第 17 卷 第 7 期
1993 年 7 月
高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS
Vol. 17, No. 7
July, 1993

线性自对偶约束理论的一种推广形式及其量子化

缪炎刚①
(兰州大学物理系, 730000)

摘 要

本文推广了线性自对偶约束理论,使其包含以拉氏乘子场为宗量的一个任意势函数.通过分析该系统的约束代数,证明了只有当势函数为二次形时,这个模型才给出自对偶场的 Floreanini-Jackiw 理论,并且当势函数为一种正幂次函数时,该模型可以给出一个自由标量场理论.

一、引 言

二维自对偶场的量子化已经引起广泛的关注.这个问题对于弦理论[1]和量子霍耳效应[2]都是非常重要的.最初,Siegel[3]通过引入一个拉氏乘子场 $\lambda(x)$,在自由标量场的拉氏量中加入自对偶约束的平方,构造了二次自对偶约束理论.后来,Floreanini 和 Jackiw[4]又提出了自对偶理论的一种零维场形式.它的量子理论具有么正性和 Poincaré 不变性.有趣的是,对这两种从完全不同的概念出发构造的理论,Bernstein 和 Sonnenschein[5]证明,自对偶场的 Siegel 形式与 Floreanin-Jackiw(FJ)形式是等价的.另一方面,Srivastava[6]建议在自由标量场的拉氏量中加入自对偶约束的一次形式,给出了一种线性自对偶约束理论.但是,正如 Harada[7]所指出的那样,这个理论是非么正的.最近,本文作者[8]通过在相空间中附加约束条件的办法,消除了线性自对偶约束理论的非么正性,同时把这个理论恰好转变成自对偶场的 FJ 形式.

作为克服线性自对偶约束理论非么正性的另一种方法,Link[9]和 Kim[10]等人提出了一种修改的理论.他们的作法是在原来拉氏量的基础上附加一项拉氏乘子场的二次形 $\frac{1}{2}\alpha\lambda^2$,其中 α 是引入的一个参数.在参考文献[9]和[10]中,他们证明:当 $\alpha=1$ 时,这个修改的理论给出么正的 FJ 形式;而 $\alpha\to\infty$ 时,它的哈密顿量子形式则是一个自由标量场理论.我们推广参考文献[9,10]的作法,在线性自对偶约束理论中加入一项拉氏乘子场的任意势函数 $V(\lambda)$.通过对该模型的约束代数的分析,得出两个结论:(i)二次形的势函数是唯一可取的形式,它使得推广的线性自对偶约束理论给出么正的 FJ 理论;(ii)势函数取一

① 中国高等科学技术中心(世界实验室)成员.

本文 1992 年 2 月 9 日收到。

种正幂次形式且相应的参数趋于无穷大时,也导致这个模型趋于一个自由标量场理论.

二、推广的线性自对偶约束理论的量子化

本文考察的模型由下面的拉氏量描述

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 - \varphi'^2) + \lambda(\dot{\varphi} - \varphi') - V(\lambda), \tag{1}$$

其中点与撇分别代表对时间和空间的微商,按照 Dirac 量子化方法[11],首先找出这个系统的初级约束和正则动量

$$\Omega_1 \equiv \pi_\lambda \equiv \partial\mathscr{L}/\partial\dot{\lambda} \approx 0, \tag{2}$$

$$\pi_\varphi \equiv \partial\mathscr{L}/\partial\dot{\varphi} = \dot{\varphi} + \lambda. \tag{3}$$

("≈"是 Dirac 引进的弱约束符号.)因此,正则哈密顿密度可表示成

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_c &= \pi_\varphi\dot{\varphi} - \mathscr{L}\\ &= \frac{1}{2}(\pi_\varphi - \lambda)^2 + \frac{1}{2}\varphi'^2 + \lambda\varphi' + V(\lambda).\end{aligned} \tag{4}$$

然后,由初级约束的时间自洽性条件

$$\dot{\pi}_\lambda(x) = \{\pi_\lambda(x), \int \mathrm{d}y(\mathscr{H}_c + u\pi_\lambda)\} \approx 0, \tag{5}$$

我们得到一个次级约束条件

$$\Omega_2 \equiv \pi_\varphi - \varphi' - \lambda - \mathrm{d}V(\lambda)/\mathrm{d}\lambda \approx 0. \tag{6}$$

由于次级约束的时间自洽性条件不再给出进一步的约束,而仅仅确定函数 u,因此,该约束系统只有两个约束条件.从它们的代数结构

$$\begin{aligned}&\{\Omega_1(x), \Omega_1(y)\} = 0, \{\Omega_2(x), \Omega_2(y)\} = -2\partial_x\delta(x-y),\\ &\{\Omega_1(x), \Omega_2(y)\} = [1 + \mathrm{d}^2V(\lambda)/\mathrm{d}\lambda^2]\delta(x-y),\end{aligned} \tag{7}$$

我们来对它们进行分类.整个系统不是纯第二类约束的条件是 $\det\{\Omega_i, \Omega_j\} = 0$,由此导出 $\{\Omega_1, \Omega_2\} = 0$,此时正好 Ω_1 和 Ω_2 完全分开,分别成为第一及第二类约束.不过在一般情况下,有可能是 Ω_1 和 Ω_2 的组合形成第一类约束.此外,$\{\Omega_1, \Omega_2\}$是否为零还影响到该系统在相空间中独立的场变量个数.所以,我们分以下两种情况讨论.

(1) $\{\Omega_1, \Omega_2\} = 0$ 的情形

Ω_1 为第一类约束.这时需要引入一个规范固定条件

$$\Omega_3 \equiv \lambda(x) - f(x) \approx 0, \tag{8}$$

其中 $f(x)$为任意函数.在这种情况下,系统的独立变量数为 1,并且可解出势函数为

$$V(\lambda) = -\frac{1}{2}\lambda^2 + c\lambda, \tag{9}$$

其中 c 是一个任意常数.(我们已略去 $V(\lambda)$中的常数项,因为该项不影响系统的动力学性质.)因此,Ω_2 具体化为

$$\Omega_2 \equiv \pi_\varphi - \varphi' - c \approx 0. \tag{6$'$}$$

容易算出,由三个约束条件(2)、(6)′和(8)式构成的约束代数的逆为

$$C_{ij}(x,y)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -\frac{1}{2\partial_x} & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\delta(x-y). \tag{10}$$

从 Dirac 括号的定义

$$\{A(x),B(y)\}^*=\{A(x),B(y)\}-\int dzdw\{A(x),\Omega_i(z)\}C_{ij}(z,w)\{\Omega_j(w),B(y)\}, \tag{11}$$

我们得到基本场满足的 Dirac 括号

$$\begin{aligned}\{\varphi(x),\varphi(y)\}^* &= -\frac{1}{2\partial_x}\delta(x-y),\\ \{\varphi(x),\pi_\varphi(y)\}^* &= \frac{1}{2}\delta(x-y),\\ \{\pi_\varphi(x),\pi_\varphi(y)\}^* &= \frac{1}{2\partial_x}\delta(x-y).\end{aligned} \tag{12}$$

在 Dirac 括号的意义下，所有的弱约束条件都可作为强方程．因此，用独立场变量 φ 表示的约化哈密顿量为

$$\begin{aligned}H_r &= \int dx\mathscr{H}_r,\\ \mathscr{H}_r &= \frac{1}{2}(\varphi'+c)^2+\frac{1}{2}\varphi'^2.\end{aligned} \tag{13}$$

相应地，空间平移变换的生成元和 Lorentz 变换的生成元分别是

$$\begin{aligned}P_r &= \int dx(-\varphi'^2-c\varphi'),\\ M_r &= P_r t-\int dx x\mathscr{H}_r.\end{aligned} \tag{14}$$

容易验证，Poincaré 不变性的要求导致 $c=0$. 故(13)式变成

$$\mathscr{H}_r=\varphi'^2. \tag{13$'$}$$

这个哈密顿量子理论正是自对偶场的 FJ 形式[4]. 由于 $V(\lambda)=-\frac{1}{2}\lambda^2$ 是 $\{\Omega_1,\Omega_2\}=0$ 并且使理论具有 Lorentz 不变性的唯一解，因此，我们证明了势函数的这种二次形是使得推广的线性自对偶约束理论给出么正的 FJ 理论的唯一可取形式．

(2) $\{\Omega_1,\Omega_2\}\neq 0$ 的情形

Ω_1、Ω_2 均为第二类约束．这种情况下系统在相空间中有两个独立的场变量 φ 和 π_φ. 令

$$1+d^2V(\lambda)/d\lambda^2=g(\lambda), \tag{15}$$

其中 $g(\lambda)$ 是一个任意函数．现在只要求它不为零．若给定 $g(\lambda)$ 的具体形式，则可解出方程

$$\lambda+dV(\lambda)/d\lambda=\int g(\lambda)d\lambda. \tag{16}$$

从系统的约束代数(7)式，可导出它的逆矩阵

$$C_{ij}(x,y)=\begin{pmatrix}-2g^{-2}(\lambda)\partial_x & -g^{-1}(\lambda)\\ g^{-1}(\lambda) & 0\end{pmatrix}\delta(x-y). \tag{17}$$

把它代入 Dirac 括号(11)式,我们得到独立的正则变量 φ,π_φ 间的对易关系

$$\{\varphi(x),\pi_\varphi(y)\}^*=\delta(x-y),$$
$$\{\varphi(x),\varphi(y)\}^*=\{\pi_\varphi(x),\pi_\varphi(y)\}^*=0. \tag{18}$$

它们与 $g(\lambda)$的具体形式无关.然而,对任意的 $g(\lambda)$,从约束条件的强方程很难解出 λ 用独立变量 φ,π_φ 表示的函数形式. 因此,也无法把约化的哈密顿表示成这两个变量的明显函数形式. 而且,对任意的 $g(\lambda)$系统可能不具有 Lorentz 不变性. 因此,本文把 Link 和 Kim 等人的工作发展一步,令 $g(\lambda)$是一个正幂次的单项式,即

$$g(\lambda)=\beta\lambda^n,(n\geqslant 0), \tag{19}$$

β 是一个非零参数. 把(19)式代入(16)式,解出势函数

$$V(\lambda)=\frac{\beta}{(n+1)(n+2)}\lambda^{n+2}-\frac{1}{2}\lambda^2. \tag{20}$$

当 $n=0$ 时,它正好是 Link 和 Kim 等人提出的二次形[9,10]. 把弱约束(6)式变成强条件,并且利用(16)和(19)式,得到约化的哈密顿量

$$H_r=\int dx\mathscr{H}_r$$
$$\mathscr{H}_r=\frac{1}{2}\pi_\varphi^2+\frac{1}{2}\varphi'^2+a(\pi\varphi-\varphi')^b,$$
$$a=-\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{n+1}{\beta}\right)^{1/(n+1)},b=\frac{n+2}{n+1}. \tag{21}$$

相应的动量算子和 Lorentz 算子为

$$P_r=-\int_{\pi\varphi}\varphi' dx,$$
$$M_r=P_r t-\int dx x\mathscr{H}_r. \tag{22}$$

利用对易关系(18)式,我们得到这三个算子满足的代数关系

$$\{P_r,H_r\}^*=0,\{P_r,M_r\}^*=H_r.$$
$$\{H_r,M_r\}^*=P_r+ab\int dx(\pi_\varphi-\varphi')^b[1+ab(\pi_\varphi-\varphi')^{b-2}]. \tag{23}$$

我们看到,当 n 有限而 $\beta\to\infty$时,$a\to 0$. 此时,(23)式才同 Poincaré 代数一致,即理论才具有 Lorentz 不变性,并且(21)式中的哈密顿密度变成

$$\mathscr{H}_r=\frac{1}{2}\pi_\varphi^2+\frac{1}{2}\varphi'^2. \tag{21$'$}$$

所以,在线性自对偶约束理论中加入如(20)式的有限次正幂函数,当参数 β 趋于无穷大时,它的哈密顿量子形式是一个自由标量场理论.

三、总结与讨论

归纳起来,本文回答了这样两个问题. 首先,如果我们采用加入抵消项的方法来克服

线性自对偶约束理论的非么正性，那么拉氏乘子场的二次形则是抵消项唯一可取的形式．其次，当抵消项不仅仅是二次形而取如(20)式中的有限次正幂函数并且参数趋于无穷大时，这个推广的线性自对偶约束理论仍然趋于一个自由标量场理论．这说明原来附加的线性自对偶约束的作用被这个抵消项消除了．可以证明，类似的结果也存在于二次自对偶约束理论，即 Siegel 理论中，只是抵消项的形式不同而已．

参 考 文 献

[1] D. J. Gross et al. *Phys. Rev. Lett.*, **54**(1985), 502.

[2] X. G. Wen, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 2206; *Phys. Rev.* **B41**(1990), 1238.

[3] W. Siegel, *Nucl. Phys.*, **B238**(1984), 307.

[4] R. Floreanini and R. Jackiw, *Phys. Rev. Lett.*, **59**(1987), 1873; M. E. V. Costa and H. O. Girotti, *Phys. Rev. Lett.*, **60**(1988), 1771.

[5] M. Bernstein and J. Sonnenschein, *Phys. Rev. Lett.*, **60**(1988), 1772.

[6] P. P. Srivastava, *Phys. Rev. Lett.*, **63**(1989), 2791.

[7] K. Harada, *Phys. Rev. Lett.*, **65**(1990), 267.

[8] Y.-G. Miao, *Commun. Theor. Phys.*, **19**(1993), 125.

[9] R. Link, *Fortschr. Phys.*, **39**(1991), 393.

[10] W. T. Kim, J. K. Kim and Y. J. Park, *Phys. Rev.*, **D44**(1991), 563.

[11] P. A. M. Dirac, Lectures on Quantum Mechanics, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva Univ. Press, 1964.

Extension of the Linear Self-Dual Constraint Theory and Its Quantization

MIAO YANGANG

(*Department of Physics, Lanzhou University, Lanzhou* 730000)

ABSTRACT

We extend the self-dual field theory with a linear self-dual constraint to include an arbitrary potential of the Lagrange multiplier field. We show that this theory coincides with the Floreanini-Jackiw's formalism only for a quadratic potential, and the free scalar field theory for the potentials of the Lagrange multiplier to finite and positive power.