第 19 卷 第 5 期　　高能物理与核物理　　Vol. 19, No. 5
1995 年 5 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　May, 1995

$R(5)$ 群 Casimir 算子对核子 JT 耦合态的进一步分类

陈健华　况蕙孙　白铭复　程香爱
(国防科技大学应用物理系　长沙　410073)
1994-02-04 收稿

摘　　要

用 $R(5)$ 群 Casimir 算子 C 对核子 JT 耦合态的进一步分类作了计算，并将 JTC 分类的重复度对 J、T 的依赖关系因子化，对 $j \leqslant T/2$ 列出了具体结果。由 $R(5)$ 的不可约表示引入辛弱数 ν 和约化同位旋 τ，利用 ν 和 τ 的选择定则可简化任意张量算子的矩阵元计算。

关键词　核结构，Casimir 算子，同位旋

1　引　　言

单核子角动量为 j，核子数为 n，壳层角动量为 J，同位旋为 T 的耦合态通常写为 $|j^n\alpha JTM_JM_T\rangle$，其中 M_J、M_T 为 J、T 的投影，α 为附加量子数。取中子、质子的 t_z 为 $1/2, -1/2$，

$$M_T = (n_n - n_p)/2, \tag{1}$$

$$n = n_n + n_p, \tag{2}$$

n_n、n_p 为中子、质子数。除 $j = 1/2$ 外，附加量子数 α 均是必要的。给定 j、n、J、T 的重复度，容易按文献[1]的方法计算。$j = 7/2, n = 7$ 的 JT 分类的重复度见表 1。

表 1　核子 $(7/2)^7$ JT 分类重复度

T \ $2J$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
1/2	7	11	16	20	20	21	20	17	14	12	8	6	4	2	1	1
3/2	4	9	11	13	14	14	12	11	8	6	4	3	1	1	0	0
5/2	1	2	3	3	3	3	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0
7/2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

本文用 $R(5)$ 群的 Casimir 算子对 JT 耦合态作进一步分类，将耦合态表为 $|j^n\beta\omega_1\omega_2JTM_JM_T\rangle$，其中 (ω_1, ω_2) 为 $R(5)$ 的不可约表示，使耦合态具有更好的对称性，更便于理论计算。

2　JTC 分类与耦合态波函数计算

文献[2]将准旋推广到核子,建立了 $R(5)$ 群 10 个生成元与核子 j-j 耦合准旋算子的 10 个分量间的同构关系,给出了 $R(5)$ 群的 Casimir 算子为

$$C=\frac{1}{6}\{2S_+^pS_-^p+2S_+^nS_-^n+S_+^{np}S_-^{np}+(S_0^{np})^2-3S_0^{np}+T_+T_-+T_0^2-T_0\} \tag{3}$$

其中 T_+、T_-、T_0 为同位旋算子, S_+^p、S_+^n(S_-^p、S_-^n) 为质子、中子准旋升(降)算子, S_+^{np}、S_-^{np}、S_0^{np} 为中子-质子准旋算子。

为避免对核子作角动量耦合计算,采用中子、质子先分别作角动量-准旋耦合,再中子、质子作角动量耦合为基比较方便,即取基为

$$\begin{aligned}&|j(\alpha_nQ_nJ_nM_{Q_n},\alpha_pQ_pJ_pM_{Q_p})JM\rangle\\&=\sum_{m_n,m_p}\langle J_nm_nJ_pm_p|JM\rangle|j\alpha_nQ_nJ_nM_{Q_n}m_n\rangle\times|j\alpha_pQ_pJ_pM_{Q_p}m_p\rangle,\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $|j\alpha_iQ_iJ_iM_{Q_i}m_i\rangle$ 为中子($\mathrm{i}=\mathrm{n}$)、质子 ($\mathrm{i}=\mathrm{p}$) 角动量-准旋耦合波函数, J_i、Q_i、m_i、M_{Q_i} 为角动量、准旋量子数, α_i 为附加量子数(对 $j\leqslant 7/2$ 可略去)。

同位旋平方算子可化为

$$\begin{aligned}T^2=&-\sum_k(-1)^k(2k+1)^{1/2}((a_n^+\tilde{a}_n)^k(a_p^+\tilde{a}_p)^k)^0\\&+\frac{1}{4}(n_n-n_p)^2+\frac{1}{2}(n_n+n_p)\end{aligned} \tag{5}$$

其中 a_p^+、a_n^+ 为质子、中子产生算子,

$$\tilde{a}_{nm}=(-1)^{j-m}a_{n-m},\quad \tilde{a}_{pm}=(-1)^{j-m}a_{p-m}. \tag{6}$$

注意到 T^2 不改变总角动量和中子、质子数,以(25)式为基 T^2 的矩阵元为

$$\begin{aligned}&\langle j(\alpha_nQ_nJ_nM_{Q_n},\alpha_pQ_pJ_pM_{Q_p})JM|T^2|j(\alpha'_nQ'_nJ'_nM_{Q_n},\alpha'_pQ'_pJ'_pM_{Q_p})JM\rangle\\&=-\frac{1}{2}\sum_k(-1)^{J'_n+J_p+J+Q_n-M_{Q_n}+Q_p-M_{Q_p}}\begin{pmatrix}Q_n&\kappa&Q'_n\\-M_{Q_n}&0&M_{Q_n}\end{pmatrix}\\&\times\begin{pmatrix}Q_p&\kappa&Q'_p\\-M_{Q_p}&0&M_{Q_p}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}J_n&J'_n&k\\J'_p&J_p&J\end{Bmatrix}\langle j\alpha_nQ_nJ_n\|(dd)^{\kappa k}\|j\alpha'_nQ'_nJ'_n\rangle\\&\times\langle j\alpha_pQ_pJ_p\|(dd)^{\kappa k}\|j\alpha'_pQ'_pJ'_p\rangle\\&+\delta_{\alpha_nQ_nJ_n,\alpha'_nQ'_nJ'_n}\delta_{\alpha_pQ_pJ_p,\alpha'_pQ'_pJ'_p}[(n_n-n_p)^2/4+(n_n+n_p)/2],\end{aligned} \tag{7}$$

式中 $\kappa+k$ 为奇数, d 为中子或质子的生灭算子, $(dd)^{\kappa k}$ 为双生灭算子耦合成准旋-角动量 (κ,k) 阶张量算子, $\langle j\alpha QJ\|(dd)^{\kappa k}\|j\alpha'Q'J'\rangle$ 为 $(dd)^{\kappa k}$ 对准旋-角动量二重约化矩阵元,在文献[3]中已有计算。

Casimir 算子(3式)可化为

$$\begin{aligned}C=&\frac{1}{3}\sum_{k=\text{奇}}(2k+1)^{1/2}((a_n^+\tilde{a}_n)^k(a_p^+\tilde{a}_p)^k)^0\\&+(Q_n^2+Q_p^2)/3+(2j+1)/6.\end{aligned} \tag{8}$$

注意到 C 不改变中子、质子的准旋及总角动量，其矩阵元为

$$
\begin{aligned}
&\langle j(\alpha_n Q_n J_n M_{Q_n}, \alpha_p Q_p J_p M_{Q_p}) JM \mid C \mid j(\alpha'_n Q_n J'_n M_{Q_n}, \alpha'_p Q_p J'_p M_{Q_p}) JM \rangle \\
&= -\frac{1}{6}[(2Q_n+1)(2Q_p+1)]^{-1/2} \sum_{k=\text{奇}} (-1)^{J'_n+J_p+J} \begin{Bmatrix} J_n & J'_n & k \\ J'_p & J_p & J \end{Bmatrix} \\
&\times \langle j\alpha_n Q_n J_n \| (dd)^{0k} \| j\alpha'_n Q_n J'_n \rangle \langle j\alpha_p Q_p J_p \| (dd)^{0k} \| j\alpha'_p Q_p J'_p \rangle \\
&+ \delta_{\alpha_n J_n, \alpha'_n J'_n} \delta_{\alpha_p J_p, \alpha'_p J'_p} [Q_n(Q_n+1) + Q_p(Q_p+11) + j + 1/2]/3 \qquad (9)
\end{aligned}
$$

对给定的 j、J、n_p、n_n（n_p、n_n 与 $n=n_p+n_n$、$M_T=(n_n-n_p)/2$ 等效，也与 M_{Q_n}、M_{Q_p} 等效），按(7)、(9)式计算 T^2、C 的矩阵元，将 T^2、C 同时对角化，得本征值 $T(T+1)$、C 及相应本征矢——JTC 耦合波函数.

3 JTC 分类的重复度及其因子化

在前面将 T^2、C 同时对角化中，只需按本征值 $T(T+1)$、C 分类计数，即得 JTC 分类的重复度. 我们对 $j \leqslant 7/2$ 的所有情况作了计算. 表 2 列出了 $(7/2)^7$ 组态 ($j=7/2$, $n=7$) 的 JTC 分类重复度. 表中第一列为 Casimir 算子本征值 C 乘以 12（使变为整数），第二列为 $2T$，第一行为 $2J$ 值，重复度只打印非零值. 表 2 与表 1 一致. 例如，表 1 中 $T=1/2$、$J=1/2$ 的重复度为 7，表 2 中分解为 $12C=29$、21、15、5 四种情况，其重复度依次为 1、1、2、3，和为 7.

表 2 核子 $(7/2)^7$ JTC 分类重复度

$12C$	$2T$	$2J=1$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
47	7				1												
47	5				1												
47	3				1												
47	1				1												
35	5		1	1		1	1		1								
35	3		2	2		2	2		2								
35	1		1	1		1	1		1								
29	5	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1						
29	3	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1						
29	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1						
21	3	1	2	2	3	3	3	3	2	2	1	1	1				
21	1	1	2	2	3	3	3	3	2	2	1	1	1				
15	3	2	4	5	7	7	7	7	6	5	4	3	2	1	1		
15	1	2	4	5	7	7	7	7	6	5	4	3	2	1	1		
5	1	3	3	6	7	7	8	8	7	6	6	4	3	3	1	1	1

$R(5)$ 的 Casimir 算子本征值 C 可表为[2]

$$C = [\omega_1(\omega_1+3) + \omega_2(\omega_2+1)]/6 \qquad (10)$$

这里 (ω_1, ω_2) 为 $R(5)$ 的不可约表示的标记，ω_1、ω_2 同时为整数（当核子数 n 为偶数）或半奇数（当 n 为奇数）. 当给定 j，有

$$\omega_1 + \omega_2 \leqslant j + 1/2,$$

给定 ω_1，有 $\omega_2 = \omega_1, \omega_{1-1}, \cdots, 0$ 或 $1/2$，

$T = \omega_1, \omega_{1-1}, \cdots, 0$ 或 $1/2$，

给定 ω_1、ω_2、T，S_0^{np} 的本征值的绝对值

$$\frac{1}{2}|n-2j-1| \leqslant \omega_1 - |\omega_2 - T|. \tag{11}$$

由 (ω_1, ω_2) 可引入辛弱数 ν、约化同位旋 τ:

表 3　$M_1(j,J,a,b)$ 数据表

(a) 核子数为奇数

j	ab	$2J=1$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
3/2	31		1														
	11	1		1	1												
5/2	51			1													
	33		1			1											
	31	1	1	1	2	1	1	1									
	11	1	1	2	2	2	2	1	1	1							
7/2	71				1												
	53		1	1		1	1		1								
	51	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1						
	33	1	2	2	3	3	3	3	2	2	1	1	1				
	31	2	4	5	7	7	7	7	6	5	4	3	2	1	1		
	11	3	3	6	7	7	8	8	7	6	6	4	3	3	1	1	1

(b) 核子数为偶数

j	ab	$2J=0$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
3/2	40	1																
	22			1														
	20		1		1													
	00			1		1												
5/2	60	1																
	42			1		1												
	40		1		1		1											
	22		1	1	2	1	1	1	1									
	20	1		2	1	2	1	2		1								
	00		1		2	1	1	1	1		1							
7/2	80	1																
	62			1		1		1										
	60		1		1		1		1									
	44			1		1	1			1								
	42		2	2	4	3	4	3	3	2	2	1	1					
	40	2		3	2	4	2	4	2	3	1	2		1				
	22	2	2	5	5	7	6	7	6	6	4	4	2	2	1	1		
	20		4	2	7	5	7	6	7	4	6	3	3	2	2		1	
	00	1	1	3	2	5	3	5	3	4	3	3	2	2	1	1		1

$$\nu = 2j + 1 - 2\omega_1, \ \tau = \omega_2 \tag{12}$$

用 ω_1、ω_2 或 ν、τ 代替 Casimir 算子本征值 C，更便于应用.

表 2 的显著特点是：同一 C、不同 T，相应的 J 的重复度或者相同，或者是简单的倍数，这不仅对同一 n 是这样，对不同 n 也是这样. 这一现象暗示 JTC 分类的重复度对 J 和 T 的依赖关系可以因子化，根据对大量数据的分析，可因子化为.

$$M(j,n,J,T,a,b) = M_1(j,J,a,b)M_2(|2j+1-n|,T,a,b) \tag{13}$$

其中用 $(a,b) = (2\omega_1, 2\omega_2)$ 代替 C. 上式的理论证明见附录.

表 3 列出 $j = 3/2$、$5/2$、$7/2$ 的 $M_1(j,J,a,b)$，按核子数为偶数（$2J$、a、b 均为偶数）、奇数（$2J$、a、b 均为奇数）分开列表.

表 4 列出 $j \leqslant 7/2$ 的 $M_2(|2j+1-n|,T,a,b)$，同样按核子数为偶数、奇数分开列表. 由表 3、表 4 可得 $j \leqslant 7/2$ 的全部 JTC 分类重复度. 因子化的优点是使数据量大为减少，也更有规律性.

表 4 $M_2(|2j+1-n|,T,a,b)$ 数据表

(a) $jn = |2j+1-n|$ 为奇数

ab	$2T$	$jn=1$	3	5	7
71	7	1			
71	5	1	1		
71	3	1	1	1	
71	1	1	1	1	1
53	5	1	1		
53	3	2	1	1	
53	1	1	1		
51	5	1			
51	3	1	1		
51	1	1	1	1	
33	3	1	1		
33	1	1			
31	3	1			
31	1	1	1		
11	1	1			

(b) $jn = |2j+1-n|$ 为偶数

ab	$2T$	$jn=0$	2	4	6	8
80	8	1				
80	6	0	1			
80	4	1	0	1		
80	2	0	1	0	1	
80	0	1	0	1	0	1
62	6	1	1			
62	4	2	1	1		
62	2	1	2	1	1	
62	0	1	0	1		
60	6	1				
60	4	0	1			
60	2	1	0	1		
60	0	0	1	0	1	
44	4	1	1	1		
44	2	1	1			
44	0	1				
42	4	1	1			
42	2	2	1	1		
42	0	0	1			
40	4	1				
40	2	0	1			
40	0	1	0	1		
22	2	1	1			
22	0	1	0			
20	2	1	0			
20	0	0	1			
00	0	1				

4　JTC 分类矩阵元选择定则

核子 JTC 分类波函数，用辛弱数 ν、约化同位旋 τ 代替 C，可写为 $|j^n\beta\nu\tau JTM_JM_T\rangle$，用它计算矩阵元，除保持角动量、同位旋的选择定则外，还有 ν、τ 的选择定则：对亲态比系数，有 $|\Delta\nu|=1$，$|\Delta\tau|=1/2$；对单体算符，有 $|\Delta\nu|=0,2$；$|\Delta\tau|=0,1$；……。由此可简化计算。

感谢国防科技大学计算机系 YH-II 机房和应用物理系 Sun 4/330 机房的同志对本工作的支持。

附　　录

(13)式的证明

j 壳层核子态的态矢空间在 3 个角动量算子和 $R(5)$ 的 10 个生成元算子下不变，因而状态可按这 13 个算子生成的群 G 的不可约表示分类。由于 $R(5)$ 的生成元均与 3 个角动量算子对易，故有

$$G=R(3)\times R(5),$$

其中 $R(3)$ 是 3 个角动量算子生成的旋转群。从而 G 的不可约表示将由 $R(3)$ 的表示 $D^{(J)}$ 和 $R(5)$ 的表示 $D^{(\omega_1,\omega_2)}$ 的直积构成

$$D^{(J\omega_1,\omega_2)}=D^{(J)}\otimes D^{(\omega_1,\omega_2)}.$$

在 j 壳层态矢空间的约化(按 G 的表示分类)中，$D^{(J\omega_1,\omega_2)}$ 的重复度记为 $M_1'(j,J,\omega_1,\omega_2)$，其中含 j，是因为 J、ω_1、ω_2 的允许值与 j 有关：$\omega_1+\omega_2\leqslant j+1/2$，$J\leqslant(j+1/2)^2$。

注意到群链

$$R(5)\supset\{S_0^{np}\}\times SU(2)_T,$$

其中 $\{S_0^{np}\}$ 由 1 个生成元 S_0^{np} 生成，$SU(2)_T$ 由 3 个同位旋算子生成，$R(5)$ 的表示 $D^{(\omega_1,\omega_2)}$ 可按其子群 $\{S_0^{np}\}\times SU(2)_T$ 的表示约化，即具有量子数 (ω_1,ω_2) 的态进一步按 S_0^{np} 的本征值 $n'=(n-2j+1)/2$、同位旋 T 分类，$\{S_0^{np}\}$、$SU(2)_T$ 的不可约表示记为 $\chi(n')$、$D^{(T)}$，$\chi(n')D^{(T)}$ 的重复度记为 $M_2'(n',T,\omega_1,\omega_2)$，则有

$$D^{(\omega_1,\omega_2)}=\sum_{n',T}\oplus M_2'(n',T,\omega_1,\omega_2)\chi(n')D^{(T)}$$

因此，j 壳层具有量子数 $(J;\omega_1,\omega_2;T;n')$ 的多重态的重复度为

$$M'(j,n',J,\omega_1,\omega_2,T)=M_1'(j,J,\omega_1,\omega_2)M_2'(n',T,\omega_1,\omega_2).$$

注意到 $n'=(n-2j-1)/2$，(j,n') 与 (j,n) 等价；由于粒子与空穴对称性，重复度与 n' 符号无关。上式中用 $(a,b)=(2\omega_1,2\omega_2)$ 代替 (ω_1,ω_2)，M' 中用 n 代表 n'，M_2' 中用 $|2n'|=|2j+1-n|$ 代替 n'，即得(13)式。

参　考　文　献

[1]　J. H. Chen, X. A.Cheng, Y. D. Gao, *Acta Physica Sinca (Overseas Edition)*, 2(1993) 890.
[2]　B. H. Flower, B. Szpikowski, *Proc. Phys. Soc*, 84(1964) 193.
[3]　陈健华、况蕙孙，二次量子化方法在原子结构计算中的应用，湖南科技出版社，1992.

Further Classification of *JT* Coupled States for Nucleons by Casimir Operator of *R*(5) Group

Chen Jianhua Kuang Huisun Bai Mingfu Cheng Xiangai
(*Department of Applied Physics, National University of Defence Technology, Changsha* 410073)
Received 4 February 1994

Abstract

The further classifications of *JT* coupled states for nucleons by the Casimir operator C of $R(5)$ group have been calculated. The multiplicities of *JTC* classification (which depends on both *J* and *T*) have been factorized into one factor depending on J and T, and the results for $j \leqslant 7/2$ are listed. Tollowing the irredicible representation of $R(5)$, the siniority ν and reduced isotopic spin τ can be used to simplify the calculation of matrix elements of any tensor operator by the selection rules of ν and τ.

Key words nuclear structure, Casimir operator, isotopic spin.