第22卷 第5期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol.22, No.5
1998 年5月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　May, 1998

边界不相关可积系统中无穷多运动积分的研究(I)*

陈一新　罗旭东

(浙江大学近代物理中心和浙江大学物理系　杭州　310027)

摘要　借助于经典可积系统中的零曲率条件,得到了边界不相关条件下二维可积系统的运动积分生成函数,及其边界 $K_\pm$ 矩阵的求解方程;而可积边界条件将由 $K_\pm$ 矩阵的求解过程中得出. 本文给出的边界不相关可积系统的哈密顿表述,可用于比 E.K.Sklyanin 方式更广的范围.

关键词　边界不相关条件下的经典可积系统　运动积分生成函数　零曲率条件

1　引言

近几年来,带有边界的二维可积场论引起了人们的很大兴趣,其原因不仅来自理论自身的魅力,更由于它可以应用到许多其他领域,如统计系统中与边界相关的临界现象[1]、共形场论的可积形变理论[2]及弦理论[3]的研究中.

对于经典二维可积场论,它拥有一个包含了场方程的零曲率表示[4],在周期或准周期边界条件下,通过其 Lax pair,可以构造出一组相互独立、对合且守恒的无穷多运动积分,正是它们的存在保证了理论的可积性. 在一般情况下,一旦这条件被破坏,以前的运动积分将不再守恒[5]从而破坏了系统原有的可积性. 基于 I.V.Cherednik[6] 的思想, E.K.Sklyanin[7] 发展了一套处理非周期(或准周期)边界条件下可积系统的一般方法,他通过对边界点的场量加以一定的限制条件,从而恢复了理论的可积性,而这样的条件可以通过给边界点附加一定的作用量得到. S.Ghoshal 与 A.B.Zamolodchikov[5] 的分析也证实了这一点.

由于在 E.K.Sklyanin 的方法中,要求经典 r 矩阵必须满足 $r_{12}(\alpha) = -r_{12}(-\alpha)$ 条件. 而 Affine Toda 场论的经典 r 矩阵显然并不都满足这条件;针对该模型经典 r 矩阵的特点, P.Bowcock[8] 等人用另一种方法求出了半无穷区域内、实耦合常数下 Affine Toda 场论的运动积分生成函数. 但对有着更为丰富结构的虚耦合常数 Affine Toda 场论,由于是复场, P.Bowcock 的方法将不再适用.

我们的目的是:对定域于 $[x_-, x_+]$ 区间的系统,在边界不相关条件($x_\pm$ 点之间的边界

1997-06-09收稿
* 国家自然科学基金资助课题

条件无联系)下,找到一个更为普适的运动积分生成函数的表示式,并使它有充分的自由度以处理不同类型的可积模型,从而得到所需的可积边界条件. 本文安排如下:在第二节中,简要回顾周期或准周期边界条件下运动积分生成函数的一般构造方法. 在第三节中,通过零曲率条件获得边界不相关条件下运动积分生成函数的一般表述形式;并通过对合性与守恒性条件,得到了边界 $K_\pm$ 的代数约束方程及演化方程. 在第四节中证明在周期性边界条件下,本文所得到的方法依然有效. 最后在第五节中进行总结.

2 准周期性边界下运动积分的构造[4]

对于二维可积系统,可以通过反散射方法将该系统的场方程包含在一组与之相容的辅助线性化方程中:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= U(x,\ t,\ \alpha)F\\ \frac{\partial F}{\partial t} &= V(x,\ t,\ \alpha)F\\ &\cdots\cdots,\end{aligned} \tag{1}$$

其中 U, V 为矩阵代数,它们包含了场量及一个辅助的参量 α(谱参量),与方程(1)相容,还可得另一个方程:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + [U,\ V] = 0, \tag{2}$$

这称为零曲率条件,而 (U, V) 称为系统的 Lax pair.

定义:如果 γ 是 R^2(欧氏二维空间)中从点 (x_0, t_0) 到点 (x, t) 的一条曲线,那么,从 (x_0, t_0) 到 (x, t) 沿 γ 的平行移动可由下式给出:

$$\Omega_\gamma = \mathrm{P}\exp\left\{\int_\gamma U\mathrm{d}x + V\mathrm{d}t\right\}, \tag{3}$$

上式中,P 表示路径编序. 如果 γ 是一条闭合曲线,则由零曲率条件可得

$$\Omega_\gamma = I \tag{4}$$

这也可称为零曲率条件,其中 I 为单位矩阵.

定义:路径 γ 在时间上固定于 $t = t_0$,空间上从 y 到 $x(x \geqslant y)$ 的平行移动:

$$T(x,\ y,\ t,\ \alpha) = \mathrm{P}\exp\left\{\int_y^x U(x',\ t,\ \alpha)\,\mathrm{d}x'\right\}, \tag{5}$$

称为转换矩阵(transition matrix).

同理,还可以定义 $x = x_0$ 处的"转换矩阵"

$$S(x,\ t_2,\ t_1,\ \alpha) = \mathrm{P}\exp\left\{\int_{t_1}^{t_2} V(x,\ t',\ \alpha)\,\mathrm{d}t'\right\}. \tag{6}$$

对定义于 $[x_-, x_+]$ 区间的可积模型,其准周期边界条件为

$$\begin{aligned}U(x_+,\ t,\ \alpha) &= Q^{-1}(\theta)U(x_-,\ t,\ \alpha)\,Q(\theta)\\ V(x_+,\ t,\ \alpha) &= Q^{-1}(\theta)V(x_-,\ t,\ \alpha)\,Q(\theta),\end{aligned}$$

即边界上的 Lax pair 通过一变换矩阵的相似变换相联系. 进一步,我们有:

$$S(x_+,\ t_2,\ t_1,\ \alpha)=Q^{-1}(\theta)S(x_-,\ t_2,\ t_1,\ \alpha)Q(\theta).$$

由单值矩阵 $T_L(t,\alpha)\equiv T(x_+,x_-,t,\alpha)$，以及零曲率条件

$$S^{-1}(x_-,\ t_2,\ t_1,\ \alpha)T_L^{-1}(t_2,\ \alpha)S(x_+,\ t_2,\ t_1,\ \alpha)T_L(t_1,\ \alpha)=I,$$

可以构造运动积分生成函数

$$F_L=\ln\operatorname{tr}T_L(t,\ \alpha)Q(\theta).\tag{7}$$

使得$\partial_t F_L(\alpha)=0$，即在α的奇点附近，$F_L(\alpha)$按α幂级数展开式中的各阶系数(运动积分)对时间守恒．而各阶系数间的对合性，可以通过张量积 Poisson 括号验证．

定义：张量积 Poisson 括号(定义于$[-L,L]$区间)：

$$\{A\overset{\otimes}{,}B\}=\int_{-L}^{L}\left(\frac{\delta A}{\delta\phi(x)}\otimes\frac{\delta B}{\delta\pi(x)}-\frac{\delta A}{\delta\pi(x)}\otimes\frac{\delta B}{\delta\phi(x)}\right)\mathrm{d}x,\tag{8}$$

其中$\otimes$表示张量积，$\pi(x)$为共轭动量．

对许多可积模型，其 Lax pair 有以下性质(本文中$[,]_-$表示对易子)：

$$\{U(x,\ t,\ \alpha)\overset{\otimes}{,}U(y,\ t,\ \beta)\}=[r(\alpha,\ \beta),\ U(x,\ t,\ \alpha)\otimes I+I\otimes U(x,\ t,\ \beta)]_-\delta(x-y),\tag{9}$$

其中 U 为 $N\times N$矩阵；$r(\alpha,\beta)$为只是与α,β相关的 $N^2\times N^2$函数矩阵(与场量、坐标无关)，它也可以作为这些模型的可积特征，称之为经典r矩阵．上式称为基本 Poisson 括号．而转换矩阵的张量积 Poisson 括号为

$$\{T(x,\ y,\ \alpha)\overset{\otimes}{,}T(x,\ y,\ \beta)\}=[r(\alpha,\ \beta),\ T(x,\ y,\ \alpha)\otimes T(x,\ y,\ \beta)]_-,\ L\geqslant x\geqslant y\geqslant -L.\tag{10}$$

准周期性边界条件中

$$[r(\alpha,\ \beta),\ Q\otimes Q]_-=0,$$

所以最终可得(4)：

$$\{F_L(\alpha)\overset{\otimes}{,}F_L(\beta)\}=0,\tag{11}$$

即由 $F_L(\alpha)$产生的各项运动积分在 Poisson 意义下是对易的．

3　边界不相关条件下运动积分的构造

3.1　运动积分生成函数的构造

除了第二节中的 $T(x,y,t,\alpha)$及 $S(x,t_2,t_1,\alpha)$外，再引入另一个编序积分：

$$F(x,\ t,\ \alpha)=\mathrm{P}\exp\left\{\int_{t_0}^{t}V(x,\ t',\ \alpha)\,\mathrm{d}t'\right\},\tag{12}$$

则有

$$S(x_\pm,\ t_2,\ t_1,\ \alpha)=F(x_\pm,\ t_2,\ \alpha)F^{-1}(x_\pm,\ t_1,\ \alpha).$$

基于定义式(5)和(12)，由零曲率条件可得：

$$F^{-1}(x_+,\ t_1,\ \alpha)T(x_+,\ x_-,\ t_1,\ \alpha)F(x_-,\ t_1,\ \alpha)=$$
$$F^{-1}(x_+,\ t_2,\ \alpha)T(x_+,\ x_-,\ t_2,\ \alpha)F(x_-,\ t_2,\ \alpha).$$

另由谱参量的任意性，在上式中，如取 $-\alpha+\delta$代替α，则可以得到另一等式．而这两者的组合很可能给出我们所需的结果．如果$-\alpha+\delta$不符合后面的要求，则也可以用更一般的谱参量α'代替后再进行后面的运算，从而确定α'的具体形式．

推论：边界不相关条件下可积系统的运动积分生成函数可能为：

$$\mathrm{tr}\{[F(x_+,\ t,\ -\alpha+\delta)F^{-1}(x_+,\ t,\ \alpha)]T(x_+,\ x_-,\ t,\ \alpha)$$
$$[F(x_-,\ t,\ \alpha)F^{-1}(x_-,\ t,\ -\alpha+\delta)]T^{-1}(x_+,\ x_-,\ t,\ -\alpha+\delta)\}.$$

由上面推导可知，表达式对时间的守恒是明显成立的，主要的问题是：1. 它们各自间的张量积 Poisson 括号是否为零；2. 这表达式可能含有由 F 项引入的 t_0. 为了解决这一问题，可引入新变量 $K_\pm$ 以代替各 F 项(这样的变量 $K_\pm$ 物理上对应边界散射矩阵)，而后对新表达式限制以对合性与守恒性. 这样就可以避免以上问题，而这变成了求解 $K_\pm$ 的问题. 即将前面的运动积分生成函数变为

a.

$$\mathrm{tr}\{K_+(x_+,\ t,\ \alpha)T(x_+,\ x_-,\ t,\ \alpha)K_-(x_-,\ t,\ \alpha)T^{-1}(x_+,\ x_-,\ t,\ -\alpha+\delta)\}. \tag{13}$$

类似表达式(13)的产生方式，也可以用"†"(共轭)或"t"(转置)代替"-1"(逆)，即：

b.

$$\mathrm{tr}\{K_+(x_+,\ t,\ \alpha)T(x_+,\ x_-,\ t,\ \alpha)K_-(x_-,\ t,\ \alpha)T^t(x_+,\ x_-,\ t,\ -\alpha+\delta)\}. \tag{14}$$

c.

$$\mathrm{tr}\{K_+(x_+,\ t,\ \alpha)T(x_+,\ x_-,\ t,\ \alpha)K_-(x_-,\ t,\ \alpha)T^\dagger(x_+,\ x_-,\ t,\ -\alpha+\delta)\}. \tag{15}$$

它们也可能是系统的运动积分生成函数，但应注意此时各式中的 $K_\pm$ 与 δ 只是以相同的符号表述而已，其解并一定不相同. 它们将在各自的演化方程中求解.

在本文，主要研究 a 的形式. 对 b 和 c 情形的讨论是与 a 完全类似的.

3.2 生成函数的对合条件

对于 a 式，为了求解方便，先定义

$$\mathscr{T}_+(x,\ \alpha) = T^{-1}(x_+,\ x,\ t,\ -\alpha+\delta)K_+(x_+,\ t,\ \alpha)T(x_+,\ x,\ t,\ \alpha)$$
$$\mathscr{T}_-(x,\ \alpha) = T(x,\ x_-,\ t,\ \alpha)K_-(x_-,\ t,\ \alpha)T^{-1}(x,\ x_-,\ t,\ -\alpha+\delta)$$
$$\mathscr{T}(x,\ \alpha) = \mathscr{T}_-(x,\ \alpha)\mathscr{T}_+(x,\ \alpha).$$

显然，$\mathrm{tr}\mathscr{T}(x,\alpha)$ 正是 a 式中定义的运动积分生成函数.

其次，我们认为：在边界点上，模型原先的 Lax pair 形式将继续保留，即此时保持基本 Poisson 括号形式不变. 最后，对 $K_\pm$ 限制以

$$\{K_\pm(x_\pm,\ t,\ \alpha)\overset{\otimes}{,}T(x_+,\ x_-,\ t,\ \beta)\} = 0. \tag{16}$$

利用 T 的超定域性，直接有

$$\{\mathscr{T}_+(x,\ t)\overset{\otimes}{,}\mathscr{T}_-(x,\ t)\} = 0,$$

即 $\mathscr{T}$ 代数也有超定域性. 当 $K_\pm$ 为常数矩阵时，这条件是显然满足的；但对周期性边界条件，正如在以后可见，含有场量的 $K_\pm$ 是必须的. 因此，在计算中保留 $\{K_\pm\overset{\otimes}{,}K_\pm\}$ 项，并在矩阵上标以 1 或 2 表示它在 1 或 2 空间取值. 直接计算可得

$$\{\overset{1}{\mathscr{T}}_+(x,\ \alpha),\ \overset{2}{\mathscr{T}}_+(x,\ \gamma)\} =$$
$$-r(-\alpha+\delta,\ -\gamma+\delta)\overset{1}{\mathscr{T}}_+(x,\ \alpha)\overset{2}{\mathscr{T}}_+(x,\ \gamma) + \overset{1}{\mathscr{T}}_+(x,\ \alpha)r(\alpha,\ -\gamma+\delta)\overset{2}{\mathscr{T}}_+(x,\ \gamma) +$$
$$\overset{2}{\mathscr{T}}_+(x,\ \gamma)r(-\alpha+\delta,\ \gamma)\overset{1}{\mathscr{T}}_+(x,\ \alpha) - \overset{1}{\mathscr{T}}_+(x,\ \alpha)\overset{2}{\mathscr{T}}_+(x,\ \gamma)r(\alpha,\ \gamma) +$$
$$\overset{2^{-1}}{T}(t,\ -\gamma+\delta)\overset{1^{-1}}{T}(t,\ -\alpha+\delta)[\{\overset{1}{K}_+(\alpha),\ \overset{2}{K}_+(\gamma)\} +$$

$$r(-\alpha+\delta,\ -\gamma+\delta)\overset{1}{K}_+(t,\ \alpha)\overset{2}{K}_+(t,\ \gamma)-\overset{1}{K}_+(t,\ \alpha)r(\alpha,\ -\gamma+\delta)\overset{2}{K}_+(t,\ \gamma)-$$
$$\overset{2}{K}_+(t,\ \gamma)r(-\alpha+\delta,\ \gamma)\overset{1}{K}_+(t,\ \alpha)+\overset{1}{K}_+(t,\ \alpha)\overset{2}{K}_+(t,\ \gamma)r(\alpha,\ \gamma)]\overset{1}{T}(t,\ a)\overset{2}{T}(t,\ \gamma)$$
$$\cdots\cdots. \tag{17}$$

定理 1:可定义一个关于张量积 Poisson 括号的 $\mathscr{T}_+$ 代数,它满足

$$\{\overset{1}{\mathscr{T}}_+(x,\ \alpha),\ \overset{2}{\mathscr{T}}_+(x,\ \gamma)\}=$$
$$-r(-\alpha+\delta,\ -\gamma+\delta)\overset{1}{\mathscr{T}}_+(x,\ \alpha)\overset{2}{\mathscr{T}}_+(x,\ \gamma)+\overset{1}{\mathscr{T}}_+(x,\ \alpha)r(\alpha,\ -\gamma+\delta)\overset{2}{\mathscr{T}}_+(x,\ \gamma)+$$
$$\overset{2}{\mathscr{T}}_+(x,\ \gamma)r(-\alpha+\delta,\ \gamma)\overset{1}{\mathscr{T}}_+(x,\ \alpha)-\overset{1}{\mathscr{T}}_+(x,\ \alpha)\overset{2}{\mathscr{T}}_+(x,\ \gamma)r(\alpha,\ \gamma)$$
$$\cdots\cdots. \tag{18}$$

证明:由 $\mathscr{T}_+$ 的定义式可见,K_+ 为其一个子代数(取 $x=x_+$). 即

$$\{\overset{1}{K}_+(t,\ \alpha),\ \overset{2}{K}_+(t,\ \gamma)\}=$$
$$-r(-\alpha+\delta,\ -\gamma+\delta)\overset{1}{K}_+(t,\ \alpha)\overset{2}{K}_+(t,\ \gamma)+\overset{1}{K}_+(t,\ \alpha)r(\alpha,\ -\gamma+\delta)\overset{2}{K}_+(t,\ \gamma)+$$
$$\overset{2}{K}_+(t,\ \gamma)r(-\alpha+\delta,\ \gamma)\overset{1}{K}_+(t,\ \alpha)-\overset{1}{K}_+(t,\ \alpha)\overset{2}{K}_+(t,\ \gamma)r(\alpha,\ \gamma)$$
$$\cdots\cdots. \tag{19}$$

将之代入(17)式,即可得(18)式,该定义是自洽的. 定理得证.

同理,可计算

$$\{\overset{1}{\mathscr{T}}_-(x,\ \alpha),\ \overset{2}{\mathscr{T}}_-(x,\ \gamma)\}=$$
$$r(\alpha,\ \gamma)\overset{1}{\mathscr{T}}_-(x,\ \alpha)\overset{2}{\mathscr{T}}_-(x,\ \gamma)-\overset{1}{\mathscr{T}}_-(x,\ \alpha)r(-\alpha+\delta,\ \gamma)\overset{2}{\mathscr{T}}_-(x,\ \gamma)-$$
$$\overset{2}{\mathscr{T}}_-(x,\ \gamma)r(\alpha,\ -\gamma+\delta)\overset{1}{\mathscr{T}}_-(x,\ \alpha)+\overset{1}{\mathscr{T}}_-(x,\ \alpha)\overset{2}{\mathscr{T}}_-(x,\ \gamma)r(-\alpha+\delta,\ -\gamma+\delta)+$$
$$\overset{1}{T}(t,\ \alpha)\overset{2}{T}(t,\ \gamma)[\{\overset{1}{K}_-(t,\ \alpha),\ \overset{2}{K}_-(t,\ \gamma)\}-$$
$$r(\alpha,\ \gamma)\overset{1}{K}_-(t,\ \alpha)\overset{2}{K}_-(t,\ \gamma)+\overset{1}{K}_-(t,\ \alpha)r(-\alpha+\delta,\ \gamma)\overset{2}{K}_-(t,\ \gamma)+$$
$$\overset{2}{K}_-(t,\ \gamma)r(\alpha,\ -\gamma+\delta)\overset{1}{K}_-(t,\ \alpha)-\overset{1}{K}_-(t,\ \alpha)\overset{2}{K}_-(t,\ \gamma)r(-\alpha+\delta,\ -\gamma+\delta)]\cdot$$
$$\overset{1^{-1}}{T}(t,\ -a+\delta)\overset{2^{-1}}{T}(t,\ -\gamma+\delta)$$
$$\cdots\cdots. \tag{20}$$

定理 2:可定义一个关于张量积 Poisson 括号的 $\mathscr{T}_-(x,\alpha)$ 代数,它满足

$$\{\overset{1}{\mathscr{T}}_-(x,\ \alpha),\ \overset{2}{\mathscr{T}}_-(x,\ \gamma)\}=$$
$$r(\alpha,\ \gamma)\overset{1}{\mathscr{T}}_-(x,\ \alpha)\overset{2}{\mathscr{T}}_-(x,\ \gamma)-\overset{1}{\mathscr{T}}_-(x,\ \alpha)r(-\alpha+\delta,\ \gamma)\overset{2}{\mathscr{T}}_-(x,\ \gamma)-$$
$$\overset{2}{\mathscr{T}}_-(x,\ \gamma)r(\alpha,\ -\gamma+\delta)\overset{1}{\mathscr{T}}_-(x,\ \alpha)+\overset{1}{\mathscr{T}}_-(x,\ \alpha)\overset{2}{\mathscr{T}}_-(x,\ \gamma)r(-\alpha+\delta,\ -\gamma+\delta)$$
$$\cdots\cdots. \tag{21}$$

该定理的证明类似定理 1. 此时的 $K_-(t,\alpha)$ 代数为

$$\{\overset{1}{K}_-(t,\ \alpha),\ \overset{2}{K}_-(t,\ \gamma)\}=$$
$$r(\alpha,\ \gamma)\overset{1}{K}_-(t,\ \alpha)\overset{2}{K}_-(t,\ \gamma)-\overset{1}{K}_-(t,\ \alpha)r(-\alpha+\delta,\ \gamma)\overset{2}{K}_-(t,\ \gamma)-$$

$$\overset{2}{K}_-(t,\ \gamma)\,r(\alpha,\ -\gamma+\delta)\overset{1}{K}_-(t,\ \alpha)+\overset{1}{K}_-(t,\ \alpha)\overset{2}{K}_-(t,\ \gamma)\,r(-\alpha+\delta,\ -\gamma+\delta)$$

$$\cdots\cdots, \tag{22}$$

所以，由以上过程可见

$$\{\overset{1}{\mathscr{T}}(x,\ \alpha),\ \overset{2}{\mathscr{T}}(x,\ \gamma)\}=$$

$$\{\overset{1}{\mathscr{T}}_-(x,\ \alpha)\overset{1}{\mathscr{T}}_+(x,\ \alpha),\ \overset{2}{\mathscr{T}}_-(x,\ \gamma)\overset{2}{\mathscr{T}}_+(x,\ \gamma)\}=$$

$$\overset{1}{\mathscr{T}}_-(x,\ \alpha)\overset{2}{\mathscr{T}}_-(x,\ \gamma)\{\overset{1}{\mathscr{T}}_+(x,\ \alpha),\ \overset{2}{\mathscr{T}}_+(x,\ \gamma)\}+$$

$$\{\overset{1}{\mathscr{T}}_-(x,\ \alpha),\ \overset{2}{\mathscr{T}}_-(x,\ \gamma)\}\overset{1}{\mathscr{T}}_+(x,\ \alpha)\overset{2}{\mathscr{T}}_+(x,\ \gamma)=$$

$$[r(\alpha,\ \gamma),\ \overset{1}{\mathscr{T}}(x,\ \alpha)\overset{2}{\mathscr{T}}(x,\ \gamma)]_-+[\overset{1}{\mathscr{T}}(x,\ \alpha),\ \overset{2}{\mathscr{T}}_-(x,\ \gamma)\,r(\alpha,\ -\gamma+\delta)\overset{2}{\mathscr{T}}_+(x,\ \gamma)]_-+$$

$$[\overset{2}{\mathscr{T}}(x,\ \gamma),\ \overset{1}{\mathscr{T}}_-(x,\ \alpha)\,r(-\alpha+\delta,\ \gamma)\overset{1}{\mathscr{T}}_+(x,\ \alpha)]_-,$$

显然

$$\{\mathrm{tr}\overset{1}{\mathscr{T}}(x,\ \alpha),\ \mathrm{tr}\overset{2}{\mathscr{T}}(x,\ \gamma)\}=\mathrm{tr}_1\mathrm{tr}_2\{\overset{1}{\mathscr{T}}(x,\ \alpha),\ \overset{2}{\mathscr{T}}(x,\ \gamma)\}=0. \tag{23}$$

应该指出的是：与 E.K.Sklyanin[7]的要求 $r^{12}(\beta)=-r^{12}(-\beta)$不同，在这里，为使 $\mathrm{tr}\mathscr{T}(x,\ \alpha)$在 Poisson 括号意义下对合，经典 r 矩阵只需保证约束方程(19)与(22)中的 $K_\pm$ 有非平凡解存在即可，这比 E.K.Sklyanin[7]的要求要宽(他的方法相当于这里$\delta=0$的特例)．一般而言，谱参量δ的引入，可以有效地扩大我们方案的适用范围；这在(II)部分[9]中，可以从 Affine Toda 场论的例子得到具体验证．对于 $K_\pm$的求解，在实际过程中，通过求解其演化方程(由守恒性得到)，将更为方便．

3.3 生成函数的守恒条件

生成函数的守恒条件可借助转换矩阵随时间的演化方程(这样的方程可由线性化方程(1)建立)，对 a 式直接计算：

$$\partial_t\,\mathrm{tr}\mathscr{T}(x,\ \alpha)=$$

$$\partial_t\,\mathrm{tr}\{K_+(t,\ \alpha)\,T(x_+,\ x_-,\ t,\ \alpha)K_-(t,\ \alpha)\,T^{-1}(x_+,\ x_-,\ t,\ -\alpha+\delta)\}=$$

$$\mathrm{tr}\{[\partial_t K_+(t,\ \alpha)-V(x_+,\ t,\ -\alpha+\delta)K_+(t,\ \alpha)+K_+(t,\ \alpha)V(x_+,\ t,\ \alpha)]$$

$$T(x_+,\ x_-,\ t,\ \alpha)K_-(t,\ \alpha)\,T^{-1}(x_+,\ x_-,\ t,\ -\alpha+\delta)+$$

$$[\partial_t K_-(t,\ \alpha)-V(x_-,\ t,\ \alpha)K_-(t,\ \alpha)+K_-(t,\ \alpha)V(x_-,\ t,\ -\alpha+\delta)]$$

$$T^{-1}(x_+,\ x_-,\ t,\ -\alpha+\delta)K_+(t,\ \alpha)\,T(x_+,\ x_-;\ t,\ \alpha)\}$$

$$\cdots\cdots, \tag{24}$$

因此，在边界不相关条件下，如以 a 式为运动积分生成函数，则上式中两边界点的方程必须分别为零，这样才不会产生两边界点相关联的情况．即：

$$\partial_t K_+(t,\ \alpha)-V(x_+,\ t,\ -\alpha+\delta)K_+(t,\ \alpha)+K_+(t,\ \alpha)V(x_+,\ t,\ \alpha)=0$$

$$\partial_t K_-(t,\ \alpha)-V(x_-,\ t,\ \alpha)K_-(t,\ \alpha)+K_-(t,\ \alpha)V(x_-,\ t,\ -\alpha+\delta)=0. \tag{25}$$

这是关于 $K_\pm(t,\alpha)$的演化方程．由于在整个定义区间，其 Lax pair 为相同的表述形式．因此，$K_-(t,\alpha)$与 $K_+^{-1}(t,\alpha)$的演化方程的形式将是相同的，它们的通解形式相同．这意味着：如果解 $K_-(t,\alpha)$的完全集为 $\{K_{-(1)},K_{-(2)},\cdots\}$，则在不考虑坐标 x_+与 x_-的差异时，

$K_+(t,\alpha)$解的完全集必定是 $\{K_{-(1)}^{-1}, K_{-(2)}^{-1}, \cdots\}$，两者间存在一个同构 $K_+ = f(K_-)$.

如果将 $K_+(t,\alpha)$的代数约束方程(19)以 $K_+^{-1}(t,\alpha)$的形式表示后，再与 $K_-(t,\alpha)$的代数约束方程(22)相比较，则由于 $K_-(t,\alpha)$与 $K_+^{-1}(t,\alpha)$的通解形式相同，所以为使它们均有非平凡解存在，必须有：

$$\{\overset{1}{K}_+(t,\ \alpha),\ \overset{2}{K}_+(t,\ \gamma)\} = \{\overset{1}{K}_-(t,\ \alpha),\ \overset{2}{K}_-(t,\ \gamma)\} = 0\,.$$

显然，只含普通数的 $K_\pm$ 是自然满足这一要求的，但满足上述关系的 $K_\pm$ 也可依赖于系统的动力学变量. 进而 $K_\pm(t,\alpha)$的代数约束方程变为

$$\begin{aligned}
0 = & -r(-\alpha+\delta,\ -\gamma+\delta)\overset{1}{K}_+(t,\ \alpha)\overset{2}{K}_+(t,\ \gamma) + \overset{1}{K}_+(t,\ \alpha)\, r(\alpha,\ -\gamma+\delta)\overset{2}{K}_+(t,\ \gamma) + \\
& \overset{2}{K}_+(t,\ \gamma)\, r(-\alpha+\delta,\ \gamma)\overset{1}{K}_+(t,\ \alpha) - \overset{1}{K}_+(t,\ \alpha)\overset{2}{K}_+(t,\ \gamma)\, r(\alpha,\ \gamma) \\
0 = & \, r(\alpha,\ \gamma)\overset{1}{K}_-(t,\ \alpha)\overset{2}{K}_-(t,\ \gamma) - \overset{1}{K}_-(t,\ \alpha)\, r(-\alpha+\delta,\ \gamma)\overset{2}{K}_-(t,\ \gamma) - \\
& \overset{2}{K}_-(t,\ \gamma)\, r(\alpha,\ -\gamma+\delta)\overset{1}{K}_-(t,\ \alpha) + \overset{1}{K}_-(t,\ \alpha)\overset{2}{K}_-(t,\ \gamma)\, r(-\alpha+\delta,\ -\gamma+\delta) \\
& \cdots\cdots.
\end{aligned} \tag{26}$$

在求解 $K_\pm$ 的演化方程时，可以通过找一个较简单的解(即 $K_\pm$ 仅由普通数构成)，将方程简化为

$$\begin{aligned}
& V(x_+,\ t,\ -\alpha+\delta)K_+(t,\ \alpha) = K_+(t,\ \alpha)V(x_+,\ t,\ \alpha) \\
& V(x_-,\ t,\ \alpha)K_-(t,\ \alpha) = K_-(t,\ \alpha)V(x_-,\ t,\ -\alpha+\delta),
\end{aligned} \tag{27}$$

再由 $K_\pm(\alpha)$为非奇异矩阵得到

$$\det V(x_\pm,\ t,\ -\alpha+\delta) = \det V(x_\pm,\ t,\ \alpha)\,. \tag{28}$$

由此解得δ后，将它代入(27)式，从而可得到具体的 $K_\pm$ 值. 在此求解过程中，将会看到，$K_\pm$ 解的存在，并不是无条件满足的；而为使方程有解，必将自然引入边界条件的限制. 也就是说，边界条件是隐含在 $K_\pm$ 矩阵的演化方程中的. 对于仅由普通数构成的 $K_\pm$，可以较方便地找到可积边界条件.

但是，正如后面可见，随时间变化的、甚至含场量及其导数的 $K_\pm$ 矩阵的存在也是有实际意义的：一方面，通过引入含场量的 $K_\pm$ 矩阵，可以有效地将我们的方案恢复到周期性边界条件中去，从而保证理论的一致性；另一方面，对随时间变化的 $K_\pm$ 矩阵的研究，可以加深对边界不相关条件下可积模型的理解.

同时应指出的是，在这里，$K_\pm$ 是由其演化方程求出的；对经典 r 矩阵的限制条件由 $K_\pm$ 的代数约束方程(26)给出. 而 E.K.Sklyanin[7]的方法是先限制$\delta=0$，同时令 $K_\pm$ 仅由普通数构成，而且经典 r 矩阵必须满足 $r_{12}(\beta) = -r_{12}(-\beta)$条件，这使得经典 r 矩阵一般没有这一性质的 Affine Toda 场论不能以他的方案统一表述[8]. 事实上，从推导过程可以看出，如先令$\delta=0$，则一旦(28)式不成立(即$\partial_t K_\pm \neq 0$)，$K_\pm$ 将只能通过(25)式(取$\delta=0$)求解，而这一偏微分方程的求解将极为复杂，甚至于其解的存在与否也很难断言. 这正是 P. Bowcock[8]等人寻找其它方案的根本所在. 与他们不同，在本文中，只需引入待定参数δ，就可以通过(27)与(28)式有效地简化 $K_\pm$ 的求解了.

定理 3：$\mathrm{tr}\mathscr{T}(x,\ \alpha)$在 $K_\pm$ 满足其代数约束方程(26)及演化方程(25)时，它是该可积系统的无穷多运动积分的生成函数.

该定理的成立在前面的推导过程中是显而易见的．这里存在的主要问题是：$K_\pm$ 满足的代数约束方程(26)与其演化方程(25)是否相容．我们注意到，在 Sine–Gordon理论[7]与实耦合常数的 Affine Toda 场论[8]中，它们确是相容的．对于一般意义下的证明，尚待进一步的研究．

这里要强调指出的是，对于系统运动积分的计算，其一般的步骤是：先求出 T 矩阵在奇点 $-\alpha+\delta$、α 附近的具体表达式，由此求得周期性边界条件下的运动积分；然后通过 $K_\pm$ 的演化方程得到可积边界条件与 $K_\pm$ 矩阵；最后将所得到的各项代入此时采用的运动积分生成函数中，从而得到边界不相关条件下的运动积分．

3.4　对其它生成函数形式的讨论

同理，对 b，c 式，可以由对合性与守恒性条件得到其边界 $K_\pm$ 矩阵的代数约束方程及演化方程．对 b 式：

$$
\begin{aligned}
0 = {} & r^{t}(-\alpha+\delta,\ -\gamma+\delta)\overset{1}{K}_{+}(t,\ \alpha)\overset{2}{K}_{+}(t,\ \gamma)+\overset{1}{K}_{+}(t,\ \alpha)\,r^{t_2}(\alpha,\ -\gamma+\delta)\overset{2}{K}_{+}(t,\ \gamma)+ \\
& \overset{2}{K}_{+}(t,\ \gamma)\,r^{t_1}(-\alpha+\delta,\ \gamma)\overset{1}{K}_{+}(t,\ \alpha)+\overset{1}{K}_{+}(t,\ \alpha)\overset{2}{K}_{+}(t,\ \gamma)\,r(\alpha,\ \gamma) \\
0 = {} & r(\alpha,\ \gamma)\overset{1}{K}_{-}(t,\ \alpha)\overset{2}{K}_{-}(t,\ \gamma)+\overset{1}{K}_{-}(t,\ \alpha)\,r^{t_1}(-\alpha+\delta,\ \gamma)\overset{2}{K}_{-}(t,\ \gamma)+ \\
& \overset{2}{K}_{-}(t,\ \gamma)\,r^{t_2}(\alpha,\ -\gamma+\delta)\overset{1}{K}_{-}(t,\ \alpha)+\overset{1}{K}_{-}(t,\ \alpha)\overset{2}{K}_{-}(t,\ \gamma)\,r^{t}(-\alpha+\delta,\ -\gamma+\delta) \\
& \cdots\cdots,
\end{aligned}
\tag{29}
$$

其中的上标“$t_i\ (i=1,2)$”表示只对 i 空间转置，而“t”表示对 1，2 空间均转置．

$$
\begin{aligned}
0 &= \partial_t K_{+}(t,\ \alpha)+V^{t}(x_{+},\ t,\ -\alpha+\delta)K_{+}(t,\ \alpha)+K_{+}(t,\ \alpha)V(x_{+},\ t,\ \alpha) \\
0 &= \partial_t K_{-}(t,\ \alpha)-V(x_{-},\ t,\ \alpha)K_{-}(t,\ \alpha)-K_{-}(t,\ \alpha)V^{t}(x_{-},\ t,\ -\alpha+\delta) \\
& \cdots\cdots,
\end{aligned}
\tag{30}
$$

这是其边界 $K_\pm$ 矩阵的代数约束方程与演化方程．而对于 c 式的求解，只需在 b 式的求解过程中，将“t”(转置)换为“†”(共轭)，即可得到．当这些方程成立时，b，c 式也可作为运动积分的生成函数．而这几类生成函数间的内在联系，将在(II)部分进一步阐述说明．

4　周期性边界条件下的生成函数

本节中，将证明我们给出的运动积分生成函数在周期性边界条件下，给出与通常在经典反散射中应用单个 T 表示的生成函数相同的结果．

在谱参量 α 的奇点附近，转换矩阵可分解为

$$
T(x,\ y,\ \alpha)=[I+W(x,\ \alpha)]\exp[Z(x,\ y,\ \alpha)][I+W(y,\ \alpha)]^{-1},
\tag{31}
$$

其中 I 为单位矩阵，W 为对角元为 0 的矩阵，Z 为纯对角矩阵．在此基础上，将对角矩阵 Z 作以下分解

$$
Z(x,\ y,\ \alpha)=\int_y^x Z_1(x',\ \alpha)\,\mathrm{d}x'+\int_y^x[\partial_{x'}Z_2(x',\ \alpha)]\,\mathrm{d}x',
\tag{32}
$$

其中 $Z_1(x',\ \alpha)$ 为非纯导数(对坐标)的积分元，它体现了模型的“bluk”的性质；而 Z 中坐标纯导数的积分元则为 $\partial_{x'}Z_2(x',\ \alpha)$ 的形式，显然，积分后它将只与两边界点的性质有关．

同理，对谱参量的另一个奇点β，$T(x, y, \beta)$也有相同的分解形式．为了防止与α奇点产生混淆，在β的展开式中，分别以W'，Z'，Z_1'，Z_2'，取代W，Z，Z_1，Z_2，而其矩阵性质相同．

另由张量积 Poission 括号性质可得

$$\{\overset{1}{T}(x, x_0, t, \alpha), \overset{2}{T}(x_0, y, t, \beta)\} = 0 \quad x > x_0 > y .$$

即：如α，β为奇点，则在考虑到基本 Poission 括号的超局域性后可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\exp\left[\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} Z_1(\alpha)\,\mathrm{d}x' - Z_2(x_0, \alpha)\right][I+W(x_0, \alpha)]^{-1}\overset{\otimes}{,}\right.$$
$$\left.[I+W'(x_0, \beta)]\exp\left[\int_{x_0-\Delta x}^{x_0} Z_1'(\beta)\,\mathrm{d}x' + Z_2'(x_0, \beta)\right]\right\} = 0 .$$

将之按 derivation 性质展开后，在$\Delta x\to 0$时，比较展开式中各项的数量级，最终可得

$$\{\exp[-Z_2(x_0, \alpha)][I+W(x_0, \alpha)]^{-1}\overset{\otimes}{,}[I+W'(x_0, \beta)]\exp[Z_2'(x_0, \beta)]\} = 0$$

或

$$\{[I+W(x_0, \alpha)]\exp[Z_2(x_0, \alpha)]\overset{\otimes}{,}[I+W'(x_0, \beta)]\exp[Z_2'(x_0, \beta)]\} = 0. \tag{33}$$

在周期性边界条件下，注意到δ可能的任意性，先引入$K_\pm(t, \alpha, \delta)$代替原先的$K_\pm(t, \alpha)$，以区别不同δ的$\mathrm{tr}\mathscr{T}(\alpha, -\alpha+\delta)$中的$K_\pm$．则当取$(\beta = -\alpha+\delta)$

$$K_+(t, \alpha, \delta) = [I+W'(x_+, \beta)]\exp[Z_2'(x_+, \beta)]\exp[-Z_2(x_+, \alpha)][I+W(x_+, \alpha)]^{-1}$$

$$K_-(t, \alpha, \delta) = [I+W(x_-, \alpha)]\exp[Z_2(x_-, \alpha)]\exp[-Z_2'(x_-, \beta)][I+W'(x_-, \beta)]^{-1}$$

$$\cdots\cdots, \tag{34}$$

时，显然有$K_+K_- = I$；$\{K_\pm\overset{\otimes}{,}T\} = \{K_+\overset{\otimes}{,}K_-\} = 0$. 再注意到周期性边界条件($V(x_+, t, \alpha) = V(x_-, t, \alpha)$)后，可得

$$\begin{aligned}&\partial_t \mathrm{tr}\mathscr{T}(x, \alpha) = \\ &\mathrm{tr}\{(\partial_t K_+(t, \alpha, \delta)K_+^{-1}(t, \alpha, \delta) - V(x_+, t, -\alpha+\delta) + K_+(t, \alpha, \delta)V(x_+, t, \alpha) \\ &K_+^{-1}(t, \alpha, \delta))[K_+(t, \alpha, \delta)T(x_+, x_-, t, \alpha)K_-(t, \alpha, \delta), \\ &T^{-1}(x_+, x_-, t, -\alpha+\delta)]_-\} = 0,\end{aligned}$$

这里在$[,]_-$因子中代入(31)及(34)后正好为0．即满足守恒性要求．同时应该指出的是，在以上求解过程中，δ的取值是没有限制的．这与边界不相关条件下是很不同的．

下面考虑在张量积 Poission 括号意义下，取不同δ值的$\mathrm{tr}\mathscr{T}(x, \alpha, \delta_1)$与$\mathrm{tr}\mathscr{T}(x, \alpha, \delta_2)$间是否对合．由于此时$K_\pm(t, \alpha, \delta)$的取值形式为(34)式，因此，它总是能够满足前面(16)式的要求．即可以沿用(17)与(20)的推导过程：在 1 空间中取$\delta = \delta_1$、2 空间中取$\delta = \delta_2$后(经典r矩阵中也作相应取值)，就可以得到类似(17)与(20)的形式．在tr_{12}意义下，它们的前四项将相抵消．即

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}_{12}\{\overset{1}{\mathscr{T}}(x, \alpha, \delta_1), \overset{2}{\mathscr{T}}(x, \gamma, \delta_2)\} = \\ &\mathrm{tr}_{12}[\{\overset{1}{\mathscr{T}}_-, \overset{2}{\mathscr{T}}_-\}\overset{1}{\mathscr{T}}_+\overset{2}{\mathscr{T}}_+ + \overset{1}{\mathscr{T}}_-\overset{2}{\mathscr{T}}_-\{\overset{1}{\mathscr{T}}_+, \overset{2}{\mathscr{T}}_+\}] = \\ &\mathrm{tr}_{12}\{(r(\alpha, \gamma) - \overset{1^{-1}}{K_+}(\alpha, \delta_1)\,r(\alpha', \gamma)\overset{1}{K_+}(\alpha, \delta_1) - \overset{2^{-1}}{K_+}(\alpha, \delta_2)\,r(\alpha, \gamma')\overset{2}{K_+}(\alpha, \delta_2) +\end{aligned}$$

$$\overset{1^{-1}}{K}_+(\alpha,\ \delta_1)\overset{2^{-1}}{K}_+(\alpha,\ \delta_2)\, r(\alpha',\ \gamma')\overset{1}{K}_+(\alpha,\ \delta_1)\overset{2}{K}_+(\alpha,\ \delta_2))$$

$$[\overset{1}{T}(\alpha)\overset{2}{T}(\gamma),\ \overset{1}{K}_-(\alpha,\ \delta_1)\overset{1^{-1}}{T}(\alpha')\overset{1}{K}_+(\alpha,\ \delta_1)\overset{2}{K}_-(\gamma,\ \delta_2)\overset{2^{-1}}{T}(\gamma')\overset{2}{K}_+(\gamma,\ \delta_2)]_-\} = 0$$

$$\cdots\cdots, \tag{35}$$

其中$\alpha' = -\alpha + \delta_1$, $\gamma' = -\gamma + \delta_2$. 这里$[,]_-$因子也为0. 这说明,如以 $\mathrm{tr}\mathscr{T}(x,\ \alpha,\ \delta)$ 为运动积分生成函数,则在张量积 Poisson 括号意义下,不但相同δ值的 $\mathrm{tr}\mathscr{T}(x,\ \alpha,\ \delta)$ 之间是对合的;而且取不同δ值的 $\mathrm{tr}\mathscr{T}(x,\ \alpha,\ \delta)$ 之间,也是对合的. 在 $K_\pm$ 取(34)式后,即可得到

$$\mathrm{tr}\mathscr{T}(x,\ \alpha,\ \delta) = \mathrm{tr}\{\exp[Z(x_+,\ x_-,\ t,\ \alpha) - Z'(x_+,\ x_-,\ t,\ -\alpha+\delta)]\}.$$

则取生成函数的更具体形式 $\ln\ \mathrm{tr}\mathscr{T}(x,\ \alpha,\ \delta)$ 后可见,这正是拥有两个奇点$(\alpha;\ -\alpha+\delta)$ 的 Lax pair 的可积模型在周期性边界条件下的运动积分生成方式[4]. 这说明,我们的方案是可以恢复到周期性边界条件下的,而此时的边界 $K_\pm$ 矩阵的确是含有场量的.

至此,我们已经证明了:在周期性边界条件下,本文给出的运动积分生成函数回复到了通常的守恒量生成函数.

5 总结

本文通过零曲率条件,得到了拥有基本 Poisson 括号的可积模型在边界不相关条件下的运动积分生成函数;并由对合性与守恒性条件获得边界 $K_\pm$ 矩阵的求解方程(演化方程),而可积边界条件正是隐含在这一求解过程中的;另外,我们还得到了 $K_\pm$ 的代数约束方程. 结果表明,一个新参数δ的引入是必要的,正是它的存在,我们可以将本文的结果应用到 E.K.Sklyanin 理论所不能解决的问题中去,比如 Affine Toda 场论等;关于这些具体的例子,将在以后讨论.

参 考 文 献

[1] Binder. in Phase Transitions and Critical Phenomena Vol.8, eds. Domb C, Lebowitz J. Academic Publisher, London 1983

[2] Cardy J. Nucl. Phys., 1989, **B324**:581—596; Cardy J, Lewellen D. Phys. Lett., 1991, **B259**:274—278

[3] Witten E. Phys. Rev., 1992, **D46**:5469—5473

[4] Ghoshal S, Zamolodchikov A B. Int. J. Mod. Phys., 1994, **A9**:3841—3885

[5] Faddeev L D, Takhtajan A B. Hamiltonian Methods in the Theory of Soliton. Springer Verlag, 1987

[6] Cherdnik I V. Theor. Mat. Fiz., 1984. **61**:977—983

[7] Sklyanin E K. Funct. Anal. Appl., 1987, **21**:164—166; J. Phys., 1988, **A21**:2375—2389

[8] Bowcock P, Corrigan E, Dorey P E, Rietdijk R H. Nucl. Phys., 1995, **B445**:469—500

A Study on Infinite Number of Integrals of Motion in Classically Integrable System With Boundary (I) *

Chen Yixin　　Luo Xudong

(*Zhejiang Institute of Modern Physics and Department of Physics, Zhejiang University Hangzhou* 310027)

Abstract By the zero curvature condition in classically integrable system, the generating functions for integrals of motion and equations for solving $K_{\pm}$ matrices are obtained in two-dimensional integrable systems on a finite intervel with independent boundary conditions on each end. Classically integrable boundary conditions will be found by solving $K_{\pm}$ matrices. In this paper, we develop a Hamiltonian method in classically integrable system with independent boundary conditions on eath end. Our result can be applied to more integrable systems than those associated with E. K. Sklyanin's approach.

Key words classically integrable system with independent boundary conditions on each end, generating functions for integrals of motion, zero curvature condition

Received 9 June 1997

* Supported by the National Natural Science Foundation of China