

核激子态的瞬时概率分布和非平衡熵

潘忠诚 姜绍周

(南开大学物理系, 天津 300071)

高良俊 龙胜东

(中国原子能科学研究院, 北京 102413)

摘 要

本文用 Laplace 变换和连分式方法解核反应激子模型概率分布, 给出了全部转移概率矩阵元的代数表示式, 并计算了受激原子核的分态概率分布和瞬时熵.

一、引 言

根据原子核物理激子模型^[1]的观点, 受激发的原子核在费米能面之上会出现费米子(中子和质子), 在费米能面之下相应地留有空穴, 费米子和空穴在此统称为激子. 激子态在产生、湮灭和逃逸三种跃迁速率的竞争中, 随时间不断地变化, 并受主方程的控制. 研究受激原子核激子态的瞬时变化, 给出激子态概率分布函数和瞬时熵是原子核物理的一个重要课题. 在 L. GAO^[2]的文章中已有初步论述. 在此基础上, 本文给出了全部转移概率分布的代数表示式, 并且计算出了受激原子核的概率分布和非平衡瞬时熵的变化曲线. 为深入研究受激原子核的动态性质打下了良好的基础.

二、解主方程求瞬时概率分布

描述受激原子核激子态概率分布函数 $P_m(t)$ 的主方程, 有下面的形式,

$$\frac{d}{dt}P_m(t) = A_{m-1}P_{m-1}(t) - R_mP_m(t) + B_{m+1}P_{m+1}(t). \quad (1)$$

将(1)的 $P_m(t)$ 展开成为

$$P_m(t) = \sum_{n=1}^N G_{m,n}(t)P_n(0). \quad (2)$$

式中, $P_n(0)$ 表示起始激子态的概率分布, $G_{m,n}(t)$ 是转移概率矩阵, 显然, 当 $t = 0$ 时, 应有

$$G_{m,n}(0) = \delta_{mn}. \quad (3)$$

其中 δ_{mn} 是 Kronecker 符号,将(2)代入(1)式,并对 $G_{m,n}(t)$ 进行 Laplace 变换,于是得到下列方程:

$$A_{m-1}G_{m-1,n}(Z) - \hat{R}_m G_{m,n}(Z) + B_{m+1}G_{m+1,n}(Z) = -\delta_{mn}, \quad (4)$$

式中

$$\hat{R}_m = R_m + Z. \quad (5)$$

设最高激子态数为 N ,最低激子态数为 1,按照方程(4)的边界条件,应有

$$A_m = B_m = R_m = 0, \quad (m < 1; m > N). \quad (6)$$

$$G_{m,n}(Z) = 0, \quad (m, n < 1; m, n > N). \quad (7)$$

令

$$\xi_n^+(Z) = G_{n+1,m}(Z)/G_{n,m}(Z), \quad (8)$$

$$\xi_n^-(Z) = G_{n-1,m}(Z)/G_{n,m}(Z). \quad (9)$$

将(8)和(9)代入(4)式,得到:

$$\xi_m^+(z) = \frac{A_m}{\hat{R}_{m+1} - B_{m+2}\xi_{m+1}^+(Z)} \approx \frac{A_m}{R_{m+1} + Z - \alpha B_{m+2}}, \quad (10)$$

$$\xi_m^-(z) = \frac{B_m}{\hat{R}_{m-1} - A_{m-2}\xi_{m-1}^-(Z)} \approx \frac{B_m}{R_{m-1} + Z - \alpha A_{m-2}}. \quad (11)$$

为了简化计算,在这里引入了可调参数 α .把(10)和(11)式代入(4)式,可得出:

$$\begin{aligned} G_{m,m}(Z) &= [\hat{R}_m - A_{m-1}\xi_m^-(Z) - B_{m+1}\xi_m^+(Z)]^{-1} \\ &\approx [R_m + Z - \frac{A_{m-1}B_m}{R_{m-1} + Z - \alpha A_{m-2}} - \frac{B_{m+1}A_m}{R_{m+1} + Z - \alpha B_{m+2}}]^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

令

$$\bar{R}_m = [R_{m-1} + R_{m+1} - \alpha(A_{m-2} + B_{m+2})]/2, \quad (13)$$

便得

$$G_{m,m}(Z) \approx \frac{Z + \bar{R}_m}{(Z + X_m)(Z + Y_m)}. \quad (14)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} X_m &= (R_m + \bar{R}_m + W_m)/2 \\ Y_m &= (R_m + \bar{R}_m - W_m)/2 \\ W_m &= [(R_m - \bar{R}_m)^2 + 4(A_{m-1}B_m + A_mB_{m+1})]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

对(14)式作逆 Laplace 变换,就求出转移概率矩阵元的表示式:

$$G_{m,m}(t) \approx \frac{1}{W_m} [(\bar{R}_m - Y_m)e^{-Y_m t} - (\bar{R}_m - X_m)e^{-X_m t}]. \quad (16)$$

用和上面相似的方式,作(10)和(11)式的 Laplace 逆变换,可得到:

$$\xi_m^+(t) \approx \frac{A_m}{N_m} [(R_{m+2} - U_m)e^{-U_m t} - (R_{m+2} - V_m)e^{-V_m t}]. \quad (17)$$

$$\text{其中: } \left. \begin{aligned} U_m &= (R_{m+1} + R_{m+2} - N_m)/2 \\ V_m &= (R_{m+1} + R_{m+2} + N_m)/2 \\ N_m &= [(R_{m+1} - R_{m+2})^2 + 4A_{m+1}B_{m+2}]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\text{并且有: } \xi_m^-(t) \approx \frac{B_m}{M_m} [(R_{m-2} - D_m)e^{-D_m t} - (R_{m-2} - F_m)e^{-F_m t}]. \quad (19)$$

$$\text{其中: } \left. \begin{aligned} D_m &= (R_{m-1} + R_{m-2} - M_m)/2 \\ F_m &= (R_{m-1} + R_{m-2} + M_m)/2 \\ M_m &= [(R_{m-1} - R_{m-2})^2 + 4A_{m-2}B_{m-1}]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\text{当 } n = m \text{ 时, (8)和(9)式变为: } G_{m+1,m}(Z) = \xi_m^+(Z)G_{m,m}(Z), \quad (21)$$

$$G_{m-1,m}(Z) = \xi_m^-(Z)G_{m,m}(Z). \quad (22) \text{ 将(21)和(22)式作逆 Laplace 变换, 要用卷积定理.}$$

$$G_{m+1,m}(t) = \xi_m^+(t) * G_{m,m}(t). \quad (23)$$

$$G_{m-1,m}(t) = \xi_m^-(t) * G_{m,m}(t). \quad (24)$$

式中, 对角元 $G_{m,m}(t)$ 已由(16)式给出, 而 $\xi_m^+(t)$ 和 $\xi_m^-(t)$ 分别由(17)和(19)式给出, “*”表示卷积运算^[2].

由(12), (23)和(24)式, 可给出全部转换概率矩阵元的代数表示式^[3]. 若将全部转移概率矩阵元代入(2)式, 就可以给出受激原子核的瞬时概率分布 $P_m(t)$, 并由下式给出非平衡熵: $S_m(t) = -P_m(t) \ln P_m(t)$. (25)

三、激发⁹³Nb核的瞬时概率分布和熵的计算

将激发能 $E = 37.5 \text{ MeV}$ 的⁹³Nb核的有关数据代入激子模型计算公式^[3]. 便可以计算出 $A_m, B_m, L_m, R_m, \bar{R}_m, X_m, Y_m, W_m, U_m, V_m, N_m, D_m, F_m$ 和 M_m 的值^[3].

在计算上述量时, 要注意, 当 $m > 7$ 时, $L_m < 0$, 这说明发射速率已经失去物理意义了. 所以 $m = 7$ 是我们应取的最大激子态 N . 显然 N 的大小和激发能 E 有着密切关系. 在计算结果中调参数 α 时, 发现 $\alpha = 0.3, \dots, 0.6$ 对计算结果几乎没有影响, 直至 $\alpha = 0.7$ 以上, 对高激子态 $m = 7$, 时间在 $t \geq 5 \times 10^{-22} \text{ s}$, 才显现出较小的变化. 这就说明我们把连分式截断所引入的可调参数 α 不是很敏感的变量, 引入可调参数不会影响计算结果的精度.

现在用如下的初始条件

$$P_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad P_7(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

对公式(2)和(25)计算出 $m = 1, 2, \dots, 7$ 各态的瞬时概率分布 $P_m(t)$ 和非平衡熵 $S_m(t)$, 其曲线如图 1 和 2 所示. 这里时间单位用 10^{-22} s, $P_m(t)$ 和 $S_m(t)$ 用自然单位.

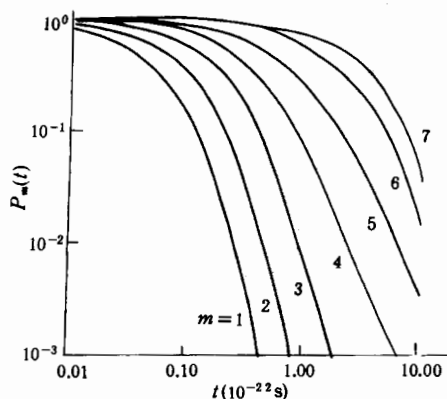


图 1 受激原子核⁹³Nb 各分态的瞬时
概率分布 $P_m(t)$

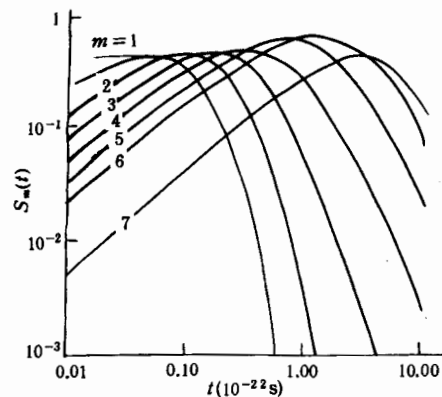


图 2 受激原子核⁹³Nb 的分态熵
 $S_m(t)$ 随时间变化曲线.

图 1 给出各激子态占有的概率分布 $P_m(t)$, 随时间都有变小的趋势. 这正好反映出受激原子核中的核子随时都可能发射到原子核外去. 然而, 图 2 给出的分态熵 $S_m(t)$ 随时间变化, 是由小到增大再减小的规律, 它反映受激原子核由冷变热再变冷的过程. 这是一个开放系统受激原子核激子态合理的变化规律. 由此不难推知受激原子核的体积和密度也都要随时间发生变化, 这是我们今后将仔细研究的问题.

参 考 文 献

- [1] 高良俊、申庆彪, 原子核反应理论, 北京, 中国原子能出版社, 1986.
- [2] Gao Liangjun, Fang Jingjing, Han Yinlu, *Phys. Lett.* **144A**(1990), 1.
- [3] Pan Zhongcheng and Gao Liangjun et al., *Chin. J. Nucl. Phys.*, **14**(1992), 105.

Instantaneous Probability Distribution and Nonequilibrium Entropy of Nuclear Exciton States

PAN ZHONGCHENG JIANG SHAOZHOU
(Department of Physics, Nankai University, Tianjin 300071)

GAO LIANGJUN LONG SHENG DONG
(Institute of Atomic Energy, Beijing 102413)

ABSTRACT

In this paper the Laplace transformations and the continued fraction method are used to handle the problem of the probability distribution in the model nuclear exciton. The algebraic expressions of all the transformation matrix elements are given, and the excited state probability distribution and instantaneous entropy are calculated.