

## Eikonal 近似在大角度一定不好吗\*?

杨永栩

(广西师范大学物理系, 桂林541001)

李清润

(中国科学院高能物理研究所, 北京 100039)

### 摘 要

Eikonal 近似被认为只适用于高能量和小角度. 因此通常的看法是, Eikonal 近似在大角度一定不好. 本文证明, 上述看法是一种习惯性的误解.

Eikonal 近似, 由于它的简单, 被广泛地使用在多种研究领域中. 对于研究一种近似方法而言, 弄清楚它的适用条件, 毫无疑问是十分重要的问题. Glauber 在其开创性的工作中<sup>[1]</sup>, 给出了 Eikonal 近似的适用条件为  $ka \gg 1$  和  $|V_0|/E \ll 1$ . 对于角度适用范围, Glauber 给出的条件是  $\theta < O(\sqrt{1/ka})$  或  $\theta < O(\sqrt{V/E})$ . 因此, Eikonal 近似通常被认为只适用于高能量和小角度的条件.

Joachain 在《量子碰撞理论》一书<sup>[2]</sup>及他与 Byron 等人所做的一系列工作中<sup>[3-5]</sup>, 对 Eikonal 近似的适用性问题进行了研究. 他们把  $|V_0|/E \ll 1$  的条件解除, 研究了  $|V_0|/E \gg 1$  (强耦合) 和  $|V_0|/E \approx 1$  (中间耦合) 条件下 Eikonal 近似的适用性问题.

我们最近对强耦合和中间耦合条件下 Eikonal 近似的适用性问题做了进一步的研究<sup>[6,7]</sup>. 指出了 Joachain 等人的某些结论具有局限性, 并进一步揭示出 Eikonal 近似的适用性与位势的形状有关.

本文将研究在正常条件下, 即  $ka \gg 1$  和  $|V_0|/E \ll 1$ , Eikonal 近似的适用性问题. 作为一篇简短报导, 本文将主要展示一个出人意料的结果.

在势散射下, Eikonal 振幅为

$$F(\mathbf{q}) = \frac{k}{2\pi i} \int d\mathbf{b} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} [e^{i\chi(\mathbf{b})} - 1], \quad (1)$$

其中

$$\chi(\mathbf{b}) = -\frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} U(\mathbf{b}, z) dz \quad (2)$$

本文1992年2月17日收到.

\* 本文得到国家自然科学基金和中国科学院理论物理研究所资助.

式中  $k$  是入射波数,  $U(r) = \frac{2m}{\hbar^2} V(r)$ . 振幅(1)式是在假定  $ka \gg 1$ ,  $|V_0|/E \ll 1$  ( $V_0$  是  $V(r)$  的强度)和小角度的条件下得到的. 在推导中并未对位势  $V$  的具体形式有任何限制. 因此, 我们完全可以期望, 对于各种形状的位势, 只要满足  $ka \gg 1$  和  $|V_0|/E \ll 1$ , 在小角度区 Eikonal 近似都能给出好结果.

我们先选择高斯势进行研究. 能量和势参数的选择使得很好地满足  $ka \gg 1$  和  $|V_0|/E \ll 1$ . 将 Eikonal 近似与精确解进行比较. 结果表明, 在小于约  $30^\circ$  角的小角度区, Eikonal 近似的确是极好的近似; 而在  $40^\circ$  角以后的角区, Eikonal 截面与精确截面相差极大, 可达几个数量级. (由于简报对图的数目有限制, 这里就不给出图示了.) 对于高斯势的情况, 确是如人们通常对 Eikonal 近似适用性的理解: 这一近似只适用于小角度, 对于大角度则不好.

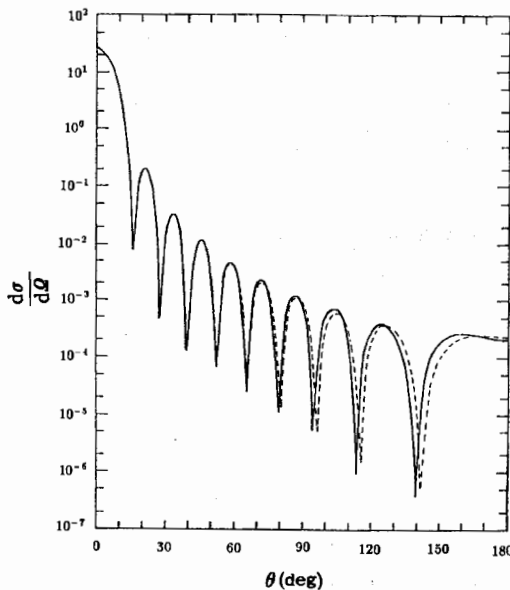


图1 方势阱的微分截面

$$k=5, U_0=-0.5, R=3.15$$

实线是精确解, 虚线为 Eikonal 解

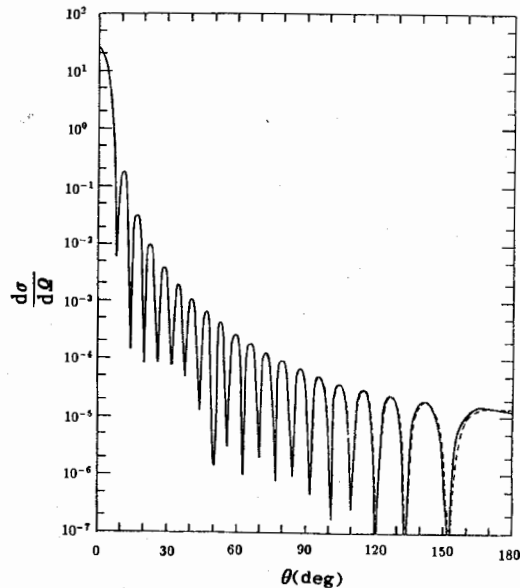


图2 方势阱的微分截面

$$k=10, U_0=-0.5, R=3.15$$

实线是精确解, 虚线为 Eikonal 解

但是当我们把研究转向一类具有明显边

界的位势时, 得到了出人意料的结果. 我们选取一个典型的具有明显边界的位势—方势阱. 选取  $k=5$ ,  $U_0=-0.5$ ,  $R$  (方阱半径)  $=3.15$ . (以上各量均以长度单位计, 如文献[2]所取). 这组参数显然非常好地满足  $ka \gg 1$  和  $|V_0|/E = |U_0|/k^2 \ll 1$  的条件. 因此对应的是一个高能散射的情况. 由计算得出的 Eikonal 截面和精确解截面给在图1中. 在小角度区, Eikonal 所似能给出好的结果当然是预料中的事, 毫不奇怪. 但出人意料的是, Eikonal 近似竟在整个角区都给出相当好的结果. 这与同样参数下高斯势的结果, 即在稍微大些的角度, (例如  $0 \sim 90^\circ$ ) Eikonal 截面就已经比精确解低7—8个数量级的结果比较, 简直有天壤之别.

Eikonal 是高能近似. 为了研究我们上面得到的结果与能量的关系, 我们在图2中给出另一组结果, 即入射动量提高到  $k=10$ , 而取  $U_0=-1.0$ . 从图2可以看出, 这时 Eikonal 近似给出的结果比图1的情况更好. 这表明, Eikonal 近似的适用角区随着能量的提高而增大.

这里, 我们想强调指出, 前面提到的 Eikonal 近似的适用条件  $ka \gg 1$ ,  $|V_0|/E \ll 1$ ,  $\theta < O(\sqrt{1/ka})$  或  $O(\sqrt{V/E})$ , 这些都是充分条件, 而不是必要条件. 后者是远没有研究清楚的问题.

本文所展示的结果, 其意义不单单是发现了一种情况, 它突破了人们对 Eikonal 近似适用条件的传统上的理解, 而更重要的在于它在核物理研究中所具有的实际意义. 众所周知, 在核物理中常遇到的位势, 大都具有较为明显的边界(特别是中重原子核). 因此, 在核物理的计算中, Eikonal 近似可能在较大的角度范围内给出可靠的结果. 事实上, 在强子与原子核散射的问题中, 人们早就得到一种经验: Glauber 理论与实验结果的比较, 似乎比可能预期的要好. 本文的结果为理解这一经验事实提供一个理论上的依据.

### 参 考 文 献

- [1] R. J. Glauber, in Lectures in Theoretical Physics, edited by W. E. Brittin(Interscience, New York, 1959), Vol. 1, p. 315.
- [2] C. J. Joachain, Quantum Collision Theory (North-Holland, Amsterdam, 1975), Chaps. 9.
- [3] F. W. Byron, Jr., C. J. Joachain, and E. H. Mund, *Phys. Rev.*, **D8**(1973), 2622.
- [4] F. W. Byron, Jr., C. J. Joachain, and E. H. Mund, *Phys. Rev.*, **D11**(1975), 1662.
- [5] F. W. Byron, Jr., C. J. Joachain, and E. H. Mund, *Phys. Rev.*, **C20**(1979), 2325.
- [6] Yang Yong-xu and Li Qing-run, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **23**(1990), 4877.
- [7] 杨永栩、李清润, 高能物理与核物理, **16**(1992), 534.

## Is the Eikonal Approximation Certainly Bad at Larger Angles?

YANG YONGXU

(Department of Physics, Guangxi Normal University, Guilin 541001)

LI QINGRUN

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing 100039)

### ABSTRACT

The eikonal approximation is considered to be valid only for high energy and smaller angles. It is generally accepted that the eikonal approximation is certainly bad at larger angles. We show that the above view is a customary misunderstanding.