第 19 卷 第 2 期　　高能物理与核物理　　Vol. 19, No. 2
1995 年 2 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Feb., 1995

三维精确可解统计模型——Baxter-Bazhanov 模型的可积性条件

胡占宁[1)]　　侯伯宇
(西北大学现代物理研究所　西安　710069)

1993-12-21 收稿

摘　　要

从手征 Potts 模型推导出三维精确可解 Baxter-Bazhanov 模型的“可逆性”及“星-方”关系，从而说明其可积性条件——四面体方程是手征 Potts 模型星——三角关系的一个结论.若把玻尔兹曼权参变数表示为 Zamolodchikov 角变量形式，其附加条件自然成立. 值得指出的是，由本文处理方法可以得出三维可解统计模型的星-三角关系，它包含了 Bazhanov 和 Baxter 的结论.

关键词　手征 Potts 模型, Baxter-Bazhanov 模型,“星-方”关系, 四面体方程,星-三角关系.

1　引　　言

随着二维精确可解统计模型的大量出现及研究的深入[1]，寻找并研究三维有精确解的统计模型就成为一个引人注目而富有挑战意义的课题.Baxter 和 Bazhanov 对立方格点上自旋相互作用模型的讨论[2]就成为这一领域研究的突破口之一. 接着，Kashaev 等人给出了这一模型的可积性条件——四面体方程[3] 的一个证明，并进一步得出它是“可逆性”条件及 “Star-Square” 关系的结论[4]. 由于该三维模型来自于 Baxter 和 Bazhanov 对手征 Potts 模型[5]的研究，那么，这三维模型的这些可积性条件究竟与手征 Potts 模型的星-三角关系有何联系？本文对这一问题作了讨论，得出了该三维模型的 “可逆性” 及 “Star-Square” 关系可以由手征 Potts 模型的星-三角关系推导出来，从而说明了Baxter-Bazhanov 模型的四面体方程也是手征 Potts 模型星-三角关系的结论. 并且，其参变量表示为 Zamolodchikov 角度形式时[3]，所附加的条件自然成立. 采用本文处理方法，容易得出三维模型的星-三角关系，它包含了 Bazhanov 和 Baxter 的结论[6].

全文由五部分组成. 在第二部分中首先列出了手征 Potts 模型的基本关系式，得出了 Baxter-Bazhanov 模型的“可逆性”关系. 第三部分给出了这三维模型 “Star-Square” 关系与手征 Potts 模型星-三角关系的联系. 从而说明可以由后者得出四面体方程. 在

1) 现地址：中国科学院理论物理研究所，100080.

第四部分中，把四面体方程的玻尔兹曼权各参变量写为 Zamolodchikov 角度形式，从而表明其四个附加条件此时自然成立，而 Kashaev 等人的“对称点”进一步意味着各 Zamolodchikov 角度已取确定值。最后给出一个总结指出由本文方法可以得出 Baxter-Bazhanov 模型的星-三角关系。

2 手征 Potts 模型的基本关系式及 Baxter-Bazhanov 模型的“可逆性”关系

众所周知，手征 Potts 模型的星-三角关系可以写为:

$$\sum_{l=1}^{N} \overline{W}_{qr}^{\mathrm{CP}}(m-l) W_{pr}^{\mathrm{CP}}(n-l) \overline{W}_{pq}^{\mathrm{CP}}(l-k)$$

$$= R_{pqr} W_{pq}^{\mathrm{CP}}(n-m) \overline{W}_{pr}^{\mathrm{CP}}(m-k) W_{qr}^{\mathrm{CP}}(n-k) \tag{2.1}$$

这里，各玻尔兹曼权由下式给出:

$$\frac{W_{pq}^{\mathrm{CP}}(n)}{W_{pq}^{\mathrm{CP}}(0)} = \prod_{j=1}^{n} \frac{d_p b_q - a_p c_q \omega^j}{b_p d_q - c_p a_q \omega^j}, \quad \frac{\overline{W}_{pq}^{\mathrm{CP}}(n)}{\overline{W}_{pq}^{\mathrm{CP}}(0)} = \prod_{j=1}^{n} \frac{\omega a_p d_q - d_p a_q \omega^j}{c_p b_q - b_p c_q \omega^j}. \tag{2.2}$$

其中“快度”矢量 (a_p, b_p, c_p, d_p) 满足:

$$a_p^N + k' b_p^N = k d_p^N, \quad k' a_p^N + b_p^N = k c_p^N, \tag{2.3}$$

而 $k^2 + k'^2 = 1$. 星-三角关系中的标量因子 R_{pqr} 可由三个因子表示出来:

$$R_{pqr} = f_{pq} f_{qr} / f_{pr}, \quad f_{pq} = \left[\prod_{k=1}^{N} \left(\sum_{m=1}^{N} \omega^{mk} \overline{W}_{pq}^{\mathrm{CP}}(m) \right) \Big/ \prod_{k=1}^{N} W_{pq}^{\mathrm{CP}}(k) \right]^{\frac{1}{N}}, \tag{2.4}$$

f_{qr} 及 f_{pr} 有与之形式完全类似的表达式.

Baxter-Bazhanov 模型是立方格点上自旋相互作用的三维精确可解统计模型. 该模型的“基本”玻尔兹曼权 (The Boltzmann Weight Elementary Building Blocks) 可写为:

$$W(x, y, z | k, l) = W(x, y, z | k-l) \Phi(l), \tag{2.5}$$

并且，

$$W(x, y, z | k-l) = \prod_{j=1}^{k-l} \frac{y}{z - x\omega^j}, \quad x^N + y^N = z^N,$$

$$\omega = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/N}, \quad \omega^{1/2} = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/N}, \quad \Phi(l) = (\omega^{1/2})^{l(N+l)}. \tag{2.6}$$

选取手征 Potts 模型基本关系式中的 ω 也由 $\omega = \exp(2\pi\mathrm{i}/N)$ 表示. 在保证关系式(2.3)成立时，选取:

$$a_p = c_p = d_q = 1, \quad b_q = \omega,$$

$$d_p = c_q = (k + k')^{1/N}, \quad b_p = a_q = (k - k')^{1/N}. \tag{2.7}$$

于是，由(2.2)得:

$$W_{pq}^{\mathrm{CP}}(n) / W_{pq}^{\mathrm{CP}}(0) = \delta_{n,0}, \quad \overline{W}_{pq}^{\mathrm{CP}}(n) / \overline{W}_{pq}^{\mathrm{CP}}(0) = 1. \tag{2.8}$$

这里，$\delta_{n,0}$ 为 Z_N 上的 Kronecker 符号，$n \in Z_N$，这时，

$$f'_{pq}=\left[\prod_{m=1}^{N}\left(\sum_{l=1}^{N}\omega^{ml}\frac{\overline{W}_{pq}^{\mathrm{CP}}(l)}{\overline{W}_{pq}^{\mathrm{CP}}(0)}\right)\prod_{m=1}^{N}\frac{W_{pq}^{\mathrm{CP}}(0)}{W_{pq}^{\mathrm{CP}}(m)}\right]^{1/N}=N. \tag{2.9}$$

进一步，若取 $k\to k'$，我们有：

$$\begin{aligned}W_{qr}^{\mathrm{CP}}(n)/W_{qr}^{\mathrm{CP}}(0)&=\overline{W}_{pr}^{\mathrm{CP}}(0)/\overline{W}_{pr}^{\mathrm{CP}}(n)=W(k^{-1/N}a_r,b_r,\omega d_r|n),\\ \overline{W}_{qr}^{\mathrm{CP}}(n)/\overline{W}_{qr}^{\mathrm{CP}}(0)&=1/W(k^{-1/N}b_r,\omega a_r,\omega^2c_r|-n),\\ W_{pr}^{\mathrm{CP}}(n)/W_{pr}^{\mathrm{CP}}(0)&=W(k^{-1/N}b_r,\omega a_r,\omega c_r|-n).\end{aligned} \tag{2.10}$$

于是，利用手征 Potts 模型的星-三角关系式可以得出：

$$\sum_{l=1}^{N}\frac{W(k^{-1/N}b_r,\omega a_r,\omega c_r|l,n)}{W(k^{-1/N}b_r,\omega a_r,\omega^2c_r|l,m)}=R'_{pqr}\delta_{n,m}. \tag{2.11}$$

而 $R'_{pqr}=f'_{pq}f'_{qr}/f'_{pr}$，$f'_{qr}$ 及 f'_{pr} 与(2.9)中 f'_{pq} 有完全类似表达式。实际上，较简单的作法是直接由(2.11)式计算 R'_{pqr}。容易证明：

$$\sum_{l=1}^{N}(1-z\omega^{l})^{-1}=N(1-z^{N})^{-1}, \tag{2.12}$$

于是：

$$R'_{pqr}=N(1-\omega k^{1/N}c_r/b_r)/(1-kc_r^N/b_r^N). \tag{2.13}$$

令 $x=k^{-1/N}b_r$，$y=\omega a_r$，$z=\omega c_r$，则式(2.11)可写为：

$$\sum_{l=1}^{N}\frac{W(x,y,z|l,n)}{W(x,y,\omega z|l,m)}=N\delta_{n,m}\frac{1-z/x}{1-z^N/x^N}. \tag{2.14}$$

$\delta_{n,m}$ 为 Z_N 上的 Kronecker 符号，n，$m\in Z_N$。这一关系式正是 Kashaev 等所给出的三维可解统计模型的"可逆性"关系式。

3 Baxter-Bazhanov 模型的"Star-Square"关系式

早在十年前，关于八顶角模型的研究中，作为星-三角关系的推广，就提出了"Star-Square"关系式。对于三维有精确解的 Baxter-Bazhanov 模型，Kashaev 等人给出的"Star-Square"关系式为：

$$\begin{aligned}&\left\{\sum_{\sigma=1}^{N}\frac{W(x_1,y_1,z_1|a+\sigma)W(x_2,y_2,z_2|b+\sigma)}{W(x_3,y_3,z_3|c+\sigma)W(x_4,y_4,z_4|d+\sigma)}\right\}_0\\ &=\frac{1}{\Phi(a-b)\omega^{(a+b)/2}}\cdot\left(\frac{x_2y_1}{x_1z_2}\right)^a\left(\frac{x_1y_2}{x_2z_1}\right)^b\left(\frac{z_3}{y_3}\right)^c\left(\frac{z_4}{y_4}\right)^d\\ &\cdot\frac{W\left(\dfrac{\omega x_3x_4z_1z_2}{x_1x_2z_3z_4}\middle|c+d-a-b\right)}{W\left(\dfrac{x_4z_1}{x_1z_4}\middle|d-a\right)W\left(\dfrac{x_3z_2}{x_2z_3}\middle|c-b\right)W\left(\dfrac{x_3z_1}{x_1z_3}\middle|c-a\right)W\left(\dfrac{x_4z_2}{x_2z_4}\middle|d-b\right)}\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中等式左边项大括号之后"0"表示该项外自旋指标为零时归一化为单位 1。并注意这时保持各 $x_i,y_i,z_i(i=1,2,3,4)$ 不变。各 $W(x|l)$ 由下面关系式给出：

$$W(x,y,z|l)=(y/z)^l W(x/z|l),\, l\in Z_N. \tag{3.2}$$

并且,(3.1)中参变量应满足 $y_1y_2z_3z_4/y_3y_4z_1z_2=\omega$。下面从手征 Potts 模型的星-三角关系出发,具体得出这一关系式。

对于"快度"矢量 (a_p,b_p,c_p,d_p) 及 (a_q,b_q,c_q,d_q),令

$$\begin{aligned} y_{pq}&=((d_pb_q)^N-(a_pc_q)^N)^{1/N}=((b_pd_q)^N-(c_pa_q)^N)^{1/N},\\ \bar{y}_{pq}&=((\omega a_pd_q)^N-(d_pa_q)^N)^{1/N}=((c_pb_q)^N-(b_pc_q)^N)^{1/N}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

于是,由式(2.2)得:

$$\begin{aligned} \frac{W_{pq}^{\mathrm{CP}}(n)}{W_{pq}^{\mathrm{CP}}(0)}&=\frac{W(c_pa_q,y_{pq},b_pd_q|n)}{W(a_pc_q,y_{pq},d_pb_q|n)},\\ \frac{\overline{W}_{pq}^{\mathrm{CP}}(n)}{\overline{W}_{pq}^{\mathrm{CP}}(0)}&=\frac{W(b_pc_q,\bar{y}_{pq},c_pb_q|n)}{W(d_pa_q,\bar{y}_{pq},\omega a_pd_q|n)}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

取 $c_r=0$,则有:

$$W_{qr}^{\mathrm{CP}}(n)/W_{qr}^{\mathrm{CP}}(0)=W_{qR(r)}(n),\quad \overline{W}_{qr}^{\mathrm{CP}}(n)/\overline{W}_{qr}^{\mathrm{CP}}(0)=1/W_{R(q)R(r)}(n); \tag{3.5}$$

$$W_{pr}^{\mathrm{CP}}(n)/W_{pr}^{\mathrm{CP}}(0)=W_{pR(r)}(n),\quad \overline{W}_{pr}^{\mathrm{CP}}(n)/\overline{W}_{pr}^{\mathrm{CP}}(0)=1/W_{R(p)R(r)}(n). \tag{3.6}$$

其中,R 定义为:

$$R(a_p,b_p,c_p,d_p)=(b_p,\omega a_p,d_p,c_p)$$

并且记:

$$W_{pq}(n)\equiv W(\omega^{-1}c_pb_q,d_pa_q,b_pc_q|n). \tag{3.7}$$

把(3.4)—(3.6)式代入手征 Potts 模型的星-三角关系式(2.1)中有:

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma=1}^{N}\frac{W_{pR(r)}(a+\sigma)W(\omega^{1-b+d}a_pd_q,\omega^{1/2}\bar{y}_{pq},\omega d_pa_q|b+\sigma)}{W_{R(q)R(r)}(c+\sigma)W(c_pb_q,\omega^{1/2}\bar{y}_{pq},\omega b_pc_q|d+\sigma)}\\ &\quad=R'_{pqr}\frac{W_{qR(r)}(a-d)W(\omega^{1-b+d}a_pd_q,\omega^{1/2}\bar{y}_{pq},\omega d_pa_q|b-d)W(c_pa_q,y_{pq},b_pd_q|a-c)}{W_{R(p)R(r)}(c-d)W(a_pc_q,y_{pq},d_pb_q|a-c)} \end{aligned} \tag{3.8}$$

其中已用了"基本"玻尔兹曼权的性质:

$$W(x,y,z|l)W(x\omega^l,y,z|k)=W(x,y,z|l+k). \tag{3.9}$$

令:

$$x_1=\frac{a_pd_q}{d_pa_q},\quad x_2=\frac{c_pa_r}{b_pd_r},\quad x_3=\frac{d_qa_r}{a_qd_r},\quad x_4=\frac{c_pb_q}{b_pc_q}. \tag{3.10}$$

并记 $R'_{pqr}=R(x_1,x_2,x_3,x_4)$,考虑到(3.2)式,则有:

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma=1}^{N}\omega^{\sigma}\frac{W(x_1|\sigma)W(x_2|a+\sigma)}{W(x_3/\omega|\sigma)\,W(x_4/\omega|\sigma)}\\ &\quad=R(x_1,x_2,x_3,x_4)\frac{W(x_2/x_3|a)\;W(x_2/x_4|a)}{W(x_1x_2/x_3x_4|a)}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

作变换 $x_1\to x_2$, $x_2\to x_1$ 并注意到关系式(3.10)我们有:

$$\sum_{\sigma=1}^{N}\frac{W_{pR(r)}(\sigma)W(\omega^{1-b+d}a_pd_q,\omega^{1/2}\bar{y}_{pq},\omega d_pa_q|\sigma)}{W_{R(q)R(r)}(\sigma)W(c_pb_q,\,\omega^{1/2}\bar{y}_{pq},\omega b_pc_q|\sigma)}$$

$$= R'_{pqr}\left(\frac{c_p a_r}{b_p d_r}\right)^{d-b}\frac{W(\omega^{b-d-1}d_p a_r/a_p d_r|d-b)}{W(\omega^{b-d-1}d_p a_q/a_p d_q|d-b)}$$
$$\cdot\frac{W(\omega^{b-d-1}c_p d_p a_q b_q/a_p b_p c_q d_q|d-b)}{W(\omega^{b-d-1}d_p b_q/a_p c_q|d-b)}. \tag{3.12}$$

另外,(3.8)式可以写为:

$$\sum_{\sigma=1}^{N}\frac{W_{pR(r)}(a+\sigma)W(\omega^{1-b+d}a_p d_q,\omega^{1/2}\bar{y}_{pq},\omega d_p a_q|b+\sigma)}{W_{R(q)R(r)}(c+\sigma)W(c_p b_q,\omega^{1/2}\bar{y}_{pq},\omega b_p c_q|d+\sigma)}$$
$$=\frac{R'_{pqr}}{\Phi(a-d)\Phi(b-d)}\left(\frac{a_p d_q b_r}{\omega^{1/2}c_p a_q a_r}\right)^a\left(\frac{\omega^{b-d-1}\bar{y}_{pq}}{a_p d_q}\right)^b$$
$$\cdot\left(\frac{\omega a_q d_r}{c_q b_r}\right)^c\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}-b+d}c_p c_q a_r}{\bar{y}_{pq}d_r}\right)^d$$
$$\cdot\frac{W\left(\frac{\omega^{b-d-1}d_p a_r}{a_p d_r}|d-b\right)W\left(\frac{\omega^{b-d-1}d_p b_q}{a_p c_q}|c+d-a-b\right)}{W\left(\frac{\omega^{b-d-1}d_p a_q}{a_p d_q}|d-b\right)W\left(\frac{\omega^{b-d-1}d_p b_q}{a_p c_q}|d-b\right)}$$
$$\cdot\frac{1}{W\left(\frac{b_q b_r}{\omega c_q a_r}|d-a\right)W\left(\frac{\omega^{b-d-1}d_p a_r}{a_p d_r}|c-b\right)W\left(\frac{b_p c_q}{\omega c_p a_q}|c-a\right)}. \tag{3.13}$$

令:

$$x_1=c_p a_r,\quad x_2=\omega^{1-b+d}a_p d_q,\quad x_3=d_q a_r,\quad x_4=c_p b_q,$$
$$y_1=d_p b_r,\quad y_2=y_4=\omega^{1/2}\bar{y}_{pq},\quad y_3=c_q b_r,$$
$$z_1=b_p d_r,\quad z_2=\omega d_p a_q,\quad z_3=\omega a_q d_r,\quad z_4=\omega b_p c_q. \tag{3.14}$$

则由式(3.12)及(3.13)就可以得出 Baxter-Bazhanov 模型的“Star-Square”关系式(3.1).

从而,我们就将一个三维模型的“Star-Square”与一个二维模型的星-三角关系联系起来. 由于在三维精确可解立方格点模型中,四面体方程已取代 Yang-Baxter 关系而起重要作用,它保证了三维模型的 transfer 矩阵的对易性. 由于 Kashaev 等人的工作,我们得知,Baxter-Bazhanov 模型的四面体方程为上述“可逆性”及“Star-Square”关系式的一个结论. 这样,我们的结果就意味着由二维手征 Potts 模型的星-三角关系可以导出三维的 Baxter-Bazhanov 模型的四面体方程. 值得注意的是,附加条件: $y_1y_2z_3z_4/y_3y_4z_1z_2=\omega$ 必须“附加”到“Star-Square”上,这是由于该式左边项的求和指标 $\sigma\in Z_N$ 而右边项是与之无关的.

4　四面体方程的附加条件

Kashaev 等人得出,Baxter-Bazhanov 模型的四面体方程各谱参数满足附加条件[4]:

$$\omega\frac{x_{23}}{x_3}\frac{x'_4}{x'_{24}}\frac{x''_{24}}{x''_2}\frac{x'''_2}{x'''_{24}}=1,\quad \frac{x_{13}}{x_1}\frac{x'_1}{x'_{14}}\frac{x''_{14}}{x''_1}\frac{x'''_1}{x'''_{14}}=1,$$

$$\frac{x_{14}}{x_4}\frac{x_4'}{x_{14}'}\frac{x_{14}''}{x_4''}\frac{x_4'''}{x_{24}'''}=1,\quad \frac{x_{13}}{x_3}\frac{x_3'}{x_{13}'}\frac{x_{13}''}{x_1''}\frac{x_2'''}{x_{23}'''}=1. \tag{4.1}$$

从球面三角学角度看,若把这些参变量用 Zamolodchikov 的角变量表示出来. 它们的成立将是极其自然的. 具体讨论如下. 引入一大球面,使其半径远大于四面体线度,置四面体于球心附近, 通过平行移动四面体的四个平面,可在球面上截出四个大圆,图 1 仅画出其投影的一部分.

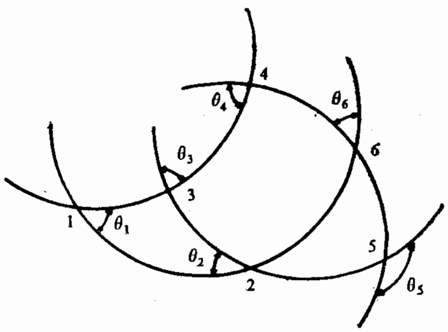

图 1

可以看出,该图中含有四个球面三角形: (123)、(146)、(345)、(256),用 l, l', l'', l''' 分别表示它们三边之和的 $2N$ 分之一, 而用 $l_{ij}(1\leqslant i\neq j\leqslant 6)$ 表示各对应段的弧长. 于是,式(4.1)中各参变量可表示为:

$$\begin{gathered}
x_1=c_1/s_1,\quad x_2=\omega^{-1/2}s_1/c_1,\quad x_3=\exp(-il_3)s_2/c_2,\\
x_4=\omega^{-1/2}\exp(-il_3)c_2/s_2,\quad x_{12}=1/c_1s_1,\\
x_{13}=\exp[i(l-l_3)]s_3/c_2s_1,\quad x_{14}=\exp[i(l_2-l)]c_3/s_1s_2,\\
x_{23}=\omega^{-1/2}\exp[i(l_1-l)]c_3/c_1c_2,\quad x_{24}=\exp(-il)s_3/s_2c_1,\\
x_{34}=\exp(-il_3)/c_2s_2.
\end{gathered}\tag{4.2}$$

而 $x_1', x_2', \cdots x_{34}'$; $x_1'', x_2'', \cdots, x_{34}''$; $x_1''', x_2''', \cdots, x_{34}'''$ 各表达式分别为将对应的: s_i, c_i, l_i, l 换为 $(i=1,2,3)$: s_i', c_i', l_i', l'; s_i'', c_i'', l_i'', l''; $s_i''', c_i''', l_i''', l'''$ 并且:

$$\begin{gathered}
c_1'=c_1=\cos^{1/N}\frac{\theta_1}{2},\quad s_1'=s_1=\sin^{1/N}\frac{\theta_1}{2},\\
c_1'''=c_2=\cos^{1/N}\frac{\theta_2}{2},\quad s_1'''=s_2=\sin^{1/N}\frac{\theta_2}{2},\\
s_1''=c_3=\cos^{1/N}\frac{\theta_3}{2},\quad c_1''=s_3=\sin^{1/N}\frac{\theta_3}{2},\\
s_3'=s_3''=\cos^{1/N}\frac{\theta_4}{2},\quad c_3'=c_3''=\sin^{1/N}\frac{\theta_4}{2},\\
c_2''=c_2'''=\cos^{1/N}\frac{\theta_5}{2},\quad s_2''=s_2'''=\sin^{1/N}\frac{\theta_5}{2},\\
s_2'=c_3'''=\cos^{1/N}\frac{\theta_6}{2},\quad c_2'=s_3'''=\sin^{1/N}\frac{\theta_6}{2};
\end{gathered}\tag{4.3}$$

以及:

$$\begin{gathered}
l_1=l_{23}/N,\quad l_1'=l_{46}/N,\quad l_1''=l_{45}/N,\quad l_1'''=l_{56}/N,\\
l_2=l_{13}/N,\quad l_2'=l_{14}/N,\quad l_2''=l_{34}/N,\quad l_2'''=l_{26}/N,\\
l_3=l_{12}/N,\quad l_3'=l_{16}/N,\quad l_3''=l_{35}/N,\quad l_3'''=l_{25}/N.
\end{gathered}\tag{4.4}$$

由上述关系式容易得出附加条件(4.1)式等价于:

$$l_{12}+l_{26}=l_{16},\quad l_{32}+l_{25}=l_{35},$$

$$l_{45}+l_{65}=l_{45},\quad l_{13}+l_{34}=l_{14}. \tag{4.5}$$

由图 1 知，它们自然成立．进一步，利用球面三角学基本关系式由 $l_{35}=l_{32}+l_{25}$ 可以得出，Kashaev 等人提出的“对称点”[7]：

$$\theta_1=\theta_5,\quad \theta_2=\theta_3=\theta_4=\theta_6$$

意味着

$$\cos\theta_2=\sin\frac{\theta_1}{2}=0. \tag{4.6}$$

可见，这种情况下各角度已有确定值．

5 总结与展望

上述讨论首先得出三维可解 Baxter-Bazhanov 统计模型的“可逆性”及“Star-Square”关系可由二维的手征 Potts 模型得出，因而这三维统计模型的四面体方程是手征 Potts 模型的星-三角关系的一个结论．另外，采用本文处理方法还可以得出这一三维模型的星-三角关系：

$$\sum_{l=1}^{N}\frac{W_{pR(r)}(n-l)}{W_{qr}(l-m)W_{pq}(k-l)}=R'_{pqr}\frac{W_{pR(q)}(n-m)W_{R^{-1}(q)r}(k-n)}{W_{pr}(k-m)} \tag{5.1}$$

其中 $a_p=d_r=0$；或者：

$$\sum_{l=1}^{N}\frac{W_{pR(r)}(n+l)}{W_{R(q)R(r)}(m+l)W_{pq}(k+l)}=\bar{R}'_{pqr}\frac{W_{pR(q)}(n-m)W_{qR(r)}(n-k)}{W_{R(p)R(r)}(m-k)} \tag{5.2}$$

其中 $a_p=c_r=0$，它们包含了 Baxter 及 Bazhanov 所得出的三维模型的星-三角关系式即文献[6]中的式(1.19)及(1.20)．详细讨论将以后给出．

希望本文处理方法将有助于由二维模型的星-三角关系寻求四面体方程的解并构造新的三维模型．尤其是寻求四面体方程的椭圆解等都是进一步研究的课题．

作者之一胡占宁感谢王佩教授的大力支持与热心讨论．

参 考 文 献

[1] R. J. Baxter, Exactly solved models in statistical mechanics (Academic Press, London, 1982).
[2] V. V. Bazhanov, R. J. Baxter, *J. Stat. Phys.*, **69**(1992) 453.
[3] A. B. Zamolodchikov, *Commun. Math. Phys.*, **79**(1981) 489.
[4] R. M. Kashaev, V. V. Mangazeev, Yu. G. Stroganov, *Int. J. Mod. Phys.*, **A8**(1993) 1399.
[5] R. J. Baxter, J. H. H. Perk, *Phys. Lett.*, **A128**(1988) 138. V. B. Matveev, A. O. Smirnov, Some Comments on the Solvable Chiral Potts Model, pre-print.
[6] V. V. Bazhanov, R. J. Baxter, *J. Stat. Phys.*, **71**(1993) 839.
[7] R. M. Kashaev, V. V. Mangazeev, Yu. G. Stroganov, *Int. J. Mod. Phys.*, **A8**(1993) 587.

The Integrability Condition of Three-Dimensional Exactly Solvable Model-Baxter-Bazhanov Model in Statistical Mechanics

Hu Zhanning Hou Boyu

(*Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an* 710069)

Received 21 December 1993

Abstract

From the chiral Potts model the "inversion" and "star-square" relations of the Baxter-Bazhanov model are obtained. This means that the tetrahedron equation which is a commutativity condition for the three-dimensional cubic lattice is a consequence of the star-triangle relation of the chiral Potts model. The additional constraints in tetrahedron equation hold naturally when the Boltzmann weights are parametrized in terms of the Zamolodchikov angle variables. It is point out that the star-triangle relation of the three-dimensional model can be gotten by using the method given in this paper, which includes the result of Baxter and Bazhanov's

Key words chiral Potts model, Baxter-Bazhanov model, "star-square" relation, tetrahedron equation, star-triangle relation.