完全可积 $O(3)$-σ 模型与 r,s 矩阵*

李银万[1)]　曾　祺　侯伯元
(中国科学院研究生院　北京　100039)

1993 年 2 月 20 日收到

摘　　要

从约束体系的形式出发，讨论了 $O(3)$-σ 模型在任意局域坐标下的基本泊松结构，给出了相应的与场量有关的 r,s 矩阵，并且注意到，在一定的局域坐标下，r,s 矩阵与场量无关。

关键词　$O(3)$-σ 模型，可积性，约束，Lax 矩阵，泊松结构，r,s 矩阵.

1　引　　言

经典杨-Baxter 代数，作为保证经典非线性动力学体系可积的一种基本代数结构，在二维可积场论中具有非常重要的意义。作为结构常数的 r 矩阵[1]满足经典杨-Baxter 方程。然而这种结构只可能存在于所谓具有超局域性的可积体系中。对于非超局域的情况，J. M. Maillet 首先讨论了其基本泊松结构，用 r,s 矩阵的形式，推广得到了扩展的杨-Baxter 代数[2]。

可积非线性 σ 模型长期以来一直是人们讨论的对象。作为一个非超局域的模型，M. Forger 等具体讨论了黎曼对称空间上的 σ 模型的基本泊松结构，给出了与场量相关的 r，s 矩阵[3]。

由于 σ 模型在局域坐标变换下，有类似规范协变的形式[4]，采取不同的局域坐标，很可能会使得某些讨论简化。为此，讨论 σ 模型在任意局域坐标下的代数结构是必要的。本文试图用规范变换的方法，把 $O(3)$-σ 模型的基本泊松结构，推广到任意局域坐标的形式。并指出，在一定的局域坐标下，所得 r,s 矩阵将是与场量无关的。

2　$O(3)$-σ 模型的规范形式

在讨论基本泊松结构之前，先简述一下 $O(3)$-σ 模型的规范形式[4]。$O(3)$-σ 模型的场量 $N(x)$ 是 1+1 维闵空间到二维球面 $S^2 \sim SO(3)/SO(2)$ 的映射，可表示为带约束的动力学体系。其拉氏密度为(以下重复指标均代表求和)

* 国家自然科学基金资助.
1) 现工作单位：北京理工大学应用物理系，邮编 100081.

$$\mathscr{L} = \frac{1}{8}\,\mathrm{tr}(\partial_\mu N(x)\partial^\mu N(x)), \tag{1}$$

约束

$$N^2(x) = I. \tag{2}$$

这里

$$N(x) = N_i(x)\sigma_i, \tag{3}$$

σ_i 是泡利矩阵。运动方程:

$$[\partial_\mu\partial^\mu N(x), N(x)] = 0 \tag{4a}$$

也可表示为

$$\partial_\mu K^\mu(x) = 0. \tag{4}$$

其中,守恒流 $K_\mu(x)$ 为

$$K_\mu(x) = -\frac{1}{2}N(x)\partial_\mu N(x). \tag{5}$$

对于任意 $U(x)\in SU(2)$ 所代表的局域坐标变换, $O(3)$-σ 模型具有如下规范协变形式:

$$N(x)\to N^{(u)}(x) = U^{-1}(x)N(x)U(x), \tag{6}$$

$$K_\mu(x)\to K_\mu^{(u)}(x) = U^{-1}(x)K_\mu(x)U(x). \tag{7}$$

运动方程(4)变为

$$D_\mu K^{(u)\mu}(x) = \partial_\mu K^{(u)\mu}(x) + [A_\mu(x), K^{(u)\mu}(x)] = 0. \tag{8}$$

其中 $A_\mu(x) = U^{-1}(x)\partial_\mu U(x)$ 满足纯规范条件:

$$\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)] = 0. \tag{9}$$

此时,体系具有如下线性散射方程,即 Lax 方程[4]

$$\partial_\mu T(\lambda) = -(H_\mu^{(u)}(x) + \widetilde{K}_\mu^{(u)}(x,\lambda))T(\lambda). \tag{10}$$

这里

$$H_\mu^{(u)}(x) = A_\mu(x) - K_\mu^{(u)}(x),$$

$$\widetilde{K}_\mu^{(u)}(x,\lambda) = a(\lambda)K_\mu^{(u)}(x) + b(\lambda)\varepsilon_{\mu\nu}K^{(u)\nu}(x). \tag{11}$$

$$(\varepsilon_{01} = -\varepsilon_{10} = 1)$$

其中系数 $a(\lambda)$、$b(\lambda)$ 要满足

$$a(\lambda)^2 - b(\lambda)^2 = 1. \tag{12}$$

下面, $a(\lambda)$、$b(\lambda)$ 取为[3]

$$a(\lambda) = -\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2},\quad b(\lambda) = -\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}. \tag{13}$$

于是 Lax 矩阵

$$\begin{aligned} L_\mu^{(u)}(x,\lambda) &= H_\mu^{(u)}(x) + \widetilde{K}_\mu^{(u)}(x,\lambda) \\ &= A_\mu(x) - \frac{2}{1-\lambda^2}K_\mu^{(u)}(x) - \frac{2\lambda}{1-\lambda^2}\varepsilon_{\mu\nu}K^{(u)\nu}(x), \end{aligned} \tag{14}$$

空间分量

$$L_1^{(u)}(x,\lambda) = A_1(x) - \frac{2}{1-\lambda^2}K_1^{(u)}(x) + \frac{2\lambda}{1-\lambda^2}K_0^{(u)}(x). \tag{15}$$

由 Lax 矩阵的零曲率条件

$$\partial_\mu L_\nu^{(u)}(x,\lambda) - \partial_\nu L_\mu^{(u)}(x,\lambda) + [L_\mu^{(u)}(x,\lambda), L_\nu^{(u)}(x,\lambda)] = 0 \tag{16}$$

以及 $A_\mu(x)$ 满足的纯规范条件(9),可导出运动方程(8).

3　$O(3)$-σ 模型的基本泊松结构

当 $U(x)=1$ 时, $A_\mu(x)=0$, 体系回到第二节一开始整体固定坐标下的形式,在这种形式下,用狄拉克的方法[5]讨论其哈密顿形式,可得到如下基本泊松括号[6]:

$$\{N_i(x), N_j(y)\} = 0, \tag{17}$$

$$\{\Pi_i(x), \Pi_j(y)\} = (\Pi_i(x)N_j(x) - N_i(x)\Pi_j(x))\delta(x-y), \tag{18}$$

$$\{N_i(x), \Pi_j(y)\} = (\delta_{ij} - N_i(x)N_j(x))\delta(x-y). \tag{19}$$

其中 $\Pi_i(x) = \frac{1}{2}\partial^0 N_i(x)$ 为正则动量. 应用以上三式, 可以得出关于流 $K_\mu(x)$ 的基本泊松括号,即流代数

$$\{K_0(x) \underset{,}{\otimes} K_0(y)\} = -\frac{1}{2}[C, K_0(x)\otimes I]\delta(x-y), \tag{20}$$

$$\{K_0(x) \underset{,}{\otimes} K_1(y)\} = -\frac{1}{2}[C, K_1(x)\otimes I]\delta(x-y) + \frac{1}{2}j(y)\delta'(x-y), \tag{21}$$

$$\{K_1(x) \underset{,}{\otimes} K_1(y)\} = 0, \tag{22}$$

$$\left\{K_0(x) \underset{,}{\otimes} j(y)\right\} = -\frac{1}{2}[j^{23}(x), C^{12} + C^{13}]\delta(x-y), \tag{23}$$

$$\left\{K_1(x) \underset{,}{\otimes} j(y)\right\} = 0, \tag{24}$$

$$\left\{j(x) \underset{,}{\otimes} j(y)\right\} = 0. \tag{25}$$

这里

$$C = \sigma_i \otimes \sigma_i, \tag{26}$$

$$j(x) = -(C - N(x)\otimes N(x)), \tag{27}$$

$$C^{12} = \sigma_i\otimes\sigma_i\otimes I,\quad C^{13} = \sigma_i\otimes I\otimes\sigma_i,$$

$$j^{23}(x) = -(C^{23} - I\otimes N(x)\otimes N(x)).$$

$\delta'(x-y)$ 为 $\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-y)$ 的简写.

此外,流代数还具有如下性质

$$[2j(x) + C, K_\mu(x)\otimes I + I\otimes K_\mu(x)] = -2\partial_\mu j(x), \tag{28}$$

$$[2j(x) + C, K_\mu(x)\otimes I - I\otimes K_\mu(x)] = 0. \tag{29}$$

由(15)知,在整体坐标下, Lax 矩阵为:

$$L_1(x,\lambda) = -\frac{2}{1-\lambda^2}K_1(x) + \frac{2\lambda}{1-\lambda^2}K_0(x). \tag{30}$$

流代数(20)—(25)式中含有 δ 函数的一次导数,说明体系是非超局域的. 由流代数,并利用(28)、(29)式可知,代替通常的 Lie-Poisson 代数, Lax 矩阵(30)具有如下的基本 Poisson 括号[2,3]

$$\begin{aligned}&\left\{L_1(x,\lambda)\underset{,}{\otimes} L_1(y,\mu)\right\}\\&= -[r(x,\lambda,\mu), L_1(x,\lambda)\otimes I + I\otimes L_1(x,\mu)]\delta(x-y)\\&\quad + [s(x,\lambda,\mu), L_1(x,\lambda)\otimes I - I\otimes L_1(x,\mu)]\delta(x-y)\\&\quad - (r(x,\lambda,\mu)+s(x,\lambda,\mu)-r(y,\lambda,\mu)+s(y,\lambda,\mu))\delta'(x-y),\end{aligned}\tag{31}$$

其中

$$r(x,\lambda,\mu) = -\frac{\lambda\mu}{(\lambda-\mu)(1-\lambda\mu)}C - \frac{(\mu-\lambda)(1+\lambda\mu)}{(1-\lambda\mu)(1-\mu^2)(1-\lambda^2)}j(x),\tag{32}$$

$$s(x,\lambda,\mu) = \frac{\mu+\lambda}{(1-\mu^2)(1-\lambda^2)}j(x).\tag{33}$$

$r(x,\lambda,\mu)$ 对参数 λ、μ 具有反对称性,而 $s(x,\lambda,\mu)$ 具有对称性,它们都通过 $j(x)$ 依赖于场量.

4 任意局域坐标下的基本泊松结构

上面给出的是体系在整体固定坐标下的基本泊松结构,我们将从这一结果出发,推广讨论任意保持辛结构的局域坐标下的基本泊松结构. 可以证明:

定理: 在任意局域坐标下, Lax 算子 $L_1^{(u)}(x,\lambda)$ 的基本泊松括号具有与(31)式完全相同的形式,而且 r,s 矩阵也具有相同的形式,它们是:

$$r^{(u)}(x,\lambda,\mu) = -\frac{\lambda\mu}{(\lambda-\mu)(1-\lambda\mu)}C - \frac{(\mu-\lambda)(1+\lambda\mu)}{(1-\lambda\mu)(1-\mu^2)(1-\lambda^2)}j^{(u)}(x),\tag{34}$$

$$s^{(u)}(x,\lambda,\mu) = \frac{\mu+\lambda}{(1-\mu^2)(1-\lambda^2)}j^{(u)}(x),\tag{35}$$

其中

$$j^{(u)}(x) = -(C - N^{(u)}(x)\otimes N^{(u)}(x)).\tag{36}$$

证明: 首先由(7)及(15)式知

$$\begin{aligned}L_1^{(u)}(x,\lambda) &= A_1(x) + U^{-1}(x)L_1(x,\lambda)U(x)\\&= A_1(x) + L_1'(x,\lambda).\end{aligned}\tag{37}$$

另外,由于 $U(x)$ 为满足(9)式的纯规范式,它们只代表局域坐标变换,不依赖于场量,因而可以提到泊松括号外面,并且 $A_\mu(x)$ 与动力学变量的泊松括号为零. 注意到以上两点,由(37)式, $L_1^{(u)}(x,\lambda)$ 的基本泊松括号为:

$$\begin{aligned}&\left\{L_1^{(u)}(x,\lambda)\underset{,}{\otimes} L_1^{(u)}(y,\mu)\right\}\\&= \left\{U^{-1}(x)L_1(x,\lambda)U(x)\underset{,}{\otimes} U^{-1}(y)L_1(y,\mu)U(y)\right\}\end{aligned}$$

$$=(U^{-1}(x)\otimes U^{-1}(y))\left\{L_1(x,\lambda)\underset{,}{\otimes} L_1(y,\mu)\right\}(U(x)\otimes U(y)), \tag{38}$$

将(31)式代入上式得

$$\begin{aligned}
&\left\{L_1^{(u)}(x,\lambda)\underset{,}{\otimes} L_1^{(u)}(y,\mu)\right\}\\
&= -(U^{-1}(x)\otimes U^{-1}(y))[r(x,\lambda,\mu),L_1(x,\lambda)\otimes I+I\otimes L_1(x,\mu)]\\
&\quad\cdot(U(x)\otimes U(y))\delta(x-y)\\
&\quad+(U^{-1}(x)\otimes U^{-1}(y))[s(x,\lambda,\mu),L_1(x,\lambda)\otimes I-I\otimes L_1(x,\mu)]\\
&\quad\cdot(U(x)\otimes U(y))\delta(x-y)\\
&\quad-(U^{-1}(x)\otimes U^{-1}(y))(r(x,\lambda,\mu)+s(x,\lambda,\mu))\\
&\quad\cdot(U(x)\otimes U(y))\delta'(x-y)\\
&\quad+(U^{-1}(x)\otimes U^{-1}(y))(r(y,\lambda,\mu)-s(y,\lambda,\mu))\\
&\quad\cdot(U(x)\otimes U(y))\delta'(x-y)\\
&= -[r^{(u)}(x,\lambda,\mu),L_1'(x,\lambda)\otimes I+I\otimes L_1'(x,\mu)]\delta(x-y)\\
&\quad+[s^{(u)}(x,\lambda,\mu),L_1'(x,\lambda)\otimes I-I\otimes L_1'(x,\mu)]\delta(x-y)\\
&\quad-(U^{-1}(x)\otimes U^{-1}(y))(r(x,\lambda,\mu)+s(x,\lambda,\mu))\\
&\quad\cdot(U(x)\otimes U(y))\delta'(x-y)\\
&\quad+(U^{-1}(x)\otimes U^{-1}(y))(r(y,\lambda,\mu)-s(y,\lambda,\mu))\\
&\quad\cdot(U(x)\otimes U(y))\delta'(x-y),
\end{aligned}\tag{39}$$

其中

$$r^{(u)}(x,\lambda,\mu)=(U^{-1}(x)\otimes U^{-1}(x))r(x,\lambda,\mu)(U(x)\otimes U(x)), \tag{40}$$

$$s^{(u)}(x,\lambda,\mu)=(U^{-1}(x)\otimes U^{-1}(x))s(x,\lambda,\mu)(U(x)\otimes U(x)). \tag{41}$$

现在考查(39)式后两项。应用公式

$$f(x)\delta'(x-y)=f(y)\delta'(x-y)-f'(x)\delta(x-y), \tag{42}$$

第四项:

$$\begin{aligned}
&(U^{-1}(x)\otimes U^{-1}(y))(r(y,\lambda,\mu)-s(y,\lambda,\mu))(U(x)\otimes U(y))\delta'(x-y)\\
&=(U^{-1}(y)\otimes U^{-1}(y))(r(y,\lambda,\mu)-s(y,\lambda,\mu))(U(y)\otimes U(y))\delta'(x-y)\\
&\quad-\left(\frac{\partial}{\partial x}U^{-1}(x)\otimes U^{-1}(y)\right)(r(y,\lambda,\mu)-s(y,\lambda,\mu))(U(x)\otimes U(y))\delta(x-y)\\
&\quad-(U^{-1}(x)\otimes U^{-1}(y))(r(y,\lambda,\mu)-s(y,\lambda,\mu))\left(\frac{\partial}{\partial x}U(x)\otimes U(y)\right)\delta(x-y)\\
&=(r^{(u)}(y,\lambda,\mu)-s^{(u)}(y,\lambda,\mu))\delta'(x-y)\\
&\quad+(A_1(x)\otimes I)(r^{(u)}(x,\lambda,\mu)-s^{(u)}(x,\lambda,\mu))\delta(x-y)\\
&\quad-(r^{(u)}(x,\lambda,\mu)-s^{(u)}(x,\lambda,\mu))(A_1(x)\otimes I)\delta(x-y)\\
&=(r^{(u)}(y,\lambda,\mu)-s^{(u)}(y,\lambda,\mu))\delta'(x-y)\\
&\quad-[(r^{(u)}(x,\lambda,\mu)-s^{(u)}(x,\lambda,\mu)),A_1(x)\otimes I]\delta(x-y).
\end{aligned}\tag{43}$$

类似地,第三项:

$$-(U^{-1}(x)\otimes U^{-1}(y))(r(x,\lambda,\mu)+s(x,\lambda,\mu))(U(x)\otimes U(y))\delta'(x-y)$$

$$
\begin{aligned}
&= -(r^{(u)}(x,\lambda,\mu) + s^{(u)}(x,\lambda,\mu))\delta'(x-y) \\
&\quad - [r^{(u)}(x,\lambda,\mu) + s^{(u)}(x,\lambda,\mu), I\otimes A_1(x)]\delta(x-y).
\end{aligned} \tag{44}
$$

将(43)、(44)式代回(39)式，并注意到(37)式的关系，即得一般局域坐标下，Lax 矩阵的基本泊松括号：

$$
\begin{aligned}
&\left\{L_1^{(u)}(x,\ \lambda)\otimes L_1^{(u)}(y,\ \mu)\right\} \\
&= -[r^{(u)}(x,\lambda,\mu), L_1^{(u)}(x,\lambda)\otimes I + I\otimes L_1^{(u)}(x,\mu)]\delta(x-y) \\
&\quad + [s^{(u)}(x,\lambda,\mu), L_1^{(u)}(x,\lambda)\otimes I - I\otimes L_1^{(u)}(x,\mu)]\delta(x-y) \\
&\quad - (r^{(u)}(x,\lambda,\mu) + s^{(u)}(x,\lambda,\mu) - r^{(u)}(y,\lambda,\mu) + s^{(u)}(y,\lambda,\mu))\delta'(x-y).
\end{aligned} \tag{45}
$$

此式与(31)式形式完全相同．由(40)、(41)知，r,s 矩阵具有协变的形式．将(32)、(33)式分别代入(40)、(41)式中，得

$$
r^{(u)}(x,\lambda,\mu) = -\frac{\lambda\mu}{(\lambda-\mu)(1-\lambda\mu)}C - \frac{(\mu-\lambda)(1+\lambda\mu)}{(1-\lambda\mu)(1-\mu^2)(1-\lambda^2)}j^{(u)}(x),
$$

$$
s^{(u)}(x,\lambda,\mu) = \frac{\mu+\lambda}{(1-\mu^2)(1-\lambda^2)}j^{(u)}(x),
$$

其中

$$
\begin{aligned}
j^{(u)}(x) &= (U^{-1}(x)\otimes U^{-1}(x))(-C + N(x)\otimes N(x))(U(x)\otimes U(x)) \\
&= -(C - N^{(u)}(x)\otimes N^{(u)}(x)).
\end{aligned}
$$

这正是(34)、(35)和(36)三式，证毕．

可见，在保持辛结构的局域坐标变换下，Lax 矩阵所满足的基本泊松括号以及相应的 r,s 矩阵，在形式上都是相同的，即具有协变性．同样地，r,s 矩阵通过 $j^{(u)}(x)$ 依赖于场量 $N^{(u)}(x)$．对于完全可积的 $O(3)$-σ 模型，存在保持辛结构的局域坐标变换 $U(x)$[4]，使得

$$
N(x) \to N^{(u)}(x) = U^{-1}(x)N(x)U(x) = n = \sigma_3, \tag{46}
$$

此时

$$
j^{(u)}(x) = -C + \sigma_3\otimes\sigma_3 = -\sigma_1\otimes\sigma_1 - \sigma_2\otimes\sigma_2 \tag{47}
$$

变成与场量无关的常量．从而 r,s 矩阵

$$
\begin{aligned}
r^{(u)}(x,\lambda,\mu) &= -\frac{\lambda\mu}{(\lambda-\mu)(1-\lambda\mu)}C \\
&\quad + \frac{(\mu-\lambda)(1+\lambda\mu)}{(1-\lambda\mu)(1-\mu^2)(1-\lambda^2)}(\sigma_1\otimes\sigma_1 + \sigma_2\otimes\sigma_2),
\end{aligned} \tag{48}
$$

$$
s^{(u)}(x,\lambda,\mu) = -\frac{\mu+\lambda}{(1-\mu^2)(1-\lambda^2)}(\sigma_1\otimes\sigma_1+\sigma_2\otimes\sigma_2) \tag{49}
$$

也都是与场量无关的常数矩阵．

5 小　　结

本文用规范变换的方法，将 $O(3)$-σ 模型 Lax 矩阵所满足的基本泊松括号推广到了

任意局域坐标．结果发现，虽然 Lax 矩阵在局域坐标变换下按联络的形式变换，它的基本泊松括号形式却是协变的．相应的 r, s 矩阵也遵循简单的协变关系．

此外，在一般局域坐标下，r, s 矩阵通过 $j^{(\alpha)}(x)$ 依赖于场量．但在一定局域坐标下，r, s 矩阵成为与场量无关的常量．

作者诚挚感谢郑庆荣非常有益的启发与讨论．

参考文献

[1] E.K. Skylanin, On Complete Integrability of the Landau-Lifshitz Equation, Preprint LOMI (1980); E.K. Skylanin, The Quantum Inverse Scattering Method, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, **95** (1980)55.
[2] J.M. Maillet, *Nucl. Phys.*,**B269** (1986) 54.
[3] M. Forger et al., The Lie-Poisson Structure of Integrable Classical Non-Linear Sigma Model, Freiburg University preprint THEP91/11.
[4] Bo-Yu Hou, Bo-Yuan Hou and Pei Wang, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **18**(1985) 165.
[5] P.A.M.狄拉克著，袁卡佳等译《狄拉克量子力学演讲集》，科学出版社，1986.
[6] J. Maharana, *Phys. Letts.*, **128B** (1983) 411.

Complete Integrable $O(3)$-σ Model and r, s-Matrices

Li Yinwan Zeng Qi Hou Boyuan
(*Graduate school, Academia sinica Beijing* 100039)

Received on February 20, 1993

Abstract

The fundamental Poisson structure of nonlinear $O(3)$-σ model, treated as a constrained dynamical system, is discussed in arbitary local coordinate frame. The corresponding r, s-matrices, which are generally field dependent, are presented explicitly. It is noticed, however, that in a certain local coordinate frame, r, s-matrices will be field-independent.

Key words $O(3)$-σ model, integrability, constraint, Lax matrix, Poisson structure, r,s matrices.