第 19 卷 第 7 期　　高能物理与核物理　　Vol. 19, No. 7
1995 年 7 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　July, 1995

快报

夸克质量矩阵与 CP 对称性破坏*

邢　志　忠
（慕尼黑大学物理系　德国）

1995-01-13 收稿

摘　　要

本文给出一类夸克质量矩阵与 CP 破坏参量的精确解析关系. 有关结果适用于唯象研究不同质量矩阵模型及其 CP 破坏效应的细微差别.

关键词　夸克，质量矩阵，CP 破坏

夸克质量起源与 CP 对称性破坏一直是困扰粒子物理学家的两个难题. 目前的弱-电磁-强相互作用标准模型及其推广的理论框架尚无法对此予以解释，而相关的高能物理实验所积累的信息[1]还不足以给理论研究引导或暗示. 在这种情况下，基于简单性和对称性原则的唯象探索便成为一条通向最终理论解决上述问题的重要途径. 迄今，多种夸克质量矩阵形式已被考虑[2]以求正确地预言夸克混合和 CP 破坏参量. 其中最合理的一类矩阵形式是

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma} & 0 \\ A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma} & D & B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau} \\ 0 & B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau} & C \end{pmatrix}, \tag{1}$$

这里 A, B, C 和 D 为实参数且 $|A| \ll |B| \ll |C|$; D 与 B 同属于 C 的一级微扰项; σ 与 τ 是位相参数. 矩阵 M 通常被称为推广了的 Fritzsch 矩阵[3]. 根据不同的对称性考虑（例如夸克味道量子数的“民主性”及其破缺[4]）人们可以确定上述实参数与夸克质量本征值的关系. 但是在计算夸克混合矩阵和 CP 破坏参量时，几乎所有的文献都由于数学困难而只给出一级近似上的解析结果. 毫无疑问这是令人不满意的，因为一级解析近似不足以显示不同质量矩阵形式之间的差异（特别是对 CP 破坏程度的不同预言）. 精确的数值计算固然可以区分各种质量矩阵模型，但却难以暗示每一种模型的内在对称性或背后的动力学因素.

本文旨在不失一般性地给出夸克质量矩阵 M 与 CP 破坏参量 J（Jarlskog 参量[5]）之间的精确解析关系. 公式化的结果可以应用于唯象分析形如 M 的不同质量矩阵及其 CP 破坏效应.

为表达方便我们将 M 分解为实矩阵 $\overline{M}$ 与位相矩阵 P 之积: $M = P\overline{M}P^{+}$，其中

* 本工作得到 AvH-CHN23617 基金的部分资助.

$$\bar{M}=\begin{pmatrix}0 & A & 0\\ A & D & B\\ 0 & B & C\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & e^{-i\sigma} & 0\\ 0 & 0 & e^{-i(\sigma+\tau)}\end{pmatrix}. \tag{2}$$

通过下面的幺正变换我们将 $\bar{M}$ 对角化：

$$O^{+}\bar{M}O=\mathrm{Diag}\{m_1,m_2,m_3\}, \tag{3}$$

这里 $m_i(i=1,2,3)$ 为夸克质量本征值（不一定为正数）。注意矩阵 O 的元素之间存在关系

$$O_{2i}=\frac{m_i}{A}O_{1i},\quad O_{3i}=\frac{B}{m_i-C}O_{2i},\quad (i=1,2,3). \tag{4}$$

此外，还可以得到

$$\sum_{i=1}^{3}m_i=C+D,\quad \sum_{i=1}^{3}m_i^2=2(A^2+B^2)+C^2+D^2,\quad \prod_{i=1}^{3}m_i=-A^2C. \tag{5}$$

夸克味道混合矩阵(即 Cabibbo-Kobayashi-Maskawa 矩阵[6])定义为

$$V\equiv O_u^{+}P_u^{+}P_dO_d, \tag{6}$$

其中指标 u,d 分别代表电荷 $+\frac{2}{3}$ 与 $-\frac{1}{3}$ 的夸克族。矩阵 V 的元素可进一步表达成如下形式：

$$V_{i\alpha}=O_{1i}^{u}O_{1\alpha}^{d}+(O_{2i}^{u}O_{2\alpha}^{d}+O_{3i}^{u}O_{3\alpha}^{d}e^{i\Delta\tau})e^{i\Delta\sigma}, \tag{7}$$

这里我们定义 $\Delta\sigma=\sigma_u-\sigma_d$ 和 $\Delta\tau=\tau_u-\tau_d$；拉丁下标 i（或 j,k）与希腊下标 α（或 β,γ）分别表示 (u,c,t) 与 (d,s,b)。为了研究 CP 破坏，我们定义厄米夸克质量矩阵 M_u 和 M_d 的对易子[5]：

$$[M_u,M_d]\equiv iC. \tag{8}$$

矩阵 C 的行列式由下式给出：

$$\mathrm{Det}C=-2J\prod_{i<j}(m_i-m_j)\prod_{\alpha<\beta}(m_\alpha-m_\beta), \tag{9}$$

这里 Jarlskog 参量 J 不依赖于夸克场的相位任意性。可以证明 J 是矩阵 V 的 9 个相位不变量 $\Delta_{i\alpha}$ 的共同虚部[5,7]：

$$J=\mathrm{Im}\Delta_{i\alpha}\equiv\mathrm{Im}(V_{j\beta}V_{k\gamma}V_{j\gamma}^{*}V_{k\beta}^{*}) \tag{10}$$

其中指标 $(i,j,k)=(u,c,t)$ 和 $(\alpha,\beta,\gamma)=(d,s,b)$ 各自循环。利用方程(7)，J 可进一步表达为质量矩阵位相差 $\Delta\sigma$ 与 $\Delta\tau$ 的函数：

$$\begin{aligned}J=&T_1\sin\Delta\sigma+T_2\sin\Delta\tau+T_3\sin(2\Delta\sigma)+T_4\sin(2\Delta\tau)\\&+T_5\sin(\Delta\sigma+\Delta\tau)+T_6\sin(\Delta\sigma-\Delta\tau)\\&+T_7\sin(2\Delta\sigma+\Delta\tau)+T_8\sin(\Delta\sigma+2\Delta\tau)+T_9\sin(2\Delta\sigma+2\Delta\tau),\end{aligned} \tag{11}$$

显然系数 $T_i(i=1,\cdots,9)$ 依赖于夸克质量本征值 m_i 或实参数 A,B,C,D。确定 T_i 的相对大小可以区分不同形式的质量矩阵及其 CP 破坏效应。在计算 T_i 之前我们先讨论 CP 对称性破坏的三种特殊情形：

(1) $m_u\to 0$。该极限意味着 QCD 拉氏量中不存在"强 CP"破坏效应[8]。容易发现 $m_u=0$ 对应 $A_u=0$，从而导致 $O_{11}^{u}=1$ 以及 $O_{12}^{u}=O_{13}^{u}=O_{21}^{u}=O_{31}^{u}=0$。这时夸

克混合矩阵 V 的元素分别为

$$\begin{aligned} V_{11} &= O^{d}_{11},\ V_{12} = O^{d}_{12},\ V_{13} = O^{d}_{13}; \\ V_{2\alpha} &= (O^{u}_{22}O^{d}_{2\alpha} + O^{u}_{32}O^{d}_{3\alpha}e^{i\Delta\tau})e^{i\Delta\sigma}; \\ V_{3\alpha} &= (O^{u}_{23}O^{d}_{2\alpha} + O^{u}_{33}O^{d}_{3\alpha}e^{i\Delta\tau})e^{i\Delta\sigma}, \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $\alpha=1,2,3$. J 参量可以简化成如下形式:

$$J|_{m_u=0} = \mathrm{Im}\Delta_{3\alpha} = [O^{u}_{22}O^{u}_{32}O^{d}_{1\beta}O^{d}_{1\gamma}(O^{d}_{2\beta}O^{d}_{3\gamma} - O^{d}_{2\gamma}O^{d}_{3\beta})]\sin\Delta\tau, \tag{13}$$

这里 $(\alpha,\beta,\gamma)=(1,2,3)$ 为循环指标. 我们注意到相位差 $\Delta\sigma$ 对 CP 破坏没有贡献. 如果 $\Delta\tau=0$ 或 $\pm\pi$, 则 $J|_{m_u=0}=0$ 严格成立. 以上讨论表明人们可以构造一类夸克质量模型形如M但只保留位相 σ. 那么 $m_u\to 0$ 将是这类模型中"强 CP"与"弱 CP"破坏效应消失的共同极限. 是否"强 CP"和"弱 CP"对称性之间存在着内在联系,还是一个目前没有答案的问题.

(2) $\Delta\tau=0$. 这时夸克混合矩阵 V 只依赖于位相差 $\Delta\sigma$,CP 破坏参量 J 取形式

$$J|_{\Delta\tau=0} = T_a\sin\Delta\sigma + T_b\sin(2\Delta\sigma), \tag{14}$$

其中

$$T_a = T_1+T_5+T_6+T_8,\ T_b = T_3+T_7+T_9. \tag{15}$$

T_a 与 T_b 的相对大小决定了 $J|_{\Delta\tau=0}$ 对位相差 $\Delta\sigma$ 和 $2\Delta\sigma$ 的依赖程度. 假设质量矩阵 M可以基本正确地预言夸克混合参数 V_{us} 与 V_{cb} 的实验值范围, 我们能够证明[9]比值 T_b/T_a 的最大量级为 10^{-5}. 这一结果的重要性在于它表明 $|\Delta\sigma|=90°$ 将相当精确地导致 $J|_{\Delta\tau=0}$ 的最大值(一些文献把最大的 J 取值称作"最大 CP 破坏").

(3) $\Delta\sigma=0$. 与情形 (2) 类似,我们得到

$$J|_{\Delta\sigma=0} = T_x\sin\Delta\tau + T_y\sin(2\Delta\tau), \tag{16}$$

这里

$$T_x = T_2+T_5-T_6+T_7,\ T_y = T_4+T_8+T_9. \tag{17}$$

可以验证 T_x 是 CP 破坏的主要贡献项. 考虑多数形如M的具体夸克质量模型(例如 Fritzsch 模型),我们发现 $T_x\lesssim10^{-6}$ 而 T_y 更小[10],均低于目前 Jarlskog 参量的实验限 $(\sim10^{-5})$[11]. 这表明位相差 $\Delta\tau$ 在解释夸克混合与 CP 破坏效应中远不如 $\Delta\sigma$ 重要. 类似地人们可以讨论 J 在 $\Delta\tau=\pm\pi$ 或 $\Delta\sigma=\pm\pi$ 条件下的行为.

下面计算 T_i. 考虑到现实世界里所有夸克均携带质量且其数值呈阶梯状[1], 我们定义如下非零量:

$$\begin{aligned} X_O &= (O^{u}_{1j}O^{u}_{1k}O^{d}_{1\beta}O^{d}_{1\gamma})^2(m_j-m_k)(m_\beta-m_\gamma)/(A_uA_d), \\ X_m &= m_jm_km_\beta m_\gamma, \\ X_C &= (m_j-C_u)(m_k-C_u)(m_\beta-C_d)(m_\gamma-C_d), \end{aligned} \tag{18}$$

其中 (i,j,k) 与 (α,β,γ) 分别为电荷 $+\frac{2}{3}$ 与 $-\frac{1}{3}$ 夸克的循环指标以确保所有 T_i 的结果不依赖于夸克场相位的任意性. 当然这种一般性的结果也使得我们能够根据方便而输入不同的夸克质量本征值来求得同一的 T_i. 借助于方程 (4) 和 (7), 我们发现

$$T_3 = T_4 = T_9 = 0 \tag{19}$$

严格成立. 此外,

$$\frac{T_1}{X_O} = 1 - \frac{X_m}{(A_u A_d)^2} + \left(\frac{B_u B_d}{A_u A_d}\right)^2 \frac{X_m}{X_C} \left[\frac{C_u(m_j + m_k)(C_d^2 - m_\beta m_\gamma)}{X_C} + \frac{C_d(m_\beta + m_\gamma)(C_u^2 - m_j m_k)}{X_C} + \frac{2X_m - 2(C_u C_d)^2}{X_C}\right], \tag{20}$$

$$\frac{T_2}{X_O} = \frac{B_u B_d}{A_u A_d} \left[\frac{X_m^2}{(A_u A_d)^2 X_C} - \left(\frac{B_u B_d}{A_u A_d}\right)^2 \frac{X_m^2}{X_C^2} + \frac{C_d m_j m_k (m_\beta + m_\gamma)}{X_C} + \frac{C_u m_\beta m_\gamma (m_j + m_k)}{X_C} - \frac{2X_m}{X_C}\right], \tag{21}$$

$$\frac{T_5}{X_O} = \frac{B_u B_d C_u C_d}{X_C} \left[1 - \left(\frac{B_u B_d}{A_u A_d}\right)^2 \frac{X_m}{X_C} + \frac{X_m}{(A_u A_d)^2} \left(\frac{m_\beta + m_\gamma}{C_d} + \frac{m_j + m_k}{C_u} - 2\right)\right]; \tag{22}$$

并且

$$\frac{T_6}{X_O} = -\frac{B_u B_d C_u C_d}{(A_u A_d)^2} \frac{X_m}{X_C}, \quad \frac{T_7}{X_O} = \frac{B_u B_d}{A_u A_d} \frac{X_m}{X_C}, \quad \frac{T_8}{X_O} = -\left(\frac{B_u B_d}{A_u A_d}\right)^2 \frac{X_m}{X_C}. \tag{23}$$

以上公式不仅适用于数值计算 CP 破坏参量 J，更有益于解析(近似地)论讨不同位相差对 J 的影响。注意方程(20—23)中的实参数 A, B, C, D 可通过方程(5)由夸克质量本征值确定。

最后以一种新的 Fritzsch 矩阵[4]作为特例说明公式(19—23)的可用性。从最简单的夸克味道"民主性"破缺机制出发，Fritzsch 提出如下形式的质量矩阵：

$$M_F = c \begin{pmatrix} 0 & \rho e^{i\sigma} & 0 \\ \rho e^{-i\sigma} & \frac{2}{3}\varepsilon & -\frac{\sqrt{2}}{3}\varepsilon \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3}\varepsilon & 3 + \frac{1}{3}\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{24}$$

其中 c, ρ, ε 为实参数。可见 M_F 属于 $\tau = 0$ 情形下的M形式。利用方程(14—15)和(19—23),我们最后得出

$$T_a \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m_u}{m_c}}\sqrt{\frac{m_d}{m_s}}\left(\frac{m_s}{m_b} + \frac{m_c}{m_t}\right)^2 \sim 10^{-5},$$

$$\frac{T_b}{T_a} \approx \sqrt{\frac{m_u}{m_c}}\sqrt{\frac{m_d}{m_s}}\left(\frac{m_c}{m_t}\right)^2 \sim 10^{-7}. \tag{25}$$

注意 $T_b \neq 0$ 但却被强烈压低。因此，$|\Delta\sigma| = 90°$ 是矩阵 M_F 给出最大 CP 破坏参量 J 的必要条件。人们可以思考是否 $\Delta\sigma$ 如此特殊的取值暗示 M_F 的某种深层对称性。

作者感谢杜东生教授，H. Fritzsch 教授和 A. Blumhofer 博士的有益讨论。

参考文献

[1] Particle Data Group, M. Aguilar-Benitez et al., *Phys. Rev.*, **D50**(1994)1173.

[2] See, e.g., H. Fritzsch, *Phys. Lett.*, **B73**(1978)317; *Nucl. Phys.*, **B155**(1979)189; B. Stech, *Phys. Lett.*, **B130**(1983)189; M. Gronau, R. Johnson, J. Schechter, *Phys. Rev. Lett.*, **54**(1985)2176; X. G. He, W. S. Hou, *Phys. Rev.*, **D41**(1990)1517; S. Dimopoulos, L. J. Hall, S. Raby, *Phys. Rev. Lett.*, **68**(1991)1984; R. E. Shrock, *Phys. Rev.*, **D45**(1992)10.

[3] D. Du, Z. Z. Xing, *Phys. Rev.*, **D48**(1993) 2349; and references therein.

[4] H. Fritzsch, D. Holtmannspötter, *Phys. Lett.*, **B338**(1994)290; H. Fritzsch, J. Plankl, *Phys. Lett.*, **B237**(1990)451; P. Kaus, S. Meshkov, *Phys. Rev.*, **D42**(1990)R1863; M. Tanimoto, *Phys. Rev.*, **D41**(1990)1586; Y. Koide, *Phys. Rev.*, **D39**(1989)1391.

[5] C. Jarlskog, *Phys. Rev. Lett.*, **55**(1985)1039.

[6] N. Cabbibo, *Phys. Rev. Lett.*, **10**(1964)531; M. Kobayashi, T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.*, **49**(1973)652.

[7] D. D. Wu, *Phys. Rev.*, **D33**(1986)860.

[8] R. D. Peccei, H. R. Quinn, *Phys. Rev.*, **D16**(1977)1791; S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **40**(1978) 223; F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **40**(1978)279.

[9] H. Fritzsch, Z. Z. Xing, "A Pattern of Maximal CP Violation and Flavour Mixing", CERN Preprint (to appear).

[10] Z. Z. Xing, "From Quark Mass Matrices to CP Violation: A Rephasing Invariant Analysis", LMU Preprint (to appear).

[11] Z. Z. Xing, "Wolfenstein Parametrization Reexamined", LMU-21/94(accepted for publication in *Phys. Rev.* **D**).

Quark Mass Matrices and CP Violation

Xing Zhizhong

(*Department of Physics, University of Munich, Germany*)

Received 13 January 1995

Abstract

We explore the exact analytical relations between a variety of quark mass matrices and CP violation Our results can be applied to the phenomenological studies of different ansätz of mass matrices and their CP-violating effects.

Key words quark, mass matrices, CP violation