第21卷 第11期 高能物理与核物理 Vol.21, No.11
1997年 11月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Nov., 1997

# 带电粒子束的等时周期场聚焦*

郁 庆 长

(中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

1996－12－25收稿

**摘 要**

在质子直线加速器中经常利用等时周期场对粒子束进行聚焦. 这种周期场的特点是周期长度不等而粒子经过每一周期的时间为常数. 本文讨论等时周期场聚焦的基本理论,并将它推广到周期长度缓慢变化的周期场.

**关键词** 带电粒子束,等时周期场,聚焦.

## 1 引 言

在粒子加速器中经常使用周期电磁场系统对粒子束进行聚焦[1,2]. 通常在周期场中周期长度是常数. 但在质子直线加速器中会遇到另一种周期场, 在这种场中粒子经过每一周期的时间为常数. 为方便起见称它为等时周期场,而称前一种周期场为等距周期场.

最常见的等时周期场的例子是漂移管直线加速器(DTL)[3]. 它的聚焦与散焦四极磁铁交替地放在漂移管内,相邻四极磁铁中心的距离为$\beta\lambda$, $\beta$为粒子速度与光速之比,$\lambda$为电磁波的波长.

在近年所设计的一些质子直线加速器中[4—6],低能段采用高频四极加速器(RFQ),中能段采用腔耦合漂移管直线加速器(CCDTL),高能段采用腔耦合直线加速器(CCL). 在中能和高能段,四极磁铁都安装在加速腔外,其中心间距为$m\beta\lambda$, $m$是整常数或半整常数. 这也构成了等时周期场系统. 文献[4,7]指出,如果从RFQ出口开始采用全程同一周期的等时周期场系统,可以避免由于聚焦结构变化导致的束晕增长,从而减少束流损失和周围设备的感生放射性. 对于核废料嬗变系统和洁净核能系统的强流质子直线加速器,这是至关重要的问题.

本文仅研究等时周期场聚焦的基本理论,有关它的应用将另文讨论.

## 2 运 动 方 程

设$z$为纵向即束轴方向的坐标,$x$为某一横向坐标,粒子在$x$方向所受的力是线性的,

* 国家攀登计划项目.

$$f_x = ekx, \tag{1}$$

此处 $e$ 是粒子电荷，$k$ 是 $z$ 的函数．粒子在 $x$ 方向的线性运动方程为

$$\beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\beta\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right) = \frac{ekx}{m_0c^2}, \tag{2}$$

此处 $m_0$是粒子静止质量，$\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$．粒子在另一横向的运动与此类似，故不再讨论．

为讨论等时周期场，以 $s = ct$ 代替 $z$ 为自变量，$c$ 为光速，$t$ 为时间．式(2)变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) = \frac{ekx}{m_0c^2}. \tag{3}$$

在讨论等距周期场时，通常以约化坐标 $(\beta\gamma)^{\frac{1}{2}}x$ 代替坐标 $x$．对于等时周期场，引入约化坐标 $u = \gamma^{\frac{1}{2}}x$，得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}s^2} = Ku, \tag{4}$$

此处

$$K = \frac{ek}{m_0c^2\gamma} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}\right) + \frac{1}{4\gamma^2}\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}\right)^2. \tag{5}$$

通常$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}$较小可忽略，上式简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}s^2} = Ku = \frac{eku}{m_0c^2\gamma}. \tag{6}$$

## 3　传 输 矩 阵

一段区间起点 $z_0$和终点 $z$ 处变量 $x$ 与$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$之间的关系可用传输矩阵 $R_x$表示：

$$\begin{pmatrix} x \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} \end{pmatrix}_z = R_x \begin{pmatrix} x \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} \end{pmatrix}_{z_0}, \tag{7}$$

此处

$$R_x = \begin{pmatrix} R_{x11} & R_{x12} \\ R_{x21} & R_{x22} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

如果该区间起点 $z_0$和终点 $z$ 位于加速(和减速)区域外，$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}z} = 0$，则式(7)可改写为下述形式：

$$\gamma^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} u \\ \beta^{-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} \end{pmatrix}_z = R_x\,\gamma_0^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} u \\ \beta_0^{-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} \end{pmatrix}_{z_0}, \tag{9}$$

此处$\beta_0$, $\gamma_0$和$\beta$, $\gamma$为 $z_0$和 $z$ 处的$\beta$, $\gamma$ 值．由此可导出 $z_0$和 $z$ 处变量 $u$ 与$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}$之间的关系

$$\begin{pmatrix} u \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} \end{pmatrix}_z = R_u \begin{pmatrix} u \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} \end{pmatrix}_{z_0}, \tag{10}$$

此处 $R_u$为约化变量的传输矩阵，

$$R_u = \begin{pmatrix} R_{u11} & R_{u12} \\ R_{u21} & R_{u22} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$\begin{gathered} R_{u11} = \nu R_{x11}, \quad R_{u12} = \nu\beta_0^{-1}R_{x12}, \\ R_{u21} = \nu\beta R_{x21}, \quad R_{u22} = \nu\beta\beta_0^{-1}R_{x22}, \\ \nu = (\gamma\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}}, \quad |R_u| = 1. \end{gathered} \tag{12}$$

## 4 束 流 光 学

在$\left(x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)$相平面上束椭圆对应的$\sigma$矩阵为

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} \sigma_{x11} & \sigma_{x12} \\ \sigma_{x21} & \sigma_{x22} \end{pmatrix} = \varepsilon_x \begin{pmatrix} \beta_x & -\alpha_x \\ -\alpha_x & \gamma_x \end{pmatrix}, \tag{13}$$

此处

$$\sigma_{x11} = a^2, \ \sigma_{x12} = a\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}z}, \quad \sigma_{x22} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2_{\max}, \tag{14}$$

$\varepsilon_x$为束在 $x$ 方向的发射度，$a$ 为束在 $x$ 方向的半径．

现在讨论$\left(u, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)$相平面．束椭圆对应的$\sigma$矩阵为

$$\sigma_u = \begin{pmatrix} \sigma_{u11} & \sigma_{u12} \\ \sigma_{u21} & \sigma_{u22} \end{pmatrix} = \varepsilon_u \begin{pmatrix} \beta_u & -\alpha_u \\ -\alpha_u & \gamma_u \end{pmatrix}, \tag{15}$$

此处

$$\begin{gathered} \sigma_{u11} = \gamma a^2, \ \sigma_{u12} = \beta\gamma a\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}z}, \ \sigma_{u22} = \beta^2\gamma\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2_{\max}, \\ \varepsilon_u = \beta\gamma\varepsilon_x, \ \beta_u = \beta^{-1}\beta_x, \ \alpha_u = \alpha_x, \ \gamma_u = \beta\gamma_x. \end{gathered} \tag{16}$$

$\varepsilon_u$等于归一化发射度，为不变量，这表明在$\left(u, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)$相平面上束椭圆面积在粒子速度变化时仍然守恒．束在 $x$ 方向的半径及其斜率为

$$a=\left(\frac{\varepsilon_u\beta_u}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}z}=-\frac{1}{\beta}\left(\frac{\varepsilon_u}{\gamma\beta_u}\right)^{\frac{1}{2}}\alpha_u. \tag{17}$$

如果已知区间 $[z_0, z]$ 的传输矩阵 $R_u$ 和 $z_0$ 处的 $\sigma$ 矩阵 $\sigma_{u0}$，即可计算 $z$ 处的 $\sigma$ 矩阵 $\sigma_u$，

$$\sigma_u = R_u\sigma_{u0}R_u^{\mathrm{T}}, \tag{18}$$

$R^{\mathrm{T}}$ 为 $R$ 的转置矩阵.

## 5　等时周期场聚焦

约化运动方程(4)的等时周期场条件为

$$K(s+cT)=K(s), \tag{19}$$

当忽略 $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}$ 时简化为

$$\frac{k(s+cT)}{\gamma(s+cT)}=\frac{k(s)}{\gamma(s)}, \tag{20}$$

$T$ 为同步粒子经过每一周期的时间，它是一个常数.

在等时周期场中，对于匹配的粒子束，

$$\alpha_u(s+cT)=\alpha_u(s),\ \ \beta_u(s+cT)=\beta_u(s),\ \ \gamma_u(s+cT)=\gamma_u(s). \tag{21}$$

设等时周期场中一个周期的传输矩阵为 $R_u$，周期起点(和终点)匹配粒子束的 $\alpha_u$，$\beta_u$ 和 $\gamma_u$ 值为 $\alpha_{u0}$，$\beta_{u0}$ 和 $\gamma_{u0}$，它们满足

$$R_u=\begin{pmatrix} R_{u11} & R_{u12} \\ R_{u21} & R_{u22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\mu+\alpha_{u0}\sin\mu & \beta_{u0}\sin\mu \\ -\gamma_{u0}\sin\mu & \cos\mu-\alpha_{u0}\sin\mu\end{pmatrix}, \tag{22}$$

此处 $\mu$ 为粒子每一周期的相移. 与等距周期场类似，等时周期场的稳定性条件为 $\mu$ 是实数，亦即

$$2|\cos\mu|=\left|R_{u11}+R_{u22}\right|\leqslant 2. \tag{23}$$

在 $\left(u,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)$ 相平面上束椭圆形状是周期性变化的. 由 $x=\gamma^{-\frac{1}{2}}u$，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\beta^{-1}\gamma^{-\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}$ 可知，当粒子被加速时 $\left(x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)$ 相平面上束椭圆在周期性变化同时还逐渐缩小，而且在 $x$ 方向和 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$ 方向缩小的比例不同.

由式(17)可得到在 $x$ 方向束半径及其斜率的变化规律:

$$a(s+ncT)=\left[\frac{\gamma(s)}{\gamma(s+ncT)}\right]^{\frac{1}{2}}a(s),$$

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}z}(s+ncT)=\frac{\beta(s)}{\beta(s+ncT)}\left[\frac{\gamma(s)}{\gamma(s+ncT)}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}z}(s). \tag{24}$$

$n$ 为任意整数.

注意在等时周期场中束的运动情况和等距周期场不同. 一个明显的例子是: 在等时周期场中束在一个周期内的平均半径与 $\gamma^{\frac{1}{2}}$ 成反比,而在等距周期场中它与 $(\beta\gamma)^{\frac{1}{2}}$ 成反比. 显然在等时周期场中束平均半径的变化要缓慢得多.

## 6 理论的推广

等时周期场实际上是一种周期长度缓慢变化的周期场. 上述理论可以推广到一般的周期长度缓慢变化的周期场. 为此需要定义一个 $z$ 的单调上升函数 $s^*(z)$ 代替 $z$ 作为自变量,使得在用 $s^*$ 测量时这一周期场成为等距周期场,即对于任意整数 $n$,

$$s^*(z_n) - s^*(z_{n-1}) \equiv L^*, \tag{25}$$

此处 $z_n$ 为第 $n$ 个周期的终点, $L^*$ 为常数.

定义约化函数

$$\rho(z) = \beta\gamma \frac{\mathrm{d}s^*}{\mathrm{d}z}, \tag{26}$$

运动方程(2)变为

$$\frac{\rho}{\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s^*}\left(\rho\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s^*}\right) = \frac{ekx}{m_0c^2}. \tag{27}$$

引入约化横向坐标 $u^* = \rho^{\frac{1}{2}}x$, 如果 $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z}$ 较小可忽略,则得

$$\frac{\mathrm{d}^2u^*}{\mathrm{d}s^{*2}} = K^*u^*, \quad K^* = \frac{ek\gamma}{m_0c^2\rho^2}. \tag{28}$$

周期场条件为

$$K^*(s^* + L^*) = K^*(s^*). \tag{29}$$

在 $\left(u^*, \frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}s^*}\right)$ 相平面上束椭圆形状周期性变化且其面积守恒. 束在一个周期内的平均半径与 $\rho^{\frac{1}{2}}$ 成反比.

等时周期场和等距周期场都是这种周期场的特例. 对于等时周期场 $\rho = \gamma$, 对于等距周期场 $\rho = \beta\gamma$.

## 7 结　　语

在质子直线加速器中质子的横向运动受到三种作用: 四极磁铁的聚焦和散焦作用,高频场的散焦作用,以及空间电荷效应的散焦作用. 人们通过调节磁铁磁场来补偿后两种作用的变化以保持束包络的周期性. 在这种情况下严格满足等时周期场条件(19)是不

可能的．通常所做的是保持$\alpha_{u0}$，$\beta_{u0}$，$\gamma_{u0}$不变而允许相移$\mu$变化(参看式(22))．这就是质子直线加速器中的工作路线问题[8]．我们将对此作进一步的研究．

## 参　考　文　献


[1] E. D. Courant, H. S. Snyder, *Ann. Phys.*, 3(1958)1.

[2] A. A. Коломенский, A. H. Лебедев, Теория Циклических ускорителей, физматгиз, Москова, 1962, стр.65.

[3] 王书鸿、罗紫华、罗应雄，质子直线加速器原理，原子能出版社，1986，§2.2.

[4] J. H. Billen *et al.*, Proc. 1995 Particle Accelerator Conference, Dallas, Texas, p.1137.

[5] H. Takeda *et al.*, Proc, 1995 Particle Accelerator Conference Dallas, Texas, p. 1140.

[6] U. Amaldi, M. Grandolfo, L. Picardi eds, The RITA Network and the Design of Compact Proton Accelerators, INFN-LNF, Frascati, Italy, 1996, chap.9.

[7] 郁庆长等，洁净核能系统强流质子加速器设计的初步考虑，高能物理研究所内部资料，1996.

[8] 同[3]，§5.6-5.8.


# Focusing of Charged Particle Beams by Isochronic Periodic Fields


Yu Qingchang

(*Institute of High Energy Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100039)


Received 25 December 1996


## Abstract

In proton linacs the particle beams are often focused by isochronic periodic fields, in which the lengths of periods are different but the times the particles travel through each period are constant. In this paper the basic theory of focusing by isochronic periodic fields is discussed. The theory can be generalized to the periodic fields with slow varying periods.


**Key words** charged particle beam, isochronic periodic field, focusing.