第23卷 第6期 高能物理与核物理 Vol.23, No.6
1999 年6月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS June, 1999

$SU(1,1)$群的非齐次逆微分实现

于 肇 贤

(胜利油田职工大学 东营 257004)

刘 业 厚

(重庆石油高等专科学校 重庆 630042)

摘要 利用玻色振子的逆算符构造了$SU(1,1)$群的生成元和不可约表示的相干态，导出了$SU(1,1)$群的非齐次逆微分实现.

关键词 $SU(1,1)$群 非齐次逆微分实现 玻色振子 逆算符

1 引言

众所周知，玻色子实现的方法是研究群表示理论的一个有效途径，通常可借助玻色振子的产生和湮没算符得以实现. 关于玻色振子逆算符的性质也曾引起过人们的注意[1]，且近年来这方面的工作又有了新的进展[2,3]. 鉴于量子力学中的准精确可解问题与李群的非齐次微分实现有着密切的关系[4]，最近利用玻色振子的逆算符给出了$SU(2)$群的非齐次逆微分实现[5]. 本文将利用这一思路进一步给出$SU(1,1)$群的非齐次逆微分实现.

2 玻色振子逆算符的性质与$SU(1,1)$群的复合逆算符生成元

为完备起见，先简述一下玻色振子逆算符的性质. 玻色振子湮没算符a和产生算符a^+的逆分别用a^{-1}及$(a^+)^{-1}$表示，它们对态矢$|n\rangle$的作用为[2]

$$a^{-1}|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}|n+1\rangle , \tag{1}$$

$$(a^+)^{-1}|n\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}}|n-1\rangle & (n \neq 0) \\ 0 & (n = 0). \end{cases} \tag{2}$$

1998-04-15收稿

因而算符a^{-1}和$(a^{+})^{-1}$可表示为

$$a^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\ |n+1\rangle\langle n|\ , \tag{3}$$

$$(a^{+})^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\ |n\rangle\langle n+1|\ =(a^{-1})^{+}. \tag{4}$$

它们满足关系式

$$aa^{-1}=(a^{+})^{-1}a^{+}=1,\ a^{-1}a=a^{+}(a^{+})^{-1}=1-|0\rangle\langle 0|\ . \tag{5}$$

这意味着算符a只有右逆而无左逆，而算符a^{+}只有左逆而无右逆.

$SU(1,1)$群有两个无穷分立的(正分立和负分立)不可约幺正表示[6,7]，引入4个彼此独立的玻色振子$\{a_i^{+},\ a_i,\ N_i^a\}$和$\{b_i^{+},\ b_i,\ N_i^b\}$ $(i=1,2)$,它们满足对易关系

$$[a_i,\ a_i^{+}]=1,\ [N_i^a,\ a_i]=-a_i,\ [N_i^a,\ a_i^{+}]=a_i^{+}\ , \tag{6}$$

$$[b_i,\ b_i^{+}]=1,\ [N_i^b,\ b_i]=-b_i,\ [N_i^b,\ b_i^{+}]=b_i^{+}\ . \tag{7}$$

考虑下面的复合逆算符

$$(K_{+}^{a})^{-1}=(a_1^{+})^{-1}(a_2^{+})^{-1},\ (K_{-}^{a})^{-1}=a_1^{-1}a_2^{-1}\ , \tag{8a}$$

$$(K_0^a)^{-1}=\frac{1}{2}\left[(N_1^a)^{-1}(N_2^a)^{-1}-(N_1^a+1)^{-1}(N_2^a+1)^{-1}\right]\ . \tag{8b}$$

和

$$(K_{+}^{b})^{-1}=b_2^{-1}b_1^{-1},\ (K_{-}^{b})^{-1}=(b_1^{+})^{-1}(b_2^{+})^{-1}\ , \tag{9a}$$

$$(K_0^b)^{-1}=\frac{-1}{2}\left[(N_1^b)^{-1}(N_2^b)^{-1}-(N_1^b+1)^{-1}(N_2^b+1)^{-1}\right]\ . \tag{9b}$$

式中

$$(N_i^a)^{-1}=a_i^{-1}(a_i^{+})^{-1},\ (N_i^a+1)^{-1}=(a_i^{+})^{-1}a_i^{-1}\ , \tag{10}$$

$$(N_i^b)^{-1}=b_i^{-1}(b_i^{+})^{-1},\ (N_i^b+1)^{-1}=(b_i^{+})^{-1}b_i^{-1}\ . \tag{11}$$

容易证明

$$(N_i^a)^{-1}|n\rangle=\frac{1}{n}\ |n\rangle,\ (N_i^a+1)^{-1}|n\rangle=\frac{1}{n+1}|n\rangle\ , \tag{12}$$

$$(N_i^b)^{-1}|n\rangle=\frac{1}{n}\ |n\rangle,\ (N_i^b+1)^{-1}|n\rangle=\frac{1}{n+1}|n\rangle\ . \tag{13}$$

则有

$$(K_{+}^{a(b)})^{-1}(K_{-}^{a(b)})^{-1}-(K_{-}^{a(b)})^{-1}(K_{+}^{a(b)})^{-1}=-2(K_0^{a(b)})^{-1}\ . \tag{14}$$

$SU(1,1)$群的正分立和负分立不可约幺正表示$|k,r\rangle^{a}$和$|k,\ r\rangle^{b}$分别为

$$|k,\ r\rangle^{a}=|r-k-1\rangle_1^a\otimes|r+k\rangle_2^a\quad(r\geqslant -k>0)\ , \tag{15}$$

$$|k,\ r\rangle^b = |-r-k-1\rangle_1^b \otimes |-r+k\rangle_2^b \quad (r \leqslant k < 0)\ . \tag{16}$$

式中量子数 $k = -1/2,\ -1,\ \cdots$. $SU(1,1)$群的生成元对$|k,\ r\rangle^a$和$|k,\ r\rangle^b$的作用分别为

$$(K_+^a)^{-1}|k,\ r\rangle^a = \frac{1}{\sqrt{(r-k-1)(r+k)}}\,|k,\ r-1\rangle^a\ , \tag{17}$$

$$(K_-^a)^{-1}|k,\ r\rangle^a = \frac{1}{\sqrt{(r-k)(r+k+1)}}\,|k,\ r+1\rangle^a\ , \tag{18}$$

$$(K_0^a)^{-1}|k,\ r\rangle^a = \frac{r}{(r+k+1)(r+k)(r-k)(r-k-1)}\,|k,\ r\rangle^a\ . \tag{19}$$

和

$$(K_+^b)^{-1}|k,\ r\rangle^b = \frac{1}{\sqrt{(-r-k)(-r+k+1)}}\,|k,\ r-1\rangle^b\ , \tag{20}$$

$$(K_-^b)^{-1}|k,\ r\rangle^b = \frac{1}{\sqrt{(-r+k)(-r-k-1)}}\,|k,\ r+1\rangle^b\ , \tag{21}$$

$$(K_0^b)^{-1}|k,\ r\rangle^b = \frac{-r}{(r+k+1)(r+k)(r-k)(r-k-1)}\,|k,\ r\rangle^b\ . \tag{22}$$

3　$SU(1,1)$群在 Bargmann 空间的逆微分实现

以下讨论将在一个复变量的整函数空间——所谓的 Bargmann 空间中进行.

定义 $SU(1,1)$群的正分立(a)和负分立(b)不可约表示的相干态分别为

$$|k,\ Z)^a = \mathrm{e}^{Z(K_-^a)^{-1}}\,|k,\ -k\rangle^a = \sum_{r=-k}^{\infty}\frac{1}{(k+r)!}\sqrt{\frac{(-2k-1)!}{(k+r)!(r-k-1)!}}\ Z^{k+r}|k,\ r\rangle^a\ , \tag{23}$$

$$|k,\ Z)^b = \mathrm{e}^{Z(K_+^b)^{-1}}\,|k,\ k\rangle^b = \sum_{r=k}^{-\infty}\frac{1}{(k-r)!}\sqrt{\frac{(-2k-1)!}{(k-r)!(-r-k-1)!}}\ Z^{k-r}|k,\ r\rangle^b\ . \tag{24}$$

其归一化系数分别为

$$A_k^a(|Z|^2) = \sum_{r=-k}^{\infty}\frac{(-2k-1)!}{[(k+r)!]^3(r-k-1)!}\,(|Z|^2)^{k+r}\ , \tag{25}$$

$$B_k^b(|Z|^2) = \sum_{r=k}^{-\infty}\frac{(-2k-1)!}{[(k-r)!]^3(-r-k-1)!}\,(|Z|^2)^{k-r}\ . \tag{26}$$

为了构造相干态$|k,\ Z)^a$和$|k,\ Z)^b$的完备性关系，定义$P^a(k+r,\ Z)$和$P^b(k-r,\ Z)$分别为在相干态$|k,\ Z)^a$和$|k,\ Z)^b$中观察到态矢$|k,\ r\rangle^a$和$|k,\ r\rangle^b$的概率，即有

$$P^a(k+r,\ Z) = |{}^a\langle k,\ r|k,\ Z)^a|^2 = \frac{(-2k-1)!}{[(k+r)!]^3(r-k-1)!}\,(|Z|^2)^{k+r}\ , \tag{27}$$

$$P^b(k-r,\ Z)=|{}^b\langle k,\ r|k,\ Z)^b|^2=\frac{(-2k-1)!}{[(k-r)!]^3(-r-k-1)!}(|Z|^2)^{k-r}\ . \tag{28}$$

令

$$P^a(k+r)\equiv\int P^a(k+r,\ Z)\mathrm{d}Z^2,\ P^b(k-r)\equiv\int P^b(k-r,\ Z)\mathrm{d}Z^2\ , \tag{29}$$

并让ρ^a和ρ^b分别表示态矢$|k,r\rangle^a$和$|k,\ r\rangle^b$的密度矩阵,则有

$$\rho^a=\sum_{r=-k}^{\infty}P^a(k+r)|k,\ r\rangle^a\ {}^a\langle k,\ r|,\ \rho^b=\sum_{r=k}^{-\infty}P^b(k-r)|k,\ r\rangle^b\ {}^b\langle k,\ r|\ . \tag{30}$$

这样,相干态$|k,\ Z)^a$和$|k,\ Z)^b$的完备性关系为

$$\frac{1}{\pi}(\rho^a)^{-1}\int\frac{|k,\ Z)^a\ {}^a(k,\ Z|}{A_k^a(|Z|^2)}\mathrm{d}Z^2=1,\ \frac{1}{\pi}(\rho^b)^{-1}\int\frac{|k,\ Z)^b\ {}^b(k,\ Z|}{B_k^b(|Z|^2)}\mathrm{d}Z^2=1. \tag{31}$$

类似于文献[8,9]的方法,容易证明(31)式是成立的.

在正分立和负分立的不可约表示空间中分别定义态矢量$|\psi\rangle^a$和$|\psi\rangle^b$:

$$|\psi\rangle^a=\sum_{r=-k}^{\infty}C_r^a|k,\ r\rangle^a,\ |\psi\rangle^b=\sum_{r=k}^{-\infty}C_r^b|k,\ r\rangle^b\ . \tag{32}$$

则有

$$\begin{aligned}&{}^a(k,\ \bar{Z}|(K_-^a)^{-1}|\psi\rangle^a=\sum_{r=-k}^{\infty}C_r^a\ {}^a(k,\ \bar{Z}|(K_-^a)^{-1}|k,\ r\rangle^a=\\&\sum_{r=-k}^{\infty}\frac{C_r^a}{(k+r+1)^2(k+r)!(r-k)}\sqrt{\frac{(-2k-1)!}{(k+r)!(r-k-1)!}}Z^{k+r+1}\ ,\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}&{}^b(k,\ \bar{Z}|(K_+^b)^{-1}|\psi\rangle^b=\sum_{r=k}^{-\infty}C_r^b\ {}^b(k,\ \bar{Z}|(K_+^b)^{-1}|k,\ r\rangle^b=\\&\sum_{r=k}^{-\infty}\frac{C_r^b}{(k-r+1)!(k-r+1)(-r-k)}\sqrt{\frac{(-2k-1)!}{(k-r)!(-r-k-1)!}}Z^{k-r+1}\ ,\end{aligned} \tag{34}$$

另外,借助逆微分公式[10]可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\left(-2k+Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)\left(\frac{1}{Z}\right)\left(Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)^2}\,{}^a(k,\ \bar{Z}|\psi\rangle^a=\\&\sum_{r=-k}^{\infty}\frac{C_r^a}{(k+r+1)^2(k+r)!(r-k)}\sqrt{\frac{(-2k-1)!}{(k+r)!(r-k-1)!}}Z^{k+r+1}\ ,\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\left(-2k+Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)\left(\frac{1}{Z}\right)\left(Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)^2}\,{}^b(k,\ \bar{Z}|\psi\rangle^b=\\&\sum_{r=k}^{-\infty}\frac{C_r^b}{(k-r+1)\ !(k-r+1)(-r-k)}\sqrt{\frac{(-2k-1)!}{(k-r)!(-r-k-1)!}}Z^{k-r+1}\ .\end{aligned} \tag{36}$$

所以，由(33)—(36)式可发现算符$(K_-^a)^{-1}$和$(K_+^b)^{-1}$的逆微分 Bargmann 实现为

$$B_k^a((K_-^a)^{-1}) = B_k^b((K_+^b)^{-1}) = \frac{1}{\left(-2k + Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)\left(\frac{1}{Z}\right)\left(Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)^2} \quad . \tag{37}$$

同理可得到

$$^a(k,\ \bar{Z}|(K_+^a)^{-1}|\psi\rangle^a = \sum_{r=-k}^{\infty}\frac{C_r^a}{(k+r-1)!}\sqrt{\frac{(-2k-1)!}{(k+r)!(r-k-1)!}}\ Z^{k+r-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\ ^a(k,\ \bar{Z}|\psi\rangle^a\ , \tag{38}$$

$$^b(k,\ \bar{Z}|(K_-^b)^{-1}|\psi\rangle^b = \sum_{r=k}^{-\infty}\frac{C_r^b}{(k-r-1)!}\sqrt{\frac{(-2k-1)!}{(k-r)!(-r-k-1)!}}\ Z^{k-r-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\ ^b(k,\ \bar{Z}|\psi\rangle^b\ , \tag{39}$$

$$^a(k,\ \bar{Z}|(K_0^a)^{-1}|\psi\rangle^a = \sum_{r=-k}^{\infty}\frac{rC_r^a}{(r+k+1)!(r+k)(r-k)(r-k-1)}\sqrt{\frac{(-2k-1)!}{(k+r)!(r-k-1)!}}\ Z^{k+r} = \left(Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}-k\right)\frac{1}{Z\left(-2k+Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)\left(\frac{1}{Z}\right)\left(-2k+Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)\left(\frac{1}{Z}\right)\left(Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)(Z)\left(Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)}\ ^a(k,\bar{Z}|\psi\rangle^a, \tag{40}$$

$$^b(k,\ \bar{Z}|(K_0^b)^{-1}|\psi\rangle^b = \sum_{r=k}^{-\infty}\frac{-rC_r^b}{(k-r)!(r+k+1)(r+k)(r-k)(r-k-1)}\sqrt{\frac{(-2k-1)!}{(k-r)!(-r-k-1)!}}\ Z^{k-r} = \left(Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}-k\right)\frac{1}{Z\left(2k-Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)\left(\frac{1}{Z}\right)\left(2k-Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)\left(\frac{1}{Z}\right)\left(-Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)(Z^2)\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)}\ ^b(k,\bar{Z}|\psi\rangle^b, \tag{41}$$

所以，算符$(K_+^a)^{-1}$，$(K_0^a)^{-1}$和$(K_-^b)^{-1}$，$(K_0^b)^{-1}$的逆微分 Bargmann 实现为

$$B_k^a((K_+^a)^{-1}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\ , \tag{42}$$

$$B_k^a((K_0^a)^{-1}) = \left(Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z} - k\right) \frac{1}{Z\left(-2k + Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)\left(\frac{1}{Z}\right)\left(-2k + Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)\left(\frac{1}{Z}\right)\left(Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)(Z)\left(Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)}, \tag{43}$$

$$B_k^b((K_-^b)^{-1}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}, \tag{44}$$

$$B_k^b((K_0^b)^{-1}) = \left(Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z} - k\right) \frac{1}{Z\left(2k - Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)\left(\frac{1}{Z}\right)\left(2k - Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)\left(\frac{1}{Z}\right)\left(-Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)(Z^2)\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)}. \tag{45}$$

至此，上面得到的(37)、(42)—(45)式就是 $SU(1,1)$ 群的非齐次逆微分实现.

参　考　文　献

1 Dirac P A M. Lectures on Quantum Field Theory. New York: Academic Press, 1966. 18

2 Fan Hongyi. Phys Rev., 1993, **A47**:4521

3 Fan Hongyi. Phys Lett., 1994, **A191**:347

4 Turbiner A V, Ushveridze A G. Phys Lett., 1987, **A126**:181; Turbiner A V. Commun Math Phys., 1988, **118**:467

5 Yu Zhaoxian, Zharg Dexing, Liu Yehou. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1998, **22**:602 (于肇贤，张德兴，刘业厚. 高能物理与核物理，1998，**22**:602)

6 Holman W J et al. Ann Phys., 1966, **39**:1

7 Bargmann V. Ann Math., 1947, **48**:568

8 Yu Zhaoxian, Yu Ge, Zhang Dexing. Commun Theor Phys., 1997, **27**:179

9 Yu Ge, Zhang Dexing, Yu Zhaoxian. Commun Theor Phys., 1997, **28**:57

10 Ye Yanqian. Lecture Notes on Differential Equations With Constant Coefficients. Beijing: People's Education Press, 1979, 181
(叶彦谦. 常微分方程讲义. 北京：人民教育出版社，1979，181)

11 Jing Sicong, Frank Cuypers. Commun Theor Phys., 1993, **19**:495

Inhomogeneous Inverse Differential Realizations of the $SU(1,1)$ Group

Yu Zhaoxian

(*Shengli Oilfield Workers University*, *Dongying* 257004)

Liu Yehou

(*Chongqing Petroleum Advanced Polytechnic College*, *Chongqing* 630042)

Abstract The generators and irreducible representation coherent state of the $SU(1,1)$ group are constructed by using the inverse operators of bose harmonic oscillator, and the inhomogeneous inverse differential realizations of the $SU(1,1)$ group are derived.

Key words $SU(1,1)$ group, inhomogeneous inverse differential realization, bose harmonic oscillator, inverse operator

Received 15 April 1998