}{2} e^{4\left(\phi - \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{2\pi}\right)} f_2 \left(\frac{4\pi^2}{\beta} \right). \quad (4.5)$$

将亏格数 $g = 2$ 时自由能的对偶关系式(2.13)代入(4.4)和(4.5)式后化简得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) = -2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{1}{2} e^{4\phi} f_2(\beta), \quad (4.6)$$

$$\ddot{\phi} = -3\dot{\phi} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) - \frac{1}{2} e^{4\phi} f_2(\beta) + \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta} \right) + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta} \right) \right], \quad (4.7)$$

所以当温度 β 满足约束方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta} \right) + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta} \right) = 0 \quad (4.8)$$

时就不难发现运动方程(4.1)和(4.2)在温度对偶变换和 dilaton 场平移变换下的确保持不变.

4.2 运动方程可能存在的宇宙解

不失一般性,可假定三维空间的标度因子随时间按 $a(t) = t^\alpha$ 幂律膨胀,这里对于不同的 α 取值,宇宙解的情况较为复杂,需进一步讨论.

当 $0 < \alpha < \frac{1}{3}$ 时,根据约束方程(4.8)可求出温度

$$T(t) = \exp \left(-\frac{t^{1-3\alpha}}{1-3\alpha} \right). \quad (4.9)$$

再将 $a(t) = t^\alpha$ 代入方程(4.6)和(4.7)式并相减得

$$\frac{d}{dt} (\dot{\phi}) + \frac{3\alpha}{t} \dot{\phi} = \frac{2\alpha^2 - \alpha}{t^2}, \quad (4.10)$$

这是一个关于 dilaton 场的常微分方程,易求得它的解为

$$\phi(t) = \frac{\alpha(2\alpha - 1)}{3\alpha - 1} \ln t, \quad (4.11)$$

所以标度因子随着时间增加而按幂律膨胀,由(4.9)和(4.11)式可知宇宙温度随时间增加而递减,而 dilaton 场随时间增加按对数规律膨胀.

当 $\alpha = \frac{1}{3}$ 时,宇宙解的情况发生了变化,用方程(4.8)和(4.10)可直接求得

$$T = \frac{1}{t}, \quad \phi(t) = -\frac{1}{18} \ln^2 t, \quad (4.12)$$

这时随着宇宙的膨胀, 温度随时间增加而递减, 同时 dilaton 场也随时间增加而缩小.

当 $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$ 时, 运动方程的宇宙解仍为 (4.9) 式和 (4.11) 式, 只是宇宙温度和 dilaton 场都随时间增加而递减.

当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, 根据约束方程 (4.8) 和 dilaton 场方程 (4.10) 可求得另一组宇宙解

$$T(t) = \exp\left(\frac{2}{\sqrt{t}}\right), \quad \phi(t) = -\frac{2}{\sqrt{t}}, \quad (4.13)$$

不同于前面讨论的情况, 这时宇宙温度将随时间增加而递减, 而 dilaton 场随时间增加而递增.

最后一种情况是当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时, 宇宙解又回到了 (4.9) 式和 (4.11) 式, 宇宙温度随时间增加而递减, dilaton 场将随时间增加而递增.

上述的宇宙解有可能用于描述早期宇宙的演化. 当 $T = \frac{1}{2\pi}$ 达到自对偶点, 这些解中的对偶温度将随时间按逆方向变化. 如果取 $\alpha = 1/3$, 那么根据 (4.12) 式可求得达到自对偶点的时间为 $t = 2\pi$.

当 ϕ 场随时间变化较显著时, 运动方程中的 $(\dot{\phi})^2$ 项不能省略, 如果继续假定宇宙处于辐射为主的时期, 那么物态方程仍可取为 $p = \frac{\rho}{3}$, 即运动方程 (3.7) 和 (3.8) 可重新写成

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) = -2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{1}{3} (\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2} e^{4\phi} f_2(\beta), \quad (4.14)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{3}{2} (\dot{\phi})^2 - 3\dot{\phi} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) - \frac{1}{2} e^{4\phi} f_2(\beta), \quad (4.15)$$

将温度对偶变换和 dilaton 场平移变换 (4.3) 式代入上面两个方程, 可得到

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) = -2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\dot{\phi} - \frac{1}{2} \frac{\dot{\beta}}{\beta} \right)^2 - \frac{1}{2} e^{4\left(\phi - \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{2\pi}\right)} f_2 \left(\frac{4\pi^2}{\beta} \right), \quad (4.16)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\phi - \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{2\pi} \right) = \frac{3}{2} \left(\dot{\phi} - \frac{1}{2} \frac{\dot{\beta}}{\beta} \right)^2 - 3 \left(\dot{\phi} - \frac{1}{2} \frac{\dot{\beta}}{\beta} \right) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) - \frac{1}{2} e^{4\left(\phi - \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{2\pi}\right)} f_2 \left(\frac{4\pi^2}{\beta} \right). \quad (4.17)$$

将亏格数 $g = 2$ 时自由能满足的对偶关系式 (2.13) 代入上面两个方程, 进行整理后得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) = -2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{1}{3} (\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2} e^{4\phi} f_2(\beta) + \Delta(t), \quad (4.18)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{3}{2} (\dot{\phi})^2 - 3\dot{\phi} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) - \frac{1}{2} e^{4\phi} f_2(\beta) + \delta(t), \quad (4.19)$$

其中

$$\Delta(t) = \frac{1}{12} \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta} \right)^2 - \frac{1}{3} \dot{\phi} \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta} \right), \quad (4.20)$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta} \right) + \frac{9}{2} \Delta(t). \quad (4.21)$$

以三维空间为例, 将标度因子 $a(t) = t^\alpha$ 代入方程 (4.14)、(4.15) 并相减后得到 dilaton 场满足的微分方程

$$\frac{d}{dt} (\dot{\phi}) + \frac{3\alpha}{t} \dot{\phi} = \frac{7}{6} (\dot{\phi})^2 + \frac{2\alpha^2 - \alpha}{t^2}, \quad (4.22)$$

这是一个关于 $\dot{\phi}$ 的 Riccati 方程, 对于一般的 α 取值, 这一方程并没有精确解, 但是当 $\alpha = \frac{1}{3}$ 时此方程恰好是可积的^[18, 19], 由 (4.22) 式可解出

$$\dot{\phi} = k \left(\frac{1+t^\varepsilon}{1-t^\varepsilon} \right) \cdot \frac{1}{t}, \quad (4.23)$$

这里常数 $k = \sqrt{2/21}$, $\varepsilon = \sqrt{14/27}$, 对上式再积分得

$$\phi = k \left(\ln t - \frac{2}{\varepsilon} \ln(t^\varepsilon - 1) \right). \quad (4.24)$$

在 (4.20) 式中令 $\Delta(t) = 0$, 那么得到

$$\dot{\phi} = \frac{1}{4} \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta} \right), \quad (4.25)$$

将 (4.23) 式代入 (4.25) 式后求得温度

$$T = \frac{(t^\varepsilon - 1)^{\frac{8k}{\varepsilon}}}{t^{4k}}. \quad (4.26)$$

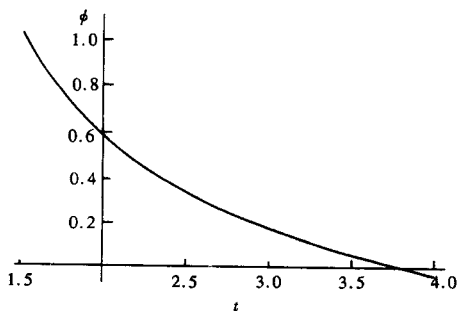


图1 dilaton场随时间变化的关系

由于 $t < 1$ 时, 温度可能成为复数, 这种解在物理上是没有意义的, 所以我们限定时间 $t \geq 1$, T 相对应的对偶温度为 $T_D \propto 1/T$. dilaton 场和温度随时间变化的规律由图 1 至图 3 所示, 从这些图形中容易看出 dilaton 场随时间增加而减小, 而宇宙温度随时间增加而变大, 与此相反, 宇宙对偶温度随时间增加而减小. 由图 2 可见, 采用数值计算得到宇宙温度达到自对偶点 $T = 1/2\pi$ 的时

间为 $t \approx 2.23$.

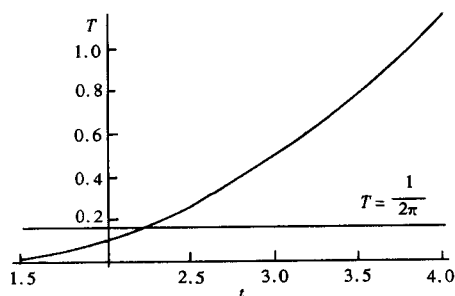


图2 温度随时间变化的关系

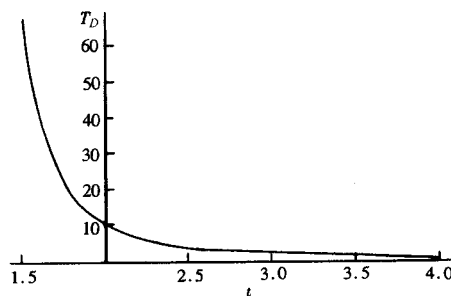


图3 对偶温度随时间变化的关系

将标度因子 $a(t) = t^{V_3}$ 和 (4.25) 式代入 (4.21) 式后得到

$$\delta(t) = \frac{4k\varepsilon}{(t^\varepsilon - 1)^2 t^{2-\varepsilon}}. \quad (4.27)$$

从上式不难发现, 当时间 t 较大时, $\delta(t) \rightarrow 0$, 因此本文获得的宇宙解也可使运动方程 (4.18) 和 (4.19) 式在温度对偶变换下保持不变. 本文的另一个新的特点是在不需要知道自由能的具体形式的情况下, 仅仅依靠运动方程的对偶性质就可找到 dilaton 场和宇宙温度变化的规律. 因此, 深入探讨弦和引力中的各种对称性, 对于澄清早期宇宙的形成和其中的各种实际物理问题将是非常有意义的课题.

5 讨论

本文研究了高亏格黎曼面上的温度对偶性, 求得了亏格数 $g = 1$ 和 2 的弦宇宙解, 讨论了模型中 dilaton 场和宇宙温度随时间的演化规律; 同时, 通过这些弦宇宙解证明了运动方程在温度和 dilaton 场对偶变换下保持不变, 这些结果有助于理解极早期宇宙中对偶对称性与宇宙相变之间的关系. 当然, 亏格数 $g > 2$ 时弦宇宙解和温度对偶性还有待进一步研究. 近年来, 已有文献开始研究弦宇宙和引力中的各种对偶性, 如二维 Brans-Dicke 弦宇宙模型中的 $L-\beta$ 对偶性^[20,21], axion-dilaton 耦合系统的 $SL(2, R)$ 对偶不变性^[22], 宇宙 p-pranes 中的电磁对偶性^[23], 以及 $O(d, d)$ 对偶宇宙模型的经典和量子宇宙学性质等^[24-26]. 可以预期, 这些弦和引力中存在的对偶对称性将在极早期宇宙的研究中起着越来越重要的作用.

参 考 文 献

- 1 Giveon A, Porrati M, Rabinovici E. Phys. Rep., 1994, **244**: 77—202
- 2 Seiberg N, Witten E. Nucl. Phys., 1994, **B426**: 19—25
- 3 Vafa C, Witten E. Nucl. Phys., 1994, **B431**: 3—77
- 4 Schwarz A S, Tseytlin A A. Nucl. Phys., 1993, **B399**: 691—708
- 5 Duff M J, Khuri R R. Nucl. Phys., 1994, **B411**: 473—486
- 6 Alvarez E, Alvarez-Gaume L, Barbon J L F et al. Nucl. Phys., 1994, **B415**: 71—100
- 7 Lauer J, Zucchini R. Phys. Lett., 1990, **B235**: 268—274

- 8 Alvarez E, Alvarez-Gaume L, Lozano Y. Nucl. Phys., 1994, **B424**:155—183
- 9 Horowitz G T, Lowe D A, Maldacenc J M. Phys. Rev. Lett., 1996, **77**:430—433
- 10 Guendelman E I. Gen. Rel. Grav., 1991, **23**:521—525
- 11 Martinec E. Class. Quantu. Grav., 1995, **12**:941—949
- 12 Verlinde E. Nucl. Phys., 1995, **B455**:211—225
- 13 Harvey J A, Moore G, Strominger A. Phys. Rev., 1995, **D52**:7161—7167
- 14 Alvarez E, Osorio M A R. Phys. Rev., 1989, **D40**:1150—1152
- 15 Hellmund M, Kripfganz J. Phys. Lett., 1990, **B241**:211—214
- 16 Yan Jun, Hu Shike. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1991, **15**:414—419
(颜 骏, 胡诗可. 高能物理与核物理, 1991, **15**:414—419)
- 17 Yan Jun, Hu Shike. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1993, **17**:534—537
(颜 骏, 胡诗可. 高能物理与核物理, 1993, **17**:534—537)
- 18 Rajagopal A K. Amer. Math. Monthly, 1961, **68**:777—779
- 19 Li Hong-Xiang. Amer. Math. Monthly, 1982, **89**:198—208
- 20 Osorio M A R, Vazquez-mozo M A. Mod. Phys. Lett., 1993, **A8**:3111—3128
- 21 Osorio M A R, Vazquez-mozo M A. Mod. Phys. Lett., 1993, **A8**:3215—3231
- 22 Gibbons G W, Rasheed D A. Phys. Lett., 1996, **B365**:46—50
- 23 Gregory R. Nucl. Phys., 1996, **B467**:159—182
- 24 Gasperini M, Maharana J, Veneziano G. Nucl. Phys., 1996, **B472**:349—360
- 25 Gasperini M, Veneziano G. Gen. Rel. Grav., 1996, **28**:1301—1307
- 26 Tao Biyou, Yan Jun, Qiu Xiaoming. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1998, **9**:812—818
(陶必友, 颜 骏, 邱孝明. 高能物理与核物理, 1998, **9**:812—818)

Temperature Duality on Riemann Surface and Cosmological Solutions for Genus $g = 1$ and 2 *

Yan Jun¹ Tao Biyou² Wang Shunjin¹

¹(Institute of Modern Physics, Southwest Jiao-Tong University, Chengdu 610031)

²(Technology Institute of Box77, Chengdu 610066)

Abstract A Bosonic string model at finite temperature on the gravitation $g_{\mu\nu}$ and the dilaton ϕ background field is examined. Moreover, the duality relation of energy momentum tensor on high genus Riemann surface is derived. At the same time, the temperature duality invariance for the action of string gas matter is proved in 4-D Robertson-Walker metric, the string cosmological solutions and temperature duality of the equations of motion for genus $g = 1$ and 2 are also investigated.

Key words Riemann surface, temperature duality, string cosmological solutions

Received 20 May 1998 Revised 20 November 1998

* Supported by Doctoral Foundation of the State Education Commission of China