暗物质粒子的质量与物态*

黄 无 量

(中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

1996-05-30收稿

摘　要

讨论一类与宇宙超大尺度结构有关的、稳定的弱作用暗物质粒子，它们很可能是处在简并态的费米子(也可能处在近高温态)和处在近高温态的玻色子，其质量均为 $\sim 10^{-1}$eV，而其化学势的绝对值均远小于 10^{-1}eV，这个结果与超高能原初宇宙线能谱在 $\sim 10^{15}$eV 及 $\sim 10^{18}$eV 附近出现拐折的现象不相矛盾.

关键词 暗物质，物态，费米子，玻色子.

在文献[1]中，我们讨论了一类与宇宙超大尺度结构有关联的暗物质粒子，其质量为 $\sim 10^{-1}$eV. 本文则在宇宙学标准模型(RWF宇宙)下，着重讨论当这类稳定的弱作用费米子(f粒子)平均地充满整个宇宙时，通过有关方程以及与宇宙超大尺度结构有关的约束条件，实际解出暗物质粒子的质量与物态. 首先，第一节根据暗物质粒子温度的演化方程、非相对论性费米子的密度方程以及暗物质介质中的声速方程(约束条件)，定出暗物质粒子的质量 m_f、温度 T_f 和化学势 μ_f; 第二节根据f粒子比熵不变的假设，当f粒子由相对论性粒子演化为非相对论性粒子时求出它们的 γ 值，$\gamma \equiv \frac{\mu_f}{kT_f}$. 这时，可以用求得的 γ 值取代第一节中的温度演化方程，从而仍可解得 m_f、T_f、μ_f 值; 第三节是修正，即考虑到多种暗物质粒子同时存在时对声速方程有所修正以及考虑到f粒子并非均匀分布而是成团等情况; 第四节说明当本文所论及的这类暗物质粒子为玻色子(b粒子)时的相应结果; 最后是讨论.

1 正常演化条件下的f粒子

若f粒子退耦时为相对论性粒子，那么它们现时的温度可按下式来估算:

$$T_f = \frac{kT_{f0}T_{\gamma 0}}{m_f c^2 + kT_{\gamma 0}}, \tag{1}$$

其中 $T_{\gamma 0}$ 是现时微波背景温度，$T_{\gamma 0} = 2.7$K; T_{f0} 是当 $m_f = 0$ 时，现时f粒子的温度. 若

* 国家自然科学基金资助.

f 粒子为中微子，则 $T_{f0}=1.9\mathrm{K}$．当 $m_f c^2 \gg kT_{\gamma 0}$ 时，(1)式可简化为

$$T_f=\frac{kT_{f0}T_{\gamma 0}}{m_f c^2}\ . \tag{2}$$

由于现时观测到的宇宙中存在着大尺度结构，故现时的暗物质粒子作为背景粒子只可能处在非相对论性状态，否则大尺度结构将被自由流所擦去．这样，不妨设 f 粒子的平均热运动速度 $\bar{v}<0.1c$，而 $\bar{v}$ 可表达为

$$\bar{v}=\sqrt{\frac{2kT_f}{m_f}}\int_0^\infty \frac{z\mathrm{d}z}{\exp(z-\gamma)+1}\Bigg/\int_0^\infty \frac{\sqrt{z}\ \mathrm{d}z}{\exp(z-\gamma)+1}\ ; \tag{3}$$

另一方面，f 介质中的声速 v_s 为

$$v_s=\sqrt{\frac{10kT_f}{9m_f}\int_0^\infty \frac{z^{3/2}\mathrm{d}z}{\exp(z-\gamma)+1}\Bigg/\int_0^\infty \frac{\sqrt{z}\ \mathrm{d}z}{\exp(z-\gamma)+1}}\ , \tag{4}$$

计算表明 $\bar{v}/v_s\sim 1$，所以 $v_s<0.1c$．根据有关宇宙超大尺度结构的观测结果[2－4]，我们知道其标度已达视界的 1%—10%，参照文[6]，取 $v_s=0.01c-0.1c$，以此作为求解 f 粒子物态的约束条件．

至于 f 粒子的质量密度方程则为[5]

$$\rho_f=\frac{g m_f^{5/2}(kT_f)^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty \frac{\sqrt{z}\ \mathrm{d}z}{\exp(z-\gamma)+1}\ , \tag{5}$$

其中 g 是 f 粒子的品种数与自旋态数的乘积．在标准宇宙学模型下，宇宙临界密度 $\rho_c=\dfrac{3H_{100}^2}{8\pi G}$，$H_{100}=100\mathrm{km}\cdot\mathrm{sec}^{-1}\cdot\mathrm{Mpc}^{-1}$，于是

$$\rho_f=\Omega_f\rho_c h^2,\quad \Omega_f\leqslant 1, \tag{6}$$

其中 $h=\dfrac{H_0}{H_{100}}$，H_0 为现时的哈勃常数．由(2)、(4)—(6)式就能解出 m_f、T_f 及 μ_f．参数的取值范围为 $g=1-6$，$\Omega_f=0.3-1$，$h=0.5-1$．取 $T_{f0}=1.9\mathrm{K}$，计算结果如下：

表　1

W	v_s/c	m_f(eV)	T_f(K)	μ_f(eV)	γ
1	0.01	0.170	2.5×10^{-3}	2.6×10^{-5}	120
1	0.10	0.031	1.4×10^{-2}	4.7×10^{-4}	380
80	0.01	0.057	7.7×10^{-3}	0.9×10^{-5}	13.5
80	0.10	0.010	4.4×10^{-2}	1.6×10^{-4}	43

表中
$$W \equiv \frac{g}{\Omega_{\rm f} h^2}, \tag{7}$$
按照 g、$\Omega_{\rm f}$、h 的取值范围，W 的取值范围为 $W=1$—80. 由表1可见，$m_{\rm f} \sim 10^{-1}$—10^{-2}eV, $T_{\rm f} \sim 10^{-3}$—10^{-2}K, $\mu_{\rm f} \sim 10^{-5}$—10^{-4}eV; 另外，由 γ 值可见 f 粒子处在简并态. 令
$$J_a \equiv \int_0^\infty \frac{z^a {\rm d}z}{\exp(z-\gamma)+1}, \tag{8}$$
由(4)—(6)式得
$$m_{\rm f}^4 = \frac{\pi^2 \hbar^3 \rho_{\rm c}}{W v_{\rm s}^3} \cdot \frac{2^2 \cdot 5^{3/2}}{3^3} \cdot \frac{J_{3/2}^{3/2}}{J_{1/2}^{5/2}}. \tag{9}$$
简并近似下该式退化为
$$m_{\rm f}^4 = \frac{2}{3^{1/2}} \frac{\pi^2 \hbar^3 \rho_{\rm c}}{W v_{\rm s}^3}, \tag{10}$$
由该式可直接解出 $m_{\rm f}$ 值，而(4)式则退化为
$$v_{\rm s} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\mu_{\rm f}}{m_{\rm f}}}, \text{ 即 } \mu_{\rm f} = \frac{3}{2} m_{\rm f} v_{\rm s}^2, \tag{11}$$
由此可解出 $\mu_{\rm f}$ 值. 至于 $T_{\rm f}$，则由(2)式解得. 不难看出 $m_{\rm f} \propto W^{-\frac{1}{4}}$、$T_{\rm f} \propto W^{\frac{1}{4}}$、$\mu_{\rm f} \propto W^{-\frac{1}{4}}$，它们对 g、$\Omega_{\rm f}$、h 参数的选取是不敏感的；另一方面，$m_{\rm f} \propto v_{\rm s}^{-\frac{3}{4}}$、$T_{\rm f} \propto v_{\rm s}^{\frac{3}{4}}$、$\mu_{\rm f} \propto v_{\rm s}^{\frac{5}{4}}$，它们对 $v_{\rm s}$ 值的选取是敏感的. 由(10)、(11)式还可以看到 $m_{\rm f}$、$\mu_{\rm f}$ 与 $T_{\rm f0}$ 值无关.

2 γ值已知条件下的f粒子

根据宇宙演化的等熵假设，每一个 f 粒子的熵(比熵 S/N)在宇宙演化过程中为一常数:
$$S/N = \frac{k}{3}\left\{\int_0^\infty z^{3/2}\left(z+\frac{2m_{\rm f}c^2}{kT_{\rm f}}\right)^{3/2}\frac{{\rm d}z}{\exp(z-\gamma)+1} + 3\int_0^\infty \left(z+\frac{m_{\rm f}c^2}{kT_{\rm f}}\right)\sqrt{z\left(z+\frac{2m_{\rm f}c^2}{kT_{\rm f}}\right)} \cdot \frac{(z-\gamma)\,{\rm d}z}{\exp(z-\gamma)+1}\right\} \div \int_0^\infty \frac{{\rm d}z}{\exp(z-\gamma)+1}\left(z+\frac{m_{\rm f}c^2}{kT_{\rm f}}\right)\sqrt{z\left(z+\frac{2m_{\rm f}c^2}{kT_{\rm f}}\right)}. \tag{12}$$
在相对论性条件下(12)式变为 $S/N = \frac{k}{3} \frac{4J_3 - 3J_2\gamma}{J_2}$，在非相对论性条件下则变为 $S/N = \frac{k}{3} \frac{5J_{3/2} - 3J_{1/2}\gamma}{J_{1/2}}$. 当 f 粒子处在相对论性条件下(未退耦前)，其化学势有二种

典型的取值[7]：其一是 $\gamma \gg 1$（简并态），其二是 $\gamma=0$. 根据(12)式，计算表明对于前者，当 f 粒子变为非相对论性粒子时仍处在简并态；对于后者，γ 值则由零值移至 $\gamma \doteq -1.62$. 一旦 γ 值已知，可由(9)式直接解得 m_f 值. 当 $\gamma=0$ 时，(9)式中因子 $\dfrac{J_{3/2}^{3/2}}{J_{1/2}^{5/2}}=3.268$，当 $\gamma=-1.62$ 时变为 11.74，即 m_f 值略有上升. T_f 将由(4)式得出：

$$T_f=\frac{9m_f v_s^2}{10k}\cdot\frac{J_{1/2}}{J_{3/2}}, \tag{13}$$

而

$$\mu_f=\gamma k T_f. \tag{14}$$

当 γ 值更小时（高温近似），(9)、(13)、(14)式退化为

$$m_f^4=\left(\frac{10\pi}{3}\right)^{3/2}\frac{\hbar^3\rho_c}{Wv_s^3}\cdot e^{-\gamma}, \tag{15}$$

$$T_f=\frac{3}{5}\frac{m_f v_s^2}{k}, \tag{16}$$

$$\mu_f=\gamma k T_f=\frac{3}{5}m_f v_s^2\gamma. \tag{17}$$

不妨取 $\gamma=-1.62$，由(9)、(13)、(14)式计算得到

表　2

W	v_s/c	m_f(eV)	T_f(K)	μ_f(eV)
1	0.01	0.35	0.24	-3.3×10^{-5}
1	0.1	0.063	4.2	-5.9×10^{-4}
80	0.01	0.12	0.08	-1.1×10^{-5}
80	0.1	0.021	1.4	-2.0×10^{-4}

与表 1 相比较，可见 m_f 值与 μ_f 的绝对值仍分别落在 10^{-1}—10^{-2}eV 及 10^{-5}—10^{-4}eV 范围内，而 T_f 值则明显上升，按标准宇宙学演化模型这是一个疑难.

3　修　正

(1)　若暗物质由多种成份组成，则声速将有所变化，即(4)式变为

$$v_s=\frac{1}{K_1}\sqrt{\frac{10}{9}\frac{kT_f}{m_f}\frac{J_{3/2}}{J_{1/2}}}. \tag{18}$$

一般而言，当存在较 f 粒子重的暗物质粒子时 $K_1>1$，反之则 $K_1<1$. 不难看出，简并近似下 $m_f\propto K_1^{3/2}$、$T_f\propto K_1^{-\frac{3}{4}}$、$\mu_f\propto K_1^{\frac{3}{4}}$；在高温近似下也有类似结果.

(2) 若现时的f粒子并非均匀分布而是处在某种超大尺度的成团状态，假定成团过程是等熵的，那么(6)式将变为

$$\rho_{\rm f}=K_2 \cdot \Omega_{\rm f}\rho_{\rm c}h^2, \quad K_2>1; \tag{19}$$

(2)式则变为

$$T_{\rm f}=K_2^{2/3} \cdot \frac{kT_{\rm f0}T_{\gamma 0}}{m_{\rm f}c^2}. \tag{20}$$

由(10)、(11)式可知，简并近似下 $m_{\rm f}\propto K_2^{\frac{1}{4}}$、$T_{\rm f}\propto K_2^{\frac{5}{12}}$、$\mu_{\rm f}\propto K_2^{\frac{1}{4}}$，即均略有增长. 对高温近似也有类似结果.

总之，考虑这些修正因素后，一般而言，$m_{\rm f}$ 值将有所上升.

4 暗物质粒子为玻色子

由于玻色子(b粒子)的化学势为负值，即 $\gamma\leqslant 0$，因此在本文所用的约束条件下，只有第二节所列情况才可能有暗物质b粒子存在. 这时，第二节中所用公式对b粒子可以继续使用，只要将公式中的下标f改为b，因子 $[\exp(z-\gamma)+1]$ 改为 $[\exp(z-\gamma)-1]$ 以及 γ 值由 -1.62 改为 -1.245，而所得结果 $m_{\rm b}$、$T_{\rm b}$、$\mu_{\rm b}$ 与表2所列 $m_{\rm f}$、$T_{\rm f}$、$\mu_{\rm f}$ 值相差很小.

5 讨 论

(1) 在本文所用的约束条件下，处在简并态的费米子(也可能处在近高温态)和处在近高温态的玻色子可构成宇宙暗物质. 它们的质量范围均为 $\sim 10^{-1}$—10^{-2}eV，且化学势的绝对值均远小于质量值. 考虑到 $\frac{v_{\rm s}}{c}$、W、γ 的取值范围以及 K_1、K_2 等修正因素，倾向于 $m_{\rm f}$(及 $m_{\rm b}$)$\sim 10^{-1}$eV.

(2) 超高能原初宇宙线可能会与暗物质f粒子和b粒子相互作用：$p+f\rightarrow n+e^+$，$p+b\rightarrow n+\pi^+$. 基于 $m_{\rm f}$ 及 $m_{\rm b}\sim 10^{-1}$eV 和 $|\mu_{\rm f}|\ll m_{\rm f}$、$|\mu_{\rm b}|\ll m_{\rm b}$，若 $m_{\rm f}>m_{\rm b}$，超高能原初宇宙线能谱在 $\sim 10^{15}$eV 及 $\sim 10^{18}$eV 附近将出现拐折，这与观测结果不相矛盾.

(3) 如果这类暗物质粒子确实存在，可能需修正宇宙学和粒子物理的标准模型.

参 考 文 献

[1] 黄无量，高能物理与核物理，**20**(1996)409.
[2] R. B. Tully, *Ap. J.*, **303**(1986)25; *Ap. J.*, **323**(1986)1.
[3] M. J. Geller *et al.*, *Science*, **246**(1989)897.
[4] T. J. Broadhurst *et al.*, *Nature*, **343**(1990)726.
[5] L. D. Landau *et al.*, Statistical Physics, Pergamon Press, London, 1958.
[6] 黄无量，高能物理与核物理，**15**(1991)1135.
[7] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, J. Wiley, New York, 1972.

On the Mass and the States of the Dark Matter Particles

Huang Wuliang

(*Institute of High Energy Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100039)

Received 30 May 1996

Abstract

We discuss a category of stable dark matter particles which are weakly interacting and related to the superstructure of the universe. These particles may be degenerate fermions and the bosons near a high temperature state. In both cases, we deduce that the particle mass is $\sim 10^{-1}$eV and the absolute value of its chemical potential is $\ll 10^{-1}$eV. This result is not in contradiction with the dip phenomena of the ultra high energy primary cosmic ray spectrum at $\sim 10^{15}$eV and $\sim 10^{18}$eV.

Key words dark matter, state of matter, fermion, boson.