

有限温度下非拓扑孤子模型的双圈有效势*

邓胜华 王恩科 李家荣

(华中师范大学粒子物理研究所 武汉 430070)

1994-08-03 收稿

摘 要

在双圈水平计算了非拓扑孤子袋模型在有限温度和密度下的有效势,并分析了热效应对真空结构的影响。

关键词 有效势,孤子袋模型,真空结构。

1 引 言

Friedberg 和 Lee 提出的非拓扑孤子袋模型^[1,2](简称 F-L 模型),既保留了 QCD 的色禁闭等主要特征,又避免了 QCD 中存在的复杂性,使理论得到了简化。在零温下它可以为夸克禁闭提供一种直观的物理解释,而且经过 Wilets 等人^[3]的发展,在描写强子静态性质方面已取得了较大的成功,被认为是描写 QCD 理论禁闭性质的一个较好的模型理论。F-L 模型有一个明显的缺点,即未能反映 QCD 的手征对称性。但是在当前,人们还未找到一个既能反映 QCD 的禁闭性质又能反映 QCD 的手征性质的模型,而是分别用相应的模型来具体分析禁闭性质和手征性质的物理效应。在这方面,文献中分析禁闭问题时较多的是应用 F-L 模型,而分析手征问题时较多应用 Nambu-Jona-Lasinio 模型^[4],并且都被发展到在有限温度下分析退禁闭相变^[5-7]和手征相变^[8]。

分析一种理论的相结构的基础是有效势。然而迄今为止,关于 F-L 模型的有限温度下有效势的计算主要是用平均场近似^[5,7]或用 Linde 方法^[9]进行的,尚未计入高阶圈图的效应。为更仔细地探讨该模型的行为,必须分析高阶圈图对有效势的贡献。本文中,我们在双圈水平完成了对有限温度和密度下该模型有效势的具体计算,并进一步探讨了热效应对真空结构的影响。

2 有效势的圈图展开

F-L 模型的显著特点之一就是用一个唯象标量场(σ)来描写真空。一方面,场方程的孤子解可描写夸克禁闭性质;另一方面, σ 场在物理真空处的值 σ ,则代表真空中的凝

* 国家自然科学基金资助。

聚^[2]。在不考虑矢量场的交换时,该模型的拉氏密度由标量场 σ 和夸克场 ψ 组成,即

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - g\sigma)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)(\partial^\mu\sigma) - U(\sigma), \quad (1)$$

σ 场的非线性自相互作用势函数 $U(\sigma)$ 取为

$$U(\sigma) = \frac{1}{2!}a\sigma^2 + \frac{1}{3!}b\sigma^3 + \frac{1}{4!}c\sigma^4 + B, \quad (2)$$

其中 B 为袋常数, a, b, c 是符合强子静态性质的一组可调参数。

在有限温度和密度下,一个热力学系统的真空结构及相结构等均由其有效势决定。为计算由(1)式描写的系统的有效势,我们对 σ 场进行平移: $\sigma \rightarrow v + \sigma$, 其中 $v \equiv \langle \sigma \rangle$ 是 σ 场量的 Gibbs 平均值。计入费米子化学势 μ , 则可得到场量平移后体系的有效拉氏密度为

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -U(v) + \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \quad (3a)$$

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_F + \mu\gamma^0)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)(\partial^\mu\sigma) - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2. \quad (3b)$$

$$\mathcal{L}_1 = -g\bar{\psi}\sigma\psi - \frac{1}{3!}(b+c v)\sigma^3 - \frac{1}{4!}c\sigma^4. \quad (3c)$$

这里 m_F 和 m_σ 分别为夸克场和热激发场 σ 的等效质量,

$$m_F = gv, \quad m_\sigma^2 = a + bv + \frac{1}{2}cv^2. \quad (4)$$

场量平移后的传播子与相互作用顶角可由(3)式导出。将 $T = \mu = 0$ 时的费曼规则作如下替换即得到有限温度下的费曼规则^[10]:

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \rightarrow iT \sum_{n_p=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \equiv iT \sum_{n_p=-\infty}^{+\infty} \int [d\mathbf{p}] \equiv \int [d\mathbf{p}],$$

$$p^0 = 2n_p\pi iT, \quad \text{对玻色子,}$$

$$p^0 = (2n_p + 1)\pi iT + \mu, \quad \text{对费米子,}$$

$$i(2\pi)^4\delta^4(p_1 + \dots + p_N) \rightarrow \frac{1}{T} (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_N)\delta_{n_{p_1}+n_{p_2}+\dots+n_{p_N}}. \quad (5)$$

利用泛函积分技术可将该系统在有限温度下的有效势按圈图展开并写成^[11]

$$V_{\text{eff}}(v) = V_0(v) + i \ln \int [D\sigma][D\bar{\psi}][D\psi] \exp\left\{i \int d^4x \mathcal{L}_0\right\} / \left(\int d^4x\right) \\ + i \left\langle T \exp\left\{i \int d^4x \mathcal{L}_1\right\} \right\rangle_{\text{connect}} / \left(\int d^4x\right). \quad (6)$$

这种展开可用图形直观地表示为图 1。(6)式中 V_0 为树图近似结果(图 1a),

$$V_0(v) = \frac{1}{2!}av^2 + \frac{1}{3!}bv^3 + \frac{1}{4!}cv^4 + B. \quad (7)$$

(6)式右边第二项是有效势的单圈修正(图 1b), 可表示为^[12]

$$V_1^F = \frac{T}{2} \sum_k \int [d\mathbf{k}] \ln \det[iD^{-1}(v, \mathbf{k})] - T \sum_p \int [d\mathbf{p}] \ln \det[iS^{-1}(v, \mathbf{p})], \quad (8)$$

其中 D 和 S 分别为场量平移后的玻色和费米传播子,

$$D(\nu, k) = \frac{i}{p^2 - m_0^2}, \quad S(\nu, p) = \frac{i}{\gamma \cdot p - m_F}. \quad (9)$$

完成对(8)式中离散频率的求和可得

$$\begin{aligned} V_1^\beta(\nu) &= \int [d\mathbf{p}] \left\{ \frac{1}{2} \omega_p - \gamma E_p \right\} + \frac{1}{\beta} \int [d\mathbf{k}] \ln(1 - e^{-\beta\omega_k}) \\ &\quad - \frac{\gamma}{\beta} \int [d\mathbf{p}] \{ \ln[1 + e^{-\beta(E_p + \mu)}] + \ln[1 + e^{-\beta(E_p - \mu)}] \} \\ &\equiv V_1^0(\nu) + \bar{V}_1^\beta(\nu, T) + \bar{V}_1^\gamma(\nu, T), \end{aligned} \quad (10)$$

其中 β 为温度 T 的倒数, $\gamma = \text{自旋} \times \text{色} \times \text{味}$, 是费米子简并因子,

$$\omega_k = \sqrt{k^2 + m_0^2}, \quad E_p = \sqrt{p^2 + m_F^2}. \quad (11)$$

(10)式中 $V_1^0(\nu)$ 就是零温时玻色子和费米子单圈图的贡献, 即纯量子起伏部分; 而后两项则是热运动造成的单圈修正。单圈图中的紫外发散仅包含于 V_1^0 中, 其余各项均为有限部分。所以只需对 V_1^0 施行重整化手续, 而 \bar{V}_1^β 和 \bar{V}_1^γ 不需要重整化。可以证明(见附录), 通过适当引入抵消项, 施行重整化手续, 能够将紫外发散消除掉, 使 V_1^0 成为有限部分。为了考察有效势对温度和化学势的依赖性, 可以忽略零温下量子起伏的贡献。可以证明, 由此求得的单圈近似下的有效势与我们在文献 [7] 中用 Linde 方法得到的结果一致。若用 N_p 和 n_p 分别代表玻色子和费米子的分布函数, 即

$$N_p \equiv \frac{1}{e^{\beta\omega_p} - 1}, \quad (12a)$$

$$n_p^\pm \equiv \frac{1}{e^{\beta(E_p \pm \mu)} + 1}, \quad n_p = n_p^+ + n_p^-, \quad (12b)$$

则可求得

$$V_1^\beta = - \frac{1}{6\pi^2} \int d\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' \left[\frac{N_p}{\omega_p} + \gamma \frac{n_p}{E_p} \right]. \quad (13)$$

(6) 式右边第三项是双圈(图 1c)及更高阶圈图对有效势的贡献。下面将对双圈修正进行具体计算。

3 有效势的双圈修正

按有限温度下的费曼规则计算图 1(c) 即可得出双圈图的修正。但所得结果中会出现比单圈情形更为复杂的情况, 即不仅包含有纯零温时这些双圈的贡献以及热运动引起的有限修正部分, 而且还包含二者交叉的项, 这种交叉项也含有紫外发散。所以, 即使只考虑有限温度和密度的贡献时, 双圈修正也包含有玻色子和费米子自能引起的紫外发散,

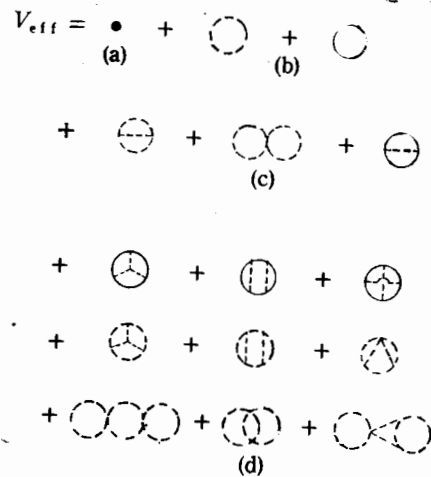


图 1 有效势的圈图展开

仍需重整化。文献[13,14]已经证明,为对这种交叉项进行重整化,消除紫外发散,必须引进相应的补偿图。当计及补偿图和相应的对称因子时,有效势中双圈贡献可重新表示为图2—图4^[4],其中圆括号表示在计算其内的子图时应在真空(即 $T = \mu = 0$) 极限下进行,且对进入和离开子图的粒子线应限制在质壳上。

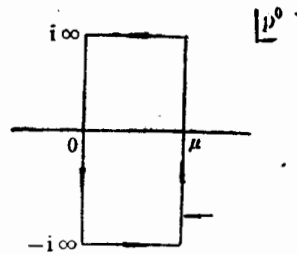
根据费曼规则计算图2—图4时,需要对离散的频率进行求和,对此可采用以下两种不同的方法:(1) 直接对整数求和;(2) 进行解析延拓,将对整数的求和转化为如下形式的回路积分:

对玻色子

$$T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(p^0 = 2n\pi iT) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{+i\infty+\epsilon} dp^0 \frac{f(p^0) + f(-p^0)}{e^{\beta p^0} - 1} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dp^0 f(p^0), \quad (14a)$$

对费米子

$$T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(p^0 = (2n+1)\pi iT + \mu) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\mu-\epsilon}^{+i\infty+\mu-\epsilon} dp^0 \frac{f(p^0)}{e^{\beta(\mu-p^0)} + 1} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\mu+\epsilon}^{+i\infty+\mu+\epsilon} dp^0 \frac{f(p^0)}{e^{\beta(p^0-\mu)} + 1} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dp^0 f(p^0) + \frac{1}{2\pi i} \oint_C dp^0 f(p^0), \quad (14b)$$



其中 $\epsilon > 0$ 为无穷小量,回路 C 如图所示。以上两种方法可以给出相同的结果^[4]。本文中我们采用后一种方法,此方法中前述质壳条件自动满足。

3.1 玻色双圈图的计算

先考虑图2(a),根据由(3)式得出的费曼规则,该图的贡献可写为

图2 二顶点玻色双圈对有效势的贡献

$$\mathcal{Q}_{2a} = -\frac{i}{12} [i(b+cv)]^2 \int [dp][dq][dk] (2\pi)^4 \delta^4(p-q-k) \cdot \frac{i}{p^2 - m_\sigma^2} \frac{i}{q^2 - m_\sigma^2} \frac{i}{k^2 - m_\sigma^2}.$$

利用(5)式则有,

$$\mathcal{Q}_{2a} = -\frac{1}{12} (b+cv)^2 \int [dp][dq][dk] (2\pi)^3 \delta^3(p-q-k) B(p, q, k), \quad (15)$$

$$B(p, q, k) = \frac{1}{\beta^3} \sum_{n_p, n_q, n_k} \frac{1}{p^2 - m_\sigma^2} \frac{1}{q^2 - m_\sigma^2} \frac{1}{k^2 - m_\sigma^2} \beta \delta_{n_p, n_q + n_k}. \quad (16)$$

(16)式中各 n 均取整数, $p^0 = 2n_p \pi i T$, $q^0 = 2n_q \pi i T$, $k^0 = 2n_k \pi i T$. 该式中 Kronecker δ 可表示为

$$\beta \delta_{n_p, n_q + n_k} = \int_0^\beta d\mu e^{\mu(p^0 - q^0 - k^0)} = \frac{e^{\beta(p^0 - q^0 - k^0)} - 1}{p^0 - q^0 - k^0}. \quad (17)$$

注意到在对 n 取整数计算 q^0 和 k^0 时, $e^{\beta(q^0 + k^0)} = 1$, 故(17)式可改写为

$$\beta \delta_{n_p, n_q + n_k} = \frac{e^{\beta p^0} - e^{\beta(q^0 + k^0)}}{p^0 - q^0 - k^0} \equiv I(p^0, q^0, k^0). \quad (18)$$

所以有

$$B(p, q, k) = \frac{1}{\beta} \sum_{n_p} \frac{1}{\beta} \sum_{n_q} \frac{1}{\beta} \sum_{n_k} \frac{1}{p^2 - m_\sigma^2} \frac{1}{q^2 - m_\sigma^2} \frac{1}{k^2 - m_\sigma^2} I(p^0, q^0, k^0). \quad (19)$$

由于 I 无奇异性, 所以(19)式中每个对整数的求和都可通过(14a)式转化为回路积分, 且这些积分可相互独立地进行计算. 例如,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta} \sum_{n_k} \frac{1}{k^2 - m_\sigma^2} I(p^0, q^0, k^0) \\ &= \frac{-1}{2\omega_k} [N_k I(p^0, q^0, \omega_k) + (N_k + 1) I(p^0, q^0, -\omega_k)]. \end{aligned} \quad (20)$$

(20)式右边 N_k 是(12a)式表示的统计因子, 即玻色子分布函数, 它来自于(14a)式右边回路积分的表达式. 由(20)式可得

$$\begin{aligned} B(p, q, k) = & -\frac{1}{8\omega_p \omega_q \omega_k} \{N_p N_q [N_k I(\omega_p, \omega_q, \omega_k) + (N_k + 1) I(\omega_p, \omega_q, -\omega_k)] \\ & + N_p (N_q + 1) [N_k I(\omega_p, -\omega_q, \omega_k) + (N_k + 1) I(\omega_p, -\omega_q, -\omega_k)] \\ & + N_q (N_p + 1) [N_k I(-\omega_p, \omega_q, \omega_k) + (N_k + 1) I(-\omega_p, \omega_q, -\omega_k)] \\ & + (N_p + 1) (N_q + 1) [N_k I(-\omega_p, -\omega_q, \omega_k) \\ & + (N_k + 1) I(-\omega_p, -\omega_q, -\omega_k)]\}. \end{aligned} \quad (21)$$

将(12a)式代入(21)式, 经整理并略去纯零温时的真空部分得到

$$\begin{aligned} B(p, q, k) = & \frac{-3}{\omega_p \omega_q \omega_k} \left\{ \frac{\omega_q + \omega_k}{(\omega_q + \omega_k)^2 - \omega_p^2} N_p \right. \\ & \left. + \frac{[\omega_k^2 - (\omega_p^2 + \omega_q^2)] N_p N_q \omega_k}{[(\omega_q + \omega_p)^2 - \omega_k^2][(\omega_q - \omega_p)^2 - \omega_k^2]} \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

上式花括号中第二项含可抑制发散程度的统计因子 N 的二次幂, 把该项代回(15)式积分

将得到有限结果;花括号中第一项(N 的一次幂)代回(15)式积分时会导致紫外发散^[4],为消除此发散,需计入图 2(b) 的贡献。

对图 2(b), 利用(5)式可求得其子图在真空极限下为

$$S_B = -\frac{1}{2} (b + cv)^2 \int [d\mathbf{p}][d\mathbf{q}](2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{k}) \frac{i}{k^2 - m^2} \lim_{\beta \rightarrow \infty} B_S(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}), \quad (23)$$

$$B_S(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}) = \frac{1}{\beta} \sum_{\mathbf{p}'} \frac{1}{\beta} \sum_{\mathbf{q}'} \frac{1}{p'^2 - m^2} \frac{1}{q'^2 - m^2} I(p^0, q^0, k^0), \quad (24)$$

其中 4 动量 k 限制在质壳上。采用与上述相同的方法可得

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} B_S(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}) = \frac{1}{4\omega_p \omega_q} \left[\frac{1}{\omega_p + \omega_q - k^0} + \frac{e^{ik^0}}{\omega_p + \omega_q + k^0} \right], \quad (25)$$

将(25)式代入(23)式,并用 S_B 代替图 2(b) 中子图,可求出图 2(b) 的贡献为

$$\mathcal{Q}_{2b} = -\frac{1}{4} (b + cv)^2 \int [d\mathbf{p}][d\mathbf{q}][d\mathbf{k}] \frac{1}{\omega_p \omega_q \omega_k} \cdot \frac{\omega_q + \omega_k}{(\omega_q + \omega_k)^2 - \omega_p^2} N_p, \quad (26)$$

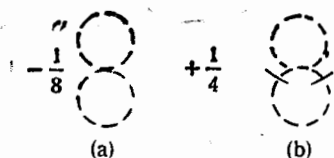
这恰好与(22)式中第一项对应部分相抵消。所以,图 2 的总贡献为

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_{2a} + \mathcal{Q}_{2b} = \frac{1}{4} (b + cv)^2 \int [d\mathbf{p}][d\mathbf{q}][d\mathbf{k}](2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{k}) \\ \cdot \frac{N_p N_q}{\omega_p \omega_q} \cdot \frac{[\omega_k^2 - (\omega_p^2 + \omega_q^2)]}{[(\omega_p + \omega_q)^2 - \omega_k^2][(\omega_p - \omega_q)^2 - \omega_k^2]}. \end{aligned} \quad (27)$$

现计算图 3 的贡献。仿照计算图 2 的方法,则图 3(a)、(b) 的贡献分别为

$$\mathcal{Q}_{3a} = \frac{c}{8} \int [d\mathbf{p}][d\mathbf{q}] \frac{N_p(N_q + 1)}{\omega_p \omega_q}, \quad (28)$$

$$\mathcal{Q}_{3b} = -\frac{c}{8} \int [d\mathbf{p}][d\mathbf{q}] \frac{N_p}{\omega_p + \omega_q}, \quad (29)$$



从而得图 3 的总贡献为

$$\mathcal{Q}_3 = \mathcal{Q}_{3a} + \mathcal{Q}_{3b} = \frac{c}{8} \int [d\mathbf{p}][d\mathbf{q}] \frac{N_p N_q}{\omega_p \omega_q}. \quad (30)$$

图 3 单顶点玻色双圈对有效势的贡献

总之,玻色双圈图的总贡献为(27)式与(30)式之和。

3.2 费米双圈的计算

费米双圈(图 4)的计算稍为复杂,但可采用与计算图 2 类似的步骤来进行。下面着重指出区别之处及有关计算结果。

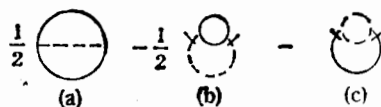


图 4 费米双圈对有效势的贡献

先算图 4(a), 由 Feynman 规则得

$$\mathcal{O}_{11} = -\frac{g^2}{2} \int [d\mathbf{p}][d\mathbf{q}][d\mathbf{k}](2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{k}) F(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}), \quad (31)$$

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}) = \frac{1}{\beta^3} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}} \beta \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{q} + \mathbf{k}} \text{Tr} \frac{1}{\gamma \cdot \mathbf{p} - m_F} \cdot \frac{1}{\gamma \cdot \mathbf{q} - m_F} \cdot \frac{1}{k^2 - m_S^2}. \quad (32)$$

(32)式中 Kronecker δ 当 $p^0 = (2n_p + 1)\pi iT + \mu$, $q^0 = (2n_q + 1)\pi iT + \mu$, $k^0 = 2n_k \pi iT$ 时仍可用(17)式表示,但需注意的是,在对各个 n 取整数计算 q^0 和 k^0 时将给出 $e^{\beta(\epsilon^0 - \mu + k^0)} = -1$, 所以(32)式可改写为

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}) = \gamma \frac{1}{\beta} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\beta} \sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{\beta} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{(p^2 - m_F^2)(q^2 - m_F^2)(k^2 - m_S^2)} J(p^0, q^0, k^0), \quad (33)$$

$$J(p^0, q^0, k^0) = \frac{m_F^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{p^0 - q^0 - k^0} [e^{\beta(\epsilon^0 - \mu + k^0)} - e^{\beta(\epsilon^0 - \mu)}]. \quad (34)$$

(33)式中各个(对整数的)求和可通过(14)式分别转化为回路积分单独计算. 对玻色频率求和时(20)式仍成立,而对费米子频率求和公式为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{p^2 - m_F^2} J(p^0, q^0, k^0) \\ &= \frac{1}{2E_p} [n_p^- J(E_p, q^0, k^0) + (n_p^+ - 1)J(-E_p, q^0, k^0)], \end{aligned} \quad (35)$$

这里 n_p^\pm 由 (12b) 式给出. 所以,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}) = & -\frac{\gamma}{8E_p E_q \omega_k} \{N_k n_p^- [n_q^- J(E_p, E_q, \omega_k) + (n_q^+ - 1)J(E_p, -E_q, \omega_k)] \\ & + N_k (n_q^+ - 1) [n_q^- J(-E_p, E_q, \omega_k) + (n_q^+ - 1)J(-E_p, -E_q, \omega_k)] \\ & + (N_k + 1) n_p^- [n_q^- J(E_p, E_q, -\omega_k) + (n_q^+ - 1)J(E_p, -E_q, -\omega_k)] \\ & + (N_k + 1) (n_q^+ - 1) [n_q^- J(-E_p, E_q, -\omega_k) \\ & + (n_q^+ - 1)J(-E_p, -E_q, -\omega_k)]\}. \end{aligned} \quad (36)$$

利用(12)式对上式整理并略去纯零温真空部分得

$$\begin{aligned} F(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}) = & \frac{\gamma}{2E_p E_q \omega_k} \left\{ \frac{n_p}{(E_q + \omega_k)^2 - E_p^2} [E_q E_p^2 + (E_q + \omega_k)(m_F^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q})] \right. \\ & \left. + E_q N_k \left[1 + \frac{m_S^2 - 4m_F^2}{(E_p + E_q)^2 - \omega_k^2} \right] \right\} \\ & - \frac{\gamma}{8E_p E_q} \left\{ (n_p^+ n_q^+ + n_p^- n_q^-) \left[1 + \frac{m_S^2 - 4m_F^2}{(E_p - E_q)^2 - \omega_k^2} \right] \right. \\ & \left. + (n_p^+ n_q^- + n_p^- n_q^+) \left[1 + \frac{m_S^2 - 4m_F^2}{(E_p + E_q)^2 - \omega_k^2} \right] \right\} \\ & - \gamma \frac{n_p N_k}{2E_p \omega_k}. \end{aligned} \quad (37)$$

其中含统计因子一次幂的各项将导致发散,需要计入补偿图来抵消之.

用类似方法可得出图 4(b) 中子图的真空极限(除去积分因子)为

$$\frac{\gamma}{4E_p E_q} (m_F^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} - E_p E_q) \left\{ \frac{1}{E_p + E_q - k^0} + \frac{e^{\beta k^0}}{E_p + E_q + k^0} \right\}, \quad (38)$$

进而求得图 4(b) 的贡献

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{4b} = & \frac{\gamma g^2}{2} \int [d\mathbf{p}][d\mathbf{q}][d\mathbf{k}] (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{k}) \frac{m_F^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} - E_p E_q}{(E_p + E_q)^2 - \omega_k^2} \\ & \cdot \frac{N_k}{E_p \omega_k}. \end{aligned} \quad (39)$$

此项与(37)式中 N 的一次幂项对应的部分相消。

图 4(c) 中子图的真空极限给出

$$-\frac{1}{4E_p \omega_k} \left\{ \frac{m_F + \gamma \cdot \mathbf{q}}{p^0 - E_q - \omega_k} \Big|_{q^0 = E_q} + \frac{\gamma \cdot \mathbf{q} + m_F}{p^0 + E_q + \omega_k} e^{\beta(p^0 - \mu)} \Big|_{q^0 = -E_q} \right\}. \quad (40)$$

于是图 4(c) 的贡献为

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{4c} = & -\frac{\gamma g^2}{4} \int [d\mathbf{p}][d\mathbf{q}][d\mathbf{k}] (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{k}) \\ & \cdot \frac{n_p}{E_p E_q \omega_k} \left\{ \frac{(m_F^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q})(E_q + \omega_k) + E_p^2 E_q}{E_p^2 - (E_q + \omega_k)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

此项与式(37)中 n_p 一次幂项对应部分恰好相抵消。所以,费米子双圈图的总贡献为

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_F = & \frac{\gamma g^2}{2} \int [d\mathbf{p}][d\mathbf{q}][d\mathbf{k}] (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{k}) \left\{ \frac{n_p N_k}{2E_p \omega_k} \right. \\ & + \frac{1}{8E_p E_q} \left[(n_p^+ n_q^+ + n_p^- n_q^-) \left(1 + \frac{m_\sigma^2 - 4m_F^2}{(E_p - E_q)^2 - \omega_k^2} \right) \right. \\ & \left. \left. + (n_p^+ n_q^- + n_p^- n_q^+) \left(1 + \frac{m_\sigma^2 - 4m_F^2}{(E_p + E_q)^2 - \omega_k^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (42)$$

3.3 数值结果及讨论

为了便于对 F-L 模型在有限温度和密度下的双圈有效势进行数值研究,先对前一节所得结果中有关 3 维动量积分进行简化。令

$$\omega_p \equiv x m_\sigma, \quad E_p \equiv x m_F, \quad (43)$$

$$N_x = \frac{1}{e^{\beta m_\sigma x} - 1}, \quad (44)$$

$$n_x^\pm \equiv \frac{1}{e^{\beta(m_F x \pm \mu)} + 1}, \quad n_x \equiv n_x^+ + n_x^-, \quad (45)$$

则由(7)式和(13)式给出的单圈近似下的有效势可写为

$$V_1 = U(v) - \frac{1}{6\pi^2} \int_1^\infty dx \sqrt{x^2 - 1} [m_\sigma^4 N_x + \gamma m_F^4 n_x]. \quad (46)$$

完成(27)式中对 \mathbf{k} 的积分,则有

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_2 = & \frac{(b + cv)^2}{4} \int [d\mathbf{p}][d\mathbf{q}] \frac{N_p N_q}{2\omega_p \omega_q} \left[\frac{1}{\omega_{pq}^2 - (\omega_p + \omega_q)^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\omega_{pq}^2 - (\omega_p - \omega_q)^2} \right], \end{aligned} \quad (47)$$

其中

$$\omega_{pq}^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{q})^2 + m_\sigma^2 = \omega_p^2 + \omega_q^2 - m_\sigma^2 - 2pq \cos \theta, \quad (48)$$

这里 θ 为 \mathbf{p} 与 \mathbf{q} 之夹角, $p = |\mathbf{p}|, q = |\mathbf{q}|$ 。由于

$$[d\mathbf{q}] = \frac{1}{4\pi^2} q^2 dq \sin \theta d\theta, \quad (49)$$

所以, 完成对 θ 的积分, 并利用(44)式可以求得

$$\mathcal{Q}_2 = \frac{(b + cv)^2}{128\pi^4} m_\sigma^2 \int_1^\infty dx dy N_x N_y \ln \left| \frac{(1 + 2\sqrt{x^2 - 1}\sqrt{y^2 - 1})^2 - 4x^2 y^2}{(1 - 2\sqrt{x^2 - 1}\sqrt{y^2 - 1})^2 - 4x^2 y^2} \right|. \quad (50)$$

同理, 可将(30)式改写为

$$\mathcal{Q}_3 = \frac{cm_\sigma^4}{32\pi^4} \left[\int_1^\infty \sqrt{x^2 - 1} N_x dx \right]^2. \quad (51)$$

因此, 玻色子双圈对有效势的贡献为

$$\begin{aligned} V_B = \mathcal{Q}_2 + \mathcal{Q}_3 = & \frac{cm_\sigma^4}{32\pi^4} \left[\int_1^\infty \sqrt{x^2 - 1} N_x dx \right]^2 \\ & + \frac{(b + cv)^2}{128\pi^4} m_\sigma^2 \int_1^\infty dx dy N_x N_y \\ & \cdot \ln \left| \frac{(1 + 2\sqrt{x^2 - 1}\sqrt{y^2 - 1})^2 - 4x^2 y^2}{(1 - 2\sqrt{x^2 - 1}\sqrt{y^2 - 1})^2 - 4x^2 y^2} \right|. \end{aligned} \quad (52)$$

对(42)式可用类似方法进行简化。令 $\alpha^2 = (m_\sigma^2/m_F^2 - 2)$, 则有

$$\begin{aligned} V_F = & \frac{\gamma g^2}{16\pi^4} \int_1^\infty dx dy \left\{ \left(m_F^2 m_\sigma^2 n_x n_y + \frac{1}{4} m_F^4 n_x n_y \right) \sqrt{x^2 - 1} \sqrt{y^2 - 1} \right. \\ & + \frac{1}{16} m_F^2 (4m_F^2 - m_\sigma^2) \left[(n_x^+ n_y^+ + n_x^- n_y^-) \right. \\ & \times \ln \left| \frac{\alpha^2 + 2xy + 2\sqrt{(x^2 - 1)}\sqrt{(y^2 - 1)}}{\alpha^2 + 2xy - 2\sqrt{(x^2 - 1)}\sqrt{(y^2 - 1)}} \right| \\ & \left. \left. + (n_x^+ n_y^- + n_x^- n_y^+) \ln \left| \frac{\alpha^2 - 2xy + 2\sqrt{(x^2 - 1)}\sqrt{(y^2 - 1)}}{\alpha^2 - 2xy - 2\sqrt{(x^2 - 1)}\sqrt{(y^2 - 1)}} \right| \right] \right\}. \end{aligned} \quad (53)$$

在有限温度下, F-L 模型的有效势的双圈近似结果为(46)、(52)式及(53)式的总和, 即

$$V_{\text{eff}} = V_1 + V_B + V_F. \quad (54)$$

采用文献[7]中选定的一组参数值, 通过数值计算得到不同温度下的有效势曲线如图 5 所示, 其中在曲线 2 上 V_{eff} 的两个极小值相等, 而曲线 4 上 V_{eff} 的局域极大点和相对极小点趋于重合。

结果表明: 存在两个转变温度 T_{c1} 和 T_{c2} , 当 $0 \leq T < T_{c2}$ 时, 有效势 V_{eff} 有两个极小值点, 分别对应着微扰真空(在 $\sigma = 0$ 处)和物理真空(在 $\sigma \neq 0$ 处)。若温度 $T < T_{c1}$, 则物理真空具有稳定结构; 当温度 T 升高到 $T_{c1} < T < T_{c2}$ 时, 物理真空变得不稳定; 当 $T \geq T_{c2}$ 时, 系统只存在唯一的且为稳定的真空态(在 $\sigma = 0$ 处)。

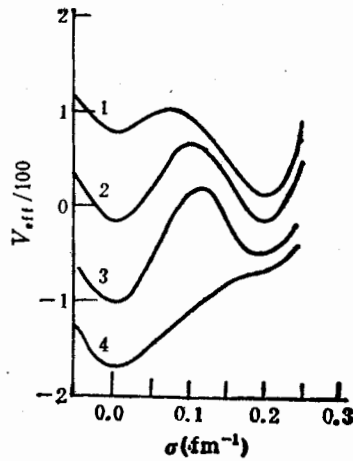


图5 不同温度下的有效势(纵坐标单位任意)
 (1) $T < T_{c1} \approx 96 \text{ MeV}$; (2) $T = T_{c1}$; (3) $T_{c1} < T < T_{c2}$;
 (4) $T = T_{c2} \approx 115 \text{ MeV}$.

附录

F-L 模型的零温有效势与重整化

对 F-L 模型,当引入相应的抵消项后,其有效拉氏密度可写为^[15]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - d\sigma - \frac{1}{2} a\sigma^2, \quad (\text{A.2})$$

$$\mathcal{L}_1 = -\bar{\psi} g \sigma \psi - \frac{1}{3!} b\sigma^3 - \frac{1}{4!} c\sigma^4, \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = & \delta Z_1 \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - G\sigma \bar{\psi} \psi + \frac{1}{2} \delta Z_2 \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma \\ & - D\sigma - \frac{1}{2} A\sigma^2 - \frac{1}{3!} B\sigma^3 - \frac{1}{4!} C\sigma^4. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

这里已将夸克的流质量取为零.

设 σ 场的真空平均值为 v , 即

$$v \equiv \langle 0 | \sigma(x) | 0 \rangle \quad (\text{A.5})$$

则经过场量平移

$$\sigma \rightarrow v + \sigma \quad (\text{A.6})$$

之后,有 $\langle 0 | \sigma | 0 \rangle = 0$. 相应地,拉氏密度可写为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m_F) \psi - g\sigma \bar{\psi} \psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma \\ & - g_1 \sigma - \frac{1}{2} m_1^2 \sigma^2 - \frac{1}{3!} g_3 \sigma^3 - \frac{1}{4!} g_4 \sigma^4 \\ & - \left(d v + \frac{1}{2} a v^2 + \frac{1}{3!} b v^3 + \frac{1}{4!} c v^4 \right) \\ & + \bar{\psi} (\delta Z_1 i \gamma^\mu \partial_\mu - M_F) \psi - G\sigma \bar{\psi} \psi + \delta Z_2 \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma \end{aligned}$$

$$i\Gamma_{\phi l}^{(1)} = \frac{1}{2} g\mu^{\varepsilon} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 - m_l^2} = -i \frac{g_3 m_l^2}{2(2\pi)^3} \left[-\frac{2}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 + \ln\left(\frac{m_l^2}{4\pi\mu^2}\right) \right]. \quad (\text{A.13})$$

其中 d 为时空维数, $\varepsilon = d - 4$, γ_E 是欧拉常数. 在得到 (A.13) 式时, 已利用了下面公式^[17]:

$$\int \frac{d^d k}{(k^2 - Q)^m} = i(-1)^m \pi^{d/2} \frac{\Gamma\left(m - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(m)} Q^{\frac{d}{2}-m} \quad (\text{A.14})$$

$$\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) = -\frac{2}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 + O(\varepsilon). \quad (\text{A.15})$$

同理可得

$$\begin{aligned} i\Gamma_{\phi l}^{(1)} &= -g\mu^{\varepsilon} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{Tr} \frac{1}{\gamma \cdot k - m_F} \\ &= ig \frac{4m_F^2}{(4\pi)^2} \gamma \left[-\frac{2}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 + \ln\left(\frac{m_F^2}{4\pi\mu^2}\right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

其中 γ 为夸克的简并因子.

在单圈近似下, 无外腿的 1 点正规顶角总贡献为

$$\Gamma_l^{(1)} = \Gamma_{\phi l}^{(1)} + \Gamma_{\psi l}^{(1)} + D + Av + \frac{1}{2} Bv^2 + \frac{1}{3!} Cv^3. \quad (\text{A.17})$$

根据 (A.12) 式可将重整化条件 (A.9) 表示为

$$\begin{aligned} \Gamma_l^{(1)}|_{v=\sigma_v} &= 0, \\ \frac{d\Gamma_l^{(1)}}{dv} \Big|_{v=\sigma_v} &= 0, \\ \frac{d^2\Gamma_l^{(1)}}{dv^2} \Big|_{v=\sigma_v} &= 0, \\ \frac{d^3\Gamma_l^{(1)}}{dv^3} \Big|_{v=\sigma_v} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

利用 (A.13) 式和 (A.16)–(A.18) 式求得

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{3\gamma g^2 m_\psi^2}{4\pi^2} - \frac{1}{32\pi^2} \left(b^2 - bc\sigma_v - \frac{1}{2} c^2 \sigma_v^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{(b + c\sigma_v)^4 \sigma_v^2}{32\pi^2 m_\sigma^4} + \frac{\sigma_v (b - 2c\sigma_v)(b + c\sigma_v)^2}{32\pi^2 m_\sigma^2} \\ &\quad - \frac{b^2 + ac}{32\pi^2} \left[-\frac{2}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 + \ln\left(\frac{m_\sigma^2}{4\pi\mu^2}\right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{6\gamma g^2 m_\psi}{2\pi^2} - \frac{3bc}{32\pi^2} - \frac{(b + c\sigma_v)^3}{32\pi^2 m_\sigma^2} \\ &\quad - \frac{(b + c\sigma_v)^4 \sigma_v}{32\pi^2 m_\sigma^4} + \frac{3c(b + c\sigma_v)^2 \sigma_v}{16\pi^2 m_\sigma^2} \\ &\quad - \frac{3bc}{32\pi^2} \left(-1 - \frac{2}{\varepsilon} + \gamma_E + \ln\left(\frac{m_\sigma^2}{4\pi\mu^2}\right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{3c^2}{32\pi^2} + \frac{11\gamma g^4}{2\pi^2} + \frac{(b + c\sigma_v)^4}{32\pi^2 m_\sigma^4} - \frac{3c(b + c\sigma_v)^2}{16\pi^2 m_\sigma^2} \\ &\quad + \frac{3\gamma g^4}{2\pi^2} \left(-1 - \frac{2}{\varepsilon} + \gamma_E + \ln\left(\frac{m_\psi^2}{4\pi\mu^2}\right) \right) \\ &\quad - \frac{3c^2}{32\pi^2} \left(-1 - \frac{2}{\varepsilon} + \gamma_E + \ln\left(\frac{m_\sigma^2}{4\pi\mu^2}\right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$D_1 = -\frac{\gamma g m_\psi^3}{6\pi^2} + \frac{b\sigma_v}{32\pi^2} \left(b + \frac{1}{2} c\sigma_v \right) - \frac{1}{6} \frac{(b + c\sigma_v)^4 \sigma_v^3}{32\pi^2 m_\sigma^4}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{4} \frac{(b + c\sigma_v)^2 \sigma_v^2}{16\pi^2 m_\sigma^2} (b - c\sigma_v) \\
& - \frac{ab}{32\pi^2} \left[-1 - \frac{2}{8} + r_2 + \ln \left(\frac{m_\sigma^2}{4\pi\mu^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{A.22}$$

把 (A.19)–(A.22) 式代入 (A.17) 式并按下式进行积分可以求得有效势的单圈修正为

$$\begin{aligned}
V_1(v) = & - \int \Gamma_j^{(1)}(v) dv = - \frac{\gamma m_F^4}{16\pi^2} \ln \left(\frac{m_F^2}{m_\phi^2} \right) + \frac{m_i^4}{64\pi^2} \ln \left(\frac{m_i^2}{m_\sigma^2} \right) \\
& + \frac{\gamma}{96\pi^2} (-16m_\sigma^2 m_F + 36m_\phi^2 m_F^2 - 48m_\phi m_F^3 + 25m_F^4) \\
& - \frac{v(8ab + 4b^2v + 4acv + 4bcv^2 + c^2v^3)}{512\pi^2} \\
& + \frac{1}{32\pi^2} \left[b\sigma_v \left(b + \frac{1}{2}c\sigma_v \right) v - \frac{v^2}{2} \left(b^2 - bc\sigma_v - \frac{1}{2}c^2\sigma_v^2 \right) - \frac{1}{2}bcv^3 \right. \\
& \left. - \frac{1}{8}c^2v^4 \right] + \frac{(b + c\sigma_v)^4}{32\pi^2 m_\sigma^4} \left[-\frac{1}{6}\sigma_v^3 v + \frac{1}{4}\sigma_v^2 v^2 - \frac{1}{6}\sigma_v v^3 + \frac{1}{24}v^4 \right] \\
& + \frac{(b + c\sigma_v)^2}{32\pi^2 m_\sigma^2} \left[-\frac{\sigma_v(b - c\sigma_v)v}{2} + \frac{v^2\sigma_v(b - 2c\sigma_v)}{2} \right. \\
& \left. - \frac{(b + c\sigma_v)v^3}{6} + c\sigma_v v^3 - \frac{cv^4}{4} \right]
\end{aligned} \tag{A.23}$$

在 (A.23) 式中已不含发散, 所以重整化可以使单圈图贡献成为有限部分.

参 考 文 献

- [1] Lee, T. D., Particle Physics and Introduction to Field Theory, Harwood Academic, New York 1981.
- [2] Lee, T.D., Pang, Y., *Phys. Rep.*, **221** (1992) 251.
- [3] Goldflam, R., Willets, L., *Phys. Rev.*, **D25** (1982) 1951;
Willets, L., Nontopological Solitons, Lecture Notes in Physics, Vol.24 World Scientific, Singapore, 1989.
- [4] Nambu, Y., Jona-Lasinio, G., *Phys. Rev.*, **122** (1961), 345; **124** (1961) 246.
- [5] Wang, E. K., Li J. R., Liu, L.S., *Phys. Rev.*, **D41** (1990) 2288;
Gao S., Wang E.K., Li, J. R., *Phys. Rev.*, **D46** (1992) 3211.
- [6] Su, R. K., et al, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, **19**: (1993) 79.
- [7] Deng, S. H. Li, J. R., *Phys. Lett.*, **B302** (1993) 279;
邓胜华, 李家荣, 科学通报, **38**(1993) 978.
- [8] Klevansky, S. P., *Rev. Mod. Phys.*, **64** (1992) 649.
- [9] Linde, A. D., *Rep. Prog. Phys.*, **42** (1979) 389.
- [10] Bernard, C. W., *Phys. Rev.*, **D9** (1974) 3312.
- [11] Jackiw, R., *Phys. Rev.*, **D9** (1974) 1686; 2904.
- [12] 李家荣, 夸克物质理论导论, 湖南教育出版社 1989.
- [13] Freedman, B. A., McLerran, L. D., *Phys. Rev.*, **D16** (1977) 1130, 1147, 1169.
- [14] Kapusta, J., *Nucl. Phys.*, **B148** (1979) 461.
- [15] Lee, T. D., Margulies, M., *Phys. Rev.*, **D11** (1975) 1591.
- [16] Coleman, S., Weinberg, E., *Phys. Rev.*, **D7** (1973) 1888;
Weinberg, S., *ibid*, **D7** (1973) 2887.
- [17] 't Hooft, G., Veltman, M., *Nucl. Phys.*, **B44** (1974) 189.

Two-Loop Effective Potential of Non-topological Soliton Bag Model at Finite Temperature

Deng Shenghua Wang Enke Li Jiarong

(*Institute of Particle Physics, Hua-Zhong Normal University, Wuhan 430070*)

Received 3 August 1994

Abstract

The two-loop effective potential of the non-topological soliton bag model at finite temperature and finite density is calculated. The influence of thermal effects on the vacuum structure is investigated as well.

Key words effective potential, soliton bag model, vacuum structure.