维数正规化和有限温度下的解析延拓 *

陈 相 君
(哈尔滨工业大学物理系 哈尔滨 150001)

刘 连 寿
(华中师大粒子物理研究所 武汉 430079)

摘要 讨论了维数正规化与有限温度下红外发散积分解析延拓之间的关系,并给出了一种红外发散积分和红外发散求和正规化的方法.

关键词 维数正规化 红外发散 解析延拓

1 引言

在有限温度场的微扰计算中,对于无质量场,常常碰到红外发散积分和红外发散求和.按照重整化的步骤,这些红外发散积分和红外发散求和需要正规化.在零温场论中[1],微扰计算常碰到紫外发散积分,维数正规化在处理这些发散积分时,通常通过把它们解析延拓到复 D 维空间,得到它们的解析延拓表达式.在有限温度场情况,维数正规化面对的是红外发散积分和红外发散求和.在处理它们时,发现不需要把这些红外发散积分和红外发散求和解析延拓到复 D 维空间,利用维数正规化对无质量场的一个规定((1)式),就可直接得到它们的解析延拓表达式.本文则是讨论这个问题.

2 维数正规化和红外发散积分的正规化

对于无质量场维数正规化有下面规定[2,3]

$$\int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2+\mathrm{i}\eta)^\alpha}=0, \quad \alpha>0. \tag{1}$$

维数正规化在处理上述积分时,由于不管怎样选择维数 D,它不是紫外发散就是红外发散,所以通过选择维数不能把发散去掉.因此维数正规化规定它为零.文献[3]曾指出这个规定实际上是维数正规化对零温场论中这种红外发散积分给出的正规化方案.对于有限温度场,维数正规化要对红外发散积分和红外发散求和进行正规化.有了这个规定,以它

1997-04-24收稿
*国家自然科学基金项目.

为基础，不需要把发散积分和发散求和解析延拓到复 D 维空间去，就可实现这一目的.

(1)式经 Wick 转动后，可变为下面形式

$$I=\frac{\mathrm{i}(-1)^{\alpha}}{(4\pi)^{D/2}}\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}k\frac{1}{k^{2\alpha-3+\varepsilon}}=0, \tag{2}$$

把 0 到无穷的积分分成两部分，并假定 $2\alpha-3+\varepsilon>1$，则得到

$$\int_{0}^{1}\mathrm{d}k\frac{1}{k^{2\alpha-3+\varepsilon}}=-\int_{1}^{\infty}\mathrm{d}k\frac{1}{k^{2\alpha-3+\varepsilon}}=\frac{1}{-2\alpha+4-\varepsilon}, \tag{3}$$

按通常意义，当 $2\alpha-3+\varepsilon>1$ 时左边 0 到 1 的积分是发散的.但是由于有了规定(1)式，它由上式表示，变为有限的.这样，可认为(3)式是维数正规化对这种 0 到 1 之间发散积分(红外发散)给出的解析延拓表达式.令 $z=2\alpha-3+\varepsilon$，上式可写成

$$\int_{0}^{1}\mathrm{d}t\frac{1}{t^{z}}=\frac{1}{1-z}\quad(z>1). \tag{4}$$

上式是在 $z>1$ 的条件下，由规定(1)式得来.但是当 $z<1$ 时，上面 0 到 1 的积分不发散，(4)式也是正确的.因此，实际上可去掉 $z>1$ 的限制，但要 $z\neq 1$.

在有限温度场论，红外发散积分出现新的形式，经化简后，其发散主要来自其中 0 到 1 之间的积分.因此，利用(4)式就可对这些红外发散积分进行正规化.有限温度场中，温度格林函数有两种形式，一种是实时形式，一种是虚时形式.对于无质量场，用实时形式进行计算时，会碰到红外发散积分；用虚时形式进行计算时，会碰到红外发散求和.例如，用温度格林函数的实时形式对无质量ϕ^3标量场的三圈真空图进行计算时，有一项的计算为

$$(-\mathrm{i}g)^4\int\frac{\mathrm{d}^D p\mathrm{d}^D q\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^{3D-5}}\frac{2\mathrm{i}}{k^2+\mathrm{i}\eta}\delta_p\delta_q\delta_k\delta_{p+k}\delta_{q+k}=\frac{\mathrm{i}g^4}{2^5(2\pi)^7}\int\mathrm{d}\Omega_p\mathrm{d}\Omega_q\mathrm{d}\Omega_k\times$$

$$\frac{1}{1-\cos\theta_p}\frac{1}{1-\cos\theta_p}\int_0^{\infty}\mathrm{d}k\frac{1}{\mathrm{e}^k-1}\left(-\frac{1}{k^{5+\varepsilon}}+\frac{2}{k^{4+\varepsilon}}+\frac{2}{3k^{5+\varepsilon}}\right), \tag{5}$$

其中 $D=4-\varepsilon$，$\delta_p=\dfrac{\delta(p^2)}{\mathrm{e}^{\beta|p0|}-1}$. (5)式中关于 k 的积分的一般形式为

$$I_p=\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\frac{1}{\mathrm{e}^t-1}\frac{1}{t^z},\quad z>0. \tag{6}$$

它是红外发散的.把它分成两部分，一部分是 0 到 1 的积分，一部分是 1 到无穷的积分.1 到无穷的积分是有限的，0 到 1 的积分是发散的.对于 0 到 1 的积分，利用公式[4]

$$\frac{t}{\mathrm{e}^t-1}=1-\frac{t}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{(2n)!}t^{2n}, \tag{7}$$

其中 B_n 是伯努利数，$B_1=1/6$，$B_2=1/30$，……，代入后利用(4)式，再把第二项积分加上，就得到了(6)式的解析延拓表达式

$$I_p=-\frac{1}{z}-\frac{1}{2(1-z)}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{(2n)!(2n-z)}+\int_1^{\infty}\mathrm{d}t\frac{1}{\mathrm{e}^t-1}\frac{1}{t^z}. \tag{8}$$

它和文献[5]中用解析延拓到复 D 维空间的方法得到的结果一样.这样就实现了直接对(6)式进行正规化.

在(5)式中还存在角度积分,这个积分在4维空间($\varepsilon = 0$)里,由于$\theta = 0$是被积函数的奇点,所以它是发散的.这种发散叫共线发散,也是属于红外发散.利用(4)式,也可对它进行正规化.考虑这种角度积分的一般形式为

$$I_\theta = \int \mathrm{d}\,\Omega \frac{1}{(1-\cos\theta)^N}, \tag{9}$$

其中N为正整数.在D维空间里,关于角度部分的积分元是[3]

$$\mathrm{d}\Omega_n = \prod_{i=1}^{[D-2]} \sin^{D-2-i}\theta_i \,\mathrm{d}\theta_i, \tag{10}$$

其中$[D-2]$为不超过$D-2$的最大整数,代入(9)式有

$$I_\theta = 2\pi \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \sin^{1-\varepsilon}\theta \frac{1}{(1-\cos\theta)^N}. \tag{11}$$

它是含有参数ε的积分.把它分为两部分,

$$I_\theta = 2\pi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \sin^{1-\varepsilon}\theta \frac{1}{(1-\cos\theta)^N} + 2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin^{1-\varepsilon}\theta \frac{1}{(1-\cos\theta)^N}. \tag{12}$$

右边第一项的积分是发散的,对它进行化简,有

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{1-\varepsilon}\theta}{(1-\cos\theta)^N}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^1 y^{-N-\varepsilon/2}(2-y)^{-\varepsilon/2}\,\mathrm{d}y, \tag{13}$$

展开

$$(2-y)^{-\varepsilon/2} = 2^{-\varepsilon/2} + \frac{-\varepsilon}{2}2^{(-\varepsilon/2-1)}(-y) + \frac{1}{2!}\,\frac{-\varepsilon}{2}\left(\frac{-\varepsilon}{2}-1\right)2^{(-\varepsilon/2-2)}(-y)^2 + \cdots, \tag{14}$$

代入(13)式,并利用(4)式.得到

$$\int_0^1 y^{-N-\varepsilon/2}(2-y)^{\varepsilon/2}\,\mathrm{d}y = \begin{cases} -\dfrac{2}{\varepsilon} + \text{finite}, & N = 1 \\ -\dfrac{1}{N-1}\left(\dfrac{1}{2^{N-1}}+1\right) + O(\varepsilon), & N \neq 1 \end{cases} \tag{15}$$

(12)式右边第二项的积分是收敛的,

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin^{1-\varepsilon}\theta}{(1-\cos\theta)^N}\,\mathrm{d}\theta = \int_1^2 y^{-N}\mathrm{d}y = \begin{cases} \ln 2, & N = 1 \\ -\dfrac{1}{N-1}\left(\dfrac{1}{2^{N-1}}-1\right), & N \neq 1 \end{cases} \tag{16}$$

结合(15)式和(16)式得到

$$I_\theta = \begin{cases} -\dfrac{4\pi}{\varepsilon} + \text{finite}, & N = 1 \\ -\dfrac{2\pi}{N-1}\,\dfrac{1}{2^{N-2}} + O(\varepsilon), & N \neq 1 \end{cases} \tag{17}$$

它是发散积分的解析延拓表达式.$N = 1$时给出红外发散为

$$I_\theta = -\frac{4\pi}{\varepsilon} + \text{finite}. \tag{18}$$

N为其它整数值时，不存在红外发散．这和文献 [6]用 B 函数对(9)式进行正规化得到的结论是一致的．

顺便指出，(3)式也可直接给出Γ函数的解析延拓表达公式．当 $z>0$ 时，有

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{d}t t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}. \tag{19}$$

当 $z<0$ 时，上式需要解析延拓，把(19)式右边的积分分成两部分，在 0 到 1 的积分中展开指数函数并利用(4)式，得到

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z} + \int_1^\infty \mathrm{d}t t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}. \tag{20}$$

这就是著名的维尔斯托拉斯公式，也是零温场论分离紫外发散常用的公式．

3　维数正规化和红外发散求和的正规化

在有限温度场论的微扰计算中，当用温度格林函数的虚时形式时，会遇到无穷求和，这些求和有的是发散的．例如，在胶子场三圈真空图的计算中，有一项是

$$I(m,n,l) = \frac{(\mathrm{i}g)^4}{(-\mathrm{i}\beta)^3}\sum_{m,n,l=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^d p\,\mathrm{d}^d q\,\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^{3d}}\times$$

$$\frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+m'n')^2}{(\boldsymbol{p}^2+m'^2)(\boldsymbol{q}^2+n'^2)[(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})^2+(m'+l')^2][(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k})^2+(n'+l')^2](\boldsymbol{k}^2+l'^2)^2}, \tag{21}$$

其中 $d=3-\varepsilon$，$m'=2\pi m/\beta$，$n'=2\pi n/\beta$，$l'=2\pi l/\beta$．考虑其中 $m=0$，$n=0$，$l\neq 0$ 的项，经化简后它为

$$I(0,\ 0,\ l\neq 0) = \frac{4\pi g^4}{\beta^4}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^{-1+3\varepsilon}}\frac{\mathrm{d}^d p\mathrm{d}^d q\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^{3d}}\frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})^2}{\boldsymbol{p}^2\boldsymbol{q}^2[(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})^2+1][(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k})^2+1](\boldsymbol{k}^2+1)^2}, \tag{22}$$

其中出现无穷求和．这种无穷求和的一般形式为

$$S(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha},\quad \alpha<1. \tag{23}$$

它是发散的，需要正规化．在 $z>1$ 的区域，有关系[4]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z} = \zeta(z), \tag{24}$$

其中$\zeta(z)$是黎曼ζ函数，且还有关系

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty \mathrm{d}t\frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t-1} = \frac{1}{\Gamma(z)}I_p(1-z), \tag{25}$$

因此，考虑红外发散求和的正规化通过ζ函数与Γ函数和(6)式的关系联系起来．利用(8)式和(20)式，得到红外发散求和的正规化公式为

$$S(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^t-1}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+\alpha}+\int_1^{\infty}\mathrm{d}t\mathrm{e}^{-t}t^{-\alpha-1}\right)^{-1}\times$$
$$\left(\frac{1}{\alpha-1}-\frac{1}{2\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n)!}\frac{1}{2n+\alpha-1}+\int_1^{\infty}\mathrm{d}t\frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^t-1}\right). \tag{26}$$

利用这个公式知道(22)式中的无穷求和没有发散.下面给出几个特殊的值,以便应用,

$$S(1-\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}+\text{finite},\quad S(\varepsilon)=-\frac{1}{2}+O(\varepsilon),$$

$$S(-2m+\varepsilon)=O(\varepsilon),\quad S(-2m+1+\varepsilon)=(-1)^m\frac{B_m}{2m}+O(\varepsilon).$$

其中 m 为自然数.

4 结束语

本文讨论了维数正规化和有限温度场中红外发散积分和红外发散求和解析延拓之间的关系.通过讨论知道有限温度下红外发散积分和红外发散求和的正规化,不把它们解析延拓到复 D 维空间,以维数正规化对无质量场的一个规定为基础就可实现.用这种方法对典型的红外发散积分和红外发散求和进行处理,得到的结论和其他方法得到的结论是一样的.因此,本文提供了一种对红外发散积分进行正规化的方法.

作者感谢 Y. Fujimoto 博士好的建议和有益讨论.

参 考 文 献

[1] Ramond P. Field Theory —— a Modern Primer (Benjamin / Cummings Publishing Compny, Canada, 1981)

[2] Dai Yuanben. Gauge Theory of Interaction (in Chinese). Beijing: Academic Press, 1987, 181—187
(戴元本.相互作用的规范理论,北京:科学出版社,1987,181—187)

[3] Muta T. Foundations of Quantum Chromodynamic —— an Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theory (World Scientific, 1987)

[4] Grandshteyn I S, Ryzhik I M. Table of Integrals, Series and Priducts (Academic Press, U.S.A. 1980)

[5] Chen Xiangjun, Liu Lianshou. High Energ. Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1997, **21**(5):425
(陈相君,刘连寿.高能物理与核物理,1997, **21**(5):425)

[6] Chen Xiangjun, Liu Lianshou. High Energ. Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1995, **19**(10):907
(陈相君,刘连寿.高能物理与核物理, 1995, **19**(10): 907)

Dimensional Regularization and Analytical Continuation at Finite Temperature *

Chen Xiangjun

(*Department of Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin,* 150001)

Liu Lianshou

(*Institute of Partical Physics, Huazhong Normal University, Wuhan,* 430079)

Received 24 April 1997

Abstract　The relationship between dimensional regularization and analytical continuation of infrared divergent integrals at finite temperature is discussed and a method of regularization of infrared divergent integrals and infrared divergent sums is gevin.

Key words　dimesional regularization, infrared divergence, analysis continuation

Received 24 April 1997

* Supported by the National Natural Science Foundation of China