第 17 卷 第 5 期
1993 年 5 月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol. 17, No. 5
May, 1993

静轴对称 SDYM 场的一种新的对称变换

郝三如
(长沙水电师院物理系,长沙,410077)

摘　要

利用静轴对称 SDYM 场方程的 Lax 对的解,我们构造出了静轴对称 SDYM 场的一种新的对称变换.

一、引　　言

近几年来,人们对杨-Mills 场[1-6]的研究,特别是对 SDYM 场的研究[7-11]发生了浓厚的兴趣.他们在 Yang-Mills 场的可积性及谱空间的 Loop 对称性方面作了大量的工作.近来侯伯宇教授[11]等人得到了静轴对称 SDYM 场在对称陪集空间 SL(N,R)/SO(N)下的运动方程及相应的线性方程.本文就是利用该线性方程的解 $U(e)$,构造了一个静轴对称 SDYM 场的一个新的变换,并证明了该变换是一个对称变换.从场的对称变换本身可以看出,它不是规范势 A_e(或 $A_{\bar{e}}$) 的规范变换.本文我们先从 SDYM 场方程入手,简单的给出静轴对称 SDYM 场在对称的 $SL(N,R)/SO(N)$ 下的运动方程和相应的线性方程,然后构造出静轴对称 SDYM 场的变换,并证明它是一个对称变换.

二、静轴对称 SDYM 场方程

众所周知,四维欧氏空间中的 SDYM 场方程为,

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}. \tag{1}$$

根据杨[12]介绍的方法,在基底空间中选取如下的复坐标:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(x+iy), \qquad v = \frac{1}{2}(Z-i\tau), \\ \bar{u} &= \frac{1}{2}(x-iy), \qquad \bar{v} = \frac{1}{2}(Z+i\tau), \end{aligned} \tag{2}$$

则 SDYM 场方程(1)可写成下面的形式:

本文 1991 年 11 月 25 日收到.

$$F_{uv} = 0, \qquad F_{\bar{u}\bar{v}} = 0, \tag{3}$$

$$F_{u\bar{u}} + F_{v\bar{v}} = 0. \tag{4}$$

(3)式中的两方程表明，规范势可以表示成复二维 (u,v 为常数或 $\bar{u},\bar{v}$ 为常数的复二维平面) 空间的纯规范形式：

$$\begin{aligned} A_u &= D^{-1}\partial_u D, & A_v &= D^{-1}\partial_v D, \\ A_{\bar{u}} &= \bar{D}^{-1}\partial_{\bar{u}}\bar{D}, & A_{\bar{v}} &= \bar{D}^{-1}\partial_{\bar{v}} D, \end{aligned} \tag{5}$$

上式中 D、$\bar{D} \in SL(N,C)$. 当进行适当的局域规范变换，$\bar{D} \to J = \bar{D}D^{-1} = (DD^+)^{-1}$，则可以得到 J- 形式的 SDYM 场方程：

$$\partial_u(J^{-1}\partial_{\bar{u}}J) + \partial_v(J^{-1}\partial_{\bar{v}}J) = 0. \tag{6}$$

我们知道，在四维时空中的 Yang-Mills 场，它们存在两个可对易的 Killing 矢量，因此 SDYM 场方程能约化为一个二维空间实场方程. 在静轴对称的情况下，根据杨[12]选择的柱坐标，并利用演化算子 n[11] 在对称空间 $SL(N,R)/SO(N)$ 上构造一个静轴对称的 SDYM 场量 $N(\rho,z)$：

$$N \doteq gng^{-1}, \ g \in SL(N,R), \ N^2 = I. \tag{7}$$

这样，J- 形式的 SDYM 场方程(6)就可约化为二维空间的静轴对称 SDYM 场 $N(\rho,z)$ 的运动方程 ($N \in SL(N,R)/SO(N)$)：

$$\partial\rho(PN^{-1}\partial\rho N) + \partial z(\rho N^{-1}\partial z N) = 0. \tag{8}$$

三、静轴对称 SDYM 场的新的对称变换

引入静轴 SDYM 场的规范势 $A_\rho = N^{-1}\partial_\rho N, A_z = N^{-1}\partial_z N$，则相对静轴对称 SDYM 场方程(8)，有如下的线性系统[11]：

$$\partial_\rho U_{(\rho,z,l)} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}(A_z - \lambda A_\rho)U_{(\rho,z,l)}, \tag{9}$$

$$\partial_z U_{(\rho,z,l)} = -\frac{\lambda}{1+\lambda^2}(A_\rho + \lambda A_z)U_{(\rho,z,l)}, \tag{10}$$

其中 $U(\rho,z,l)$ 是取值在群 $SL(N,R)/SO(N)$ 的李代数上的柱坐标 ρ,z 及参数 l 的矩阵函数，而 λ 为 ρ,z 及 l 的参数函数：

$$\lambda_{(\rho,z,l)} = \frac{1}{l\rho}\left(1 - lz - \sqrt{(1-lz)^2 + l^2\rho^2}\right). \tag{11}$$

这里的线性方程(9)、(10)与其它系统[13−15]Lax 对有如下几点不同：(a)，这里是对轴对称的二维空间坐标的偏导而不是(1+1)维空间的空时坐标的偏导；(b)，Lax 对右边的规范势是两对应偏导的规范势的函数线性组合而不只是其规范势本身；(c)，这里的 λ 是柱坐标 ρ,z 以及参数 l 的函数而不是参数 l 本身. 正是由于上述的差别，使得我们找到非线性 σ-$O(3)$ 模型[13] 以及超对称手征场[14] 的隐藏 Virasoro 代数结构后，再寻找静轴对称 SDYM 场的 Virasoro 代数结构出现困难. 好在现在找到了静轴对称 SDYM 场的新的对称变换(与以前讨论的 SDYM 场的具有 KC-Moody 对称的变换不同)，使得讨论它的谱空间共形代数成为现实.

利用(11)式,可得到几个有用的等式:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}=\frac{\lambda(1-\lambda^2)}{\rho(1+\lambda^2)},\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial z}=-\frac{2\lambda^2}{\rho(1+\lambda^2)},$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\lambda}{\rho(1+\lambda^2)}\right]=-\frac{4}{\rho^2}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)^3,\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\lambda}{\rho(1+\lambda^2)}\right]=-\frac{2}{\rho^2}\frac{\lambda^2(1-\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^3}. \tag{12}$$

由(12)及线性方程(9-10),可以证明:

$$(\partial_z\partial_\rho-\partial_\rho\partial_z)U(\rho,z,l)=\frac{\lambda}{\rho(1+\lambda^2)}[\partial_\rho(\rho A_\rho)+\partial_z(\rho A_z)]. \tag{13}$$

上式显然说明静轴对称 SDYM 场方程(8)是(9)、(10)的可积条件,即本问题是可积的.

利用(9),(10)的解 $U(\rho,z,l)$,我们构造出 A_ρ,A_z 的如下的变换:

$$\delta A_\rho=-\frac{1}{\lambda}\partial_z(U\theta U^{-1})-\partial_\rho(U\theta U^{-1})+[U\theta U^{-1},A_\rho], \tag{14}$$

$$\delta A_z=\frac{1}{\lambda}\partial_\rho(U\theta U^{-1})-\partial_z(U\theta U^{-1})+[U\theta U^{-1},A_z], \tag{15}$$

上式中的 θ 是群 SL(N,R)/SO(N)的生成元. 正如我们以后文章所讨论的那样,取群生成元 θ 的不同形式,就可以得到上面变换对易子的 Kc-Mooky 代数和 Virasoro 代数. 从以下的证明可知,(14)、(15)两式所给的变换是一种对称变换.

由 Lax 对(9-10),可得下面的两个辅助方程:

$$\begin{aligned}\partial_z(U\theta U^{-1})&=\frac{\lambda}{1+\lambda^2}[U\theta U^{-1},A_\rho+\lambda A_z],\\ \partial_\rho(U\theta U^{-1})&=-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}[U\theta U^{-1},A_z-\lambda A_\rho].\end{aligned} \tag{16}$$

对上式再求一次导数,

$$\begin{aligned}\partial_\rho^2(U\theta U^{-1})=&-\partial_\rho\left[\frac{\lambda}{\rho(1+\lambda^2)}\right][U\theta U^{-1},\rho A_z-\lambda\rho A_\rho]\\ &-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}[\partial_\rho(U\theta U^{-1}),A_z-\lambda A_\rho]\\ &-\frac{\lambda}{\rho(1+\lambda^2)}[U\theta U^{-1},\partial_\rho(\rho A_z)-\partial_\rho\lambda\rho A_\rho-\lambda\partial_\rho(\rho A_\rho)],\end{aligned}$$

利用(12) 各式及(16),

$$\begin{aligned}\partial_\rho^2(U\theta U^{-1})=&\frac{4}{\rho}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)^3[U\theta U^{-1},A_z-\lambda A_\rho]\\ &+\frac{\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}[[U\theta U^{-1},A_z-\lambda A_\rho],A_z-\lambda A_\rho]\\ &-\frac{\lambda}{\rho(1+\lambda^2)}\left[[U\theta U^{-1},\partial_\rho A_z-\frac{\lambda(1-\lambda^2)}{1+\lambda^2}A_\rho-\lambda\partial_\rho(\rho A_\rho)\right].\end{aligned} \tag{17}$$

同样可得对 Z 的两次偏导数为:

$$\begin{aligned}\partial_z^2(U\theta U^{-1})=&-\frac{2}{\rho}\frac{\lambda^2(1-\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^3}[U\theta U^{-1},A_\rho+\lambda A_z]\\ &+\frac{\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}\left[[U\theta U^{-1},A_\rho+\lambda A_z],A_\rho+\lambda A_z\right]\\ &+\frac{\lambda}{\rho(1+\lambda^2)}[U\theta U^{-1},\partial_z(\rho A_\rho)-\frac{2\lambda^2}{1+\lambda^2}A_z+\lambda\partial_z(\rho A_z)].\end{aligned} \tag{18}$$

由运动方程(8)辅助方程(17),(18),并利用关系等式 $\partial_\rho A_z-\partial_z A_\rho=[A_z,A_\rho]$,可得到下面

等式:

$$(\partial_z^2+\partial_\rho^2)(U\theta U^{-1}) = -\frac{\lambda}{\rho(1+\lambda^2)}[U\theta U^{-1}, A_z+\lambda A_\rho] + \frac{\lambda}{1+\lambda^2}[U\theta U^{-1},[A_\rho,A_z]] + \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}[[U\theta U^{-1},A_z],A_z]+[[U\theta U^{-1},A_\rho],A_\rho]. \tag{19}$$

由 A_ρ, A_z 的变换关系(14、15)则有:

$$\begin{aligned}&\partial_\rho(\rho\delta A_\rho)+\partial_z(\rho\delta A_z)\\ &=\partial_\rho\{-\frac{\rho}{\lambda}\partial_z(U\theta U^{-1})-\rho\partial_\rho(U\theta U^{-1})+[U\theta U^{-1},\rho A_\rho]\}\\ &\quad+\partial_z\{\frac{\rho}{\lambda}\partial_\rho(U\theta U^{-1})-\rho\partial_z(U\theta U^{-1})+[U\theta U^{-1},\rho A_z]\},\end{aligned}$$

考虑到(12)各式和辅助方程(16)并进行代数运算:

$$\begin{aligned}&\partial_\rho(\rho\delta A_\rho)+\partial_z(\rho\delta A_z)\\ &=-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}[U\theta U^{-1},A_z+\lambda A_\rho]-\rho(\partial_z^2+\partial_\rho^2)(U\theta U^{-1})\\ &\quad-\frac{\rho\lambda}{1+\lambda^2}[[U\theta U^{-1},A_z-\lambda A_\rho],A_\rho]+\frac{\rho\lambda}{1+\lambda^2}[[U\theta U^{-1},A_\rho+\lambda A_z],A_z].\end{aligned}$$

由(19)式及李算子 Jacobi 对易子关系,上式进一步简化为:

$$\partial_\rho(\rho\delta A_\rho)+\partial_z(\rho\delta A_z)=-\frac{\rho\lambda}{1+\lambda^2}[(U\theta U^{-1}),[A_\rho,A_z]]+\frac{\rho\lambda}{1+\lambda^2}[[A_z,A_\rho],U\theta U^{-1}].$$

上式右端显然为零,因此说明(14-15)两式所给出的 A_ρ, A_z 的变换是静轴对称 SDYM 场的一个对称变换. 同理,在适当给出解 $U(\rho,z,l)$ Riemann-Hilbert 问题后,(14)、(15)两式也是(9-10)的一个对称变换.

四、几点说明

1. (14)-(15)两式中,我们是直接给出由静轴对称 SDYM 场 $N(\rho,z)$ 组成的 $A_\mu = N^{-1}\partial_\mu N(\mu=\rho,z)$ 的变换式,当然可以由其解出场 $N(\rho,z)$ 的变换式,但表达式较繁也没有必要.

2. 如果只在规范群空间考虑 $A_\mu(\mu=\rho,z)$ 的变换,$\delta A_\mu=\partial_\mu B+[A_\mu,B]$,显然只有当 B 为整体的规范量时才能使运动方程不变,因此我们所给出的 $A_\mu(\mu=\rho,z)$ 的变换(14)、(15)是一种非规范的新的解 U 空间给出的对称变换.

3. 利用 Riemann-Hilbert 问题,找到 $U(\rho,z,l)$ 的适当变换和群生成元 θ 的适当形式,则能得到场 $A_\mu(\mu=\rho,z)$ 变换的一种 Loop 的和 Virasoro 的代数结构,这也是人们很感兴趣的问题,我们将在另外的文章中给出这一结果.

参 考 文 献

[1] E. Witten, *Phys. Lett.*, **B77**(1983), 394.
[2] I. V. Volovich, *Lett. Math. Phys.*, **7**(1983), 517; *Phys. Lett.*, **B129**(1983), 429.
[3] C. Devchand, *Nucl. Phys.*, **B236**(1984), 333.
[4] L. L. Chau, M. L. Ge and Z. Popowicz, *Phys. Rev. Lett.*, **55**(1984)1940.
[5] E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B266**(1985), 245.
[6] R. Ward, *Nucl. Phys.*, **B236**(1984), 361.
[7] A. A. Belavin and V. E. Zakharov, *Phys. Lett.*, **B73**(1978), 53.
[8] K. Ueno and Y. Nakamura, *Phys. Lett.*, **B109**(1982), 273.
[9] L. L. Chau and Y. S. Wu, *Phys. Rev.*, **D26**, (1982), 3581.
[10] L. Dolan, *Phys. lett.*, **B113**(1982), 387.
[11] B. Y. Hou, B. Y. Hou and P. Wang, *Inter. J. Mod. Phys.*, **A1**(1986), 193.
[12] C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.*, **38**(1977), 1377.
[13] 郝三如、李卫, 高能物理与核物理, **13**(1989), 120.
[14] 郝三如、李卫, 高能物理与核物理, **13**(1989), 320.
[15] S. Y. Wu, *Comm. Math. Phys.*, **90**(1983), 461.

A New Symmetric Transformation of the Static Axially Symmetric SDYM Fields

HAO SANRU

(Department of Physics, Changsha Normal University of Water Resources and Electric Power, Changsha, 410077)

ABSTRACT

By means of the solutions of the Lax pair of the static axially symmetric self-dual Yang-Mills (SDYM) fields, a new symmetric transformation of the static axially symmetric SDYM fields is constructed.