

# Polyakov-Kleinert 弦的静态夸克势研究

姜涛

胡诗可

(四川建材学院基础部, 绵阳 621002) (四川大学物理系, 成都 610064)

## 摘 要

本文将度规  $g_{ab}$  作为独立场引入, 推导出协变的 Polyakov 弦运动方程, 得到该方程在自由边界条件和固定边界条件下的一般本征解; 对该本征解求迹, 在闵氏空间按  $1/D$  展开到领头项, 用鞍点法算出了  $D \rightarrow \infty$  时的静态夸克势. 通过计算  $\psi$  和  $\gamma$  族的谱结构及轻子衰变宽度, 我们发现该势与实验符合得很好. 进一步, 我们在较宽的  $t$  夸克质量范围内 ( $50\text{GeV} - 120\text{GeV}$ ), 计算了  $t\bar{t}$  系的谱结构及轻子衰变宽度.

## 一、引 言

最近, 一种具有外部曲率的 QCD 弦模型引起了广泛的兴趣, 这就是 Polyakov-Kleinert (P-K) 弦<sup>[1,2]</sup>. 由于其外部曲率项耦合常数的渐近自由特性与 QCD 渐近自由特性吻合以及引入外部曲率从物理上更直接的考虑, 使之成为很有希望的 QCD 弦模型. 并且 P-K 弦理论不存在快子问题<sup>[3,4]</sup>. 目前用 P-K 弦处理  $q-\bar{q}$  势的结果, 库仑项系数在长程范围内都为普适项  $(D-2)\pi/24$ , 这和 Eichten 等分析  $c\bar{c}$  谱得到的系数 0.52 相差近一倍<sup>[5]</sup>. 虽然 Zhou 最新得到系数为  $(D-2)\pi/12$ <sup>[6]</sup>, 但作者用了一个 P-K 弦不具有的共形不变假定. 因此, 库仑项系数值是弦模型的一个重要缺点.

分析前人的工作我们发现, 在处理 P-K 弦时都采用了自由 Nambu-Goto (N-G) 弦的本征态. 尽管在相同的边界条件下 N-G 弦的经典解也是 P-K 弦的解, 但反之不成立<sup>[7]</sup>. 所以我们认为前人的工作失去了一般性, 也是库仑项系数不符的原因. 本文的目的就是, 导出一可解的 P-K 弦运动方程, 用 P-K 弦的本征解而不是 N-G 弦的本征解推导重夸克势.

## 二、P-K 弦: 作用量、方程及本征解

P-K 弦作用量为:

$$S[X^\mu] = \frac{M_0^2}{2} \int_M \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a \partial_b X_\mu d^2\xi + \frac{1}{2e^2} \int_M \sqrt{-g} [\square(-g)X^\mu]^2 d^2\xi, \quad (2.1)$$

其中  $M$  是一封闭定向二维曲面,  $g_{ab}$  是  $M$  上的 Riemann 度规张量,  $X^\mu (\mu = 1, \dots, D)$  是一嵌套映射,  $X^\mu: M \rightarrow M^D$  (这里我们将  $M^D$  取为闵氏空间).  $M_0^2$  是裸弦张力,  $e$

是无量纲耦合常数,即刚性耦合常数 (rigidity coupling).  $\square(g)$  是相应度规  $g_{ab}$  的 Laplace 算子:

$$\square(g) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_a [\sqrt{-g} g^{ab} \partial_b]. \quad (2.2)$$

(2.1)式中第一项,我们采用了 N-G 弦的 Polyakov 形式,第二项就是 Polyakov 引入的与世界面的外部曲率有关的作用量. 对 N-G 弦这一项自动消失.

利用熟知的恒等式  $\partial_a(\sqrt{-g} g^{ab}) = -\sqrt{-g} g^{ac} \Gamma_{bc}^a$  ( $\Gamma_{bc}^a$  是 Christoffel 联络),有

$$\square X^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_a (\sqrt{-g} g^{ab} \partial_b X^\mu) = g^{ab} D_a D_b X^\mu, \quad (2.3)$$

$$\text{其中} \quad D_a D_b X^\mu \equiv (\partial_a \partial_b - \Gamma_{ab}^c \partial_c) X^\mu. \quad (2.4)$$

拉格朗日密度的变分为

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L} = & (\delta X^\mu) [\delta \mathcal{L} / \delta X^\mu - \partial_a \delta \mathcal{L} / \delta (\partial_a X^\mu) + \partial_a \partial_b \delta \mathcal{L} / \delta (\partial_a \partial_b X^\mu)] \\ & + \partial_a [(\delta X^\mu) \delta \mathcal{L} / \delta (\partial_a X^\mu) - (\delta X^\mu) \partial_a \delta \mathcal{L} / \delta (\partial_a \partial_b X^\mu) \\ & + \partial_b (\delta X^\mu) \delta \mathcal{L} / \delta (\partial_a \partial_b X^\mu)]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

由变分原理

$$\delta S = \int \Delta \mathcal{L} d^2 \xi = 0,$$

得运动方程的拉格朗日形式为

$$\delta \mathcal{L} / \delta X^\mu - \partial_a \delta \mathcal{L} / \delta (\partial_a X^\mu) + \partial_a \partial_b \delta \mathcal{L} / \delta (\partial_a \partial_b X^\mu) = 0. \quad (2.6)$$

显然,  $\delta \mathcal{L} / \delta X^\mu = 0$ . 利用关系式(2.3)、(2.4)可求得  $g_{ab}$  为独立场时的运动方程为

$$R_0^2 \square(\square X^\mu) - \square X^\mu = 0, \quad (2.7)$$

其中  $R_0^2 = 1/e^2 M_0^2$ ,  $R_0$  有长度的量纲. 方程是协变的. 这与引入诱导度规

$$g_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu$$

得到的方程不同<sup>[7]</sup>. 他们的方程是

$$\square X^\mu + 2R_0^2 \partial_a \left[ \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} \partial^\sigma X^\mu (\square X^\mu)^2 - 2\partial^\sigma \partial_b X^\nu \partial^b X^\mu \square X_\nu - \partial^\sigma (\square X^\mu) \right) \right] = 0. \quad (2.8)$$

方程(2.8)不协变且几乎无法求解<sup>[3]</sup>.

考虑自由边界的情况,由(2.5)式

$$\begin{aligned} & \int d^2 \xi \partial_a [(\delta X^\mu) \delta \mathcal{L} / \delta (\partial_a X^\mu) - (\delta X^\mu) \partial_b \delta \mathcal{L} / \delta (\partial_a \partial_b X^\mu) + \partial_b (\delta X^\mu) \\ & \quad \cdot \delta \mathcal{L} / \delta (\partial_a \partial_b X^\mu)] \\ & = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma [(\delta X^\mu) \delta \mathcal{L} / \delta (\partial_0 X^\mu) - (\delta X^\mu) \partial_b \delta \mathcal{L} / \delta (\partial_0 \partial_b X^\mu) \\ & \quad + \partial_b (\delta X^\mu) \delta \mathcal{L} / \delta (\partial_0 \partial_b X^\mu)] |_{\tau_1}^{\tau_2} \\ & \quad + \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [(\delta X^\mu) \delta \mathcal{L} / \delta (\partial_1 X^\mu) - (\delta X^\mu) \partial_b \delta \mathcal{L} / \delta (\partial_1 \partial_b X^\mu) \\ & \quad + \partial_b (\delta X^\mu) \delta \mathcal{L} / \delta (\partial_1 \partial_b X^\mu)] |_{\sigma_1}^{\sigma_2} = 0. \end{aligned}$$

所以自由边界条件为

$$\begin{cases} \delta \mathcal{L} / \delta (\partial_1 X^\mu) - \partial_b \delta \mathcal{L} / \delta (\partial_1 \partial_b X^\mu) = 0, & \sigma = \sigma_1, \sigma_2 \\ \delta \mathcal{L} / \delta (\partial_1 \partial_b X^\mu) = 0. & \sigma = \sigma_1, \sigma_2 \end{cases}$$

对于固定边界条件有:  $\delta X^\mu|_{\sigma=\sigma_1, \sigma_2} = 0$ .

以下我们将求解方程(2.7)在自由边界条件和固定边界条件下的本征解. 令  $Y_\mu \equiv \square X_\mu$ , 则方程(2.7)化为如下二阶微分方程组:

$$\begin{cases} R_0^2 \square Y_\mu - Y_\mu = 0, \\ \square X_\mu = Y_\mu. \end{cases} \quad (2.9)$$

自由边界条件化为

$$\begin{cases} Y_\mu = 0, \\ g^{ab} \partial_b (R_0^2 Y_\mu - X_\mu) = 0, \quad \sigma = \sigma_1, \sigma_2 \end{cases}$$

作用量(2.1)式的重新参数不变性允许我们选取“物理规范”<sup>[4]</sup>:

$$X^0 = \xi_0 T, \quad X^1 = \xi_1 R, \quad g_{ab} = \begin{pmatrix} -T^2 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

令  $X_\mu = Q_\mu(r)e^{i\omega t}$ ,  $Y_\mu = \Sigma_\mu(r)e^{i\omega t}$ . 在(2.10)的规范下, 可解得 P-K 弦在自由边界条件下的本征解.

当  $n + N = 2k$ : ( $k = 1, 2, \dots$ ) 时,

$$Q_\mu(r) = \sqrt{\frac{2}{R}} \left[ (1 - B^2 R_0^4)^{1/2} \cos \frac{N\pi r}{R} + B R_0^2 \sin \frac{n\pi r}{R} \right]. \quad (2.11)$$

当  $n + N = 2k + 1$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) 时,

$$Q_\mu(r) = c_1 \cos \frac{N\pi r}{R} + \sqrt{\frac{2}{R}} B R_0^2 \sin \frac{n\pi r}{R}, \quad (2.12)$$

$$c_1 = \frac{4Bn\pi R_0^4 \sqrt{2/R^3} + \sqrt{32B^2 n^2 \pi^2 R_0/R^3 + 2R(1 - B^2 R_0^4)}}{R},$$

其中  $B$  是任意常数且

$$\frac{N^2 \pi^2}{R^2} - \frac{1}{R_0^2} = \frac{n^2 \pi^2}{R^2}. \quad (2.13)$$

对于固定边界条件:  $X_\mu|_{\sigma=0, \pi} = Y_\mu|_{\sigma=0, \pi} = 0$ , 有

$$Q_\mu(r) = \sqrt{\frac{2}{R}} \left[ (1 - B^2 R_0^4)^{1/2} \sin \frac{N\pi r}{R} + B R_0^2 \sin \frac{n\pi r}{R} \right]. \quad (2.14)$$

由于归一化条件中的交叉项积分始终为 0, 固定边界条件的解不受  $n + N$  奇偶性的限制.  $B R_0^2 = 1$  时, 回到 N-G 弦的解.

求解  $q-\bar{q}$  静态势时, 我们可以根据模型的需要, 对不同的夸克结构选用不同的定解. 直观上, 对轻夸克选用自由边界条件的解; 对重夸克选用固定边界条件的解. 但 Lüscher<sup>[8]</sup> 证明了对一个连续的 Yang-Mills 理论, 无限长的流管不存在, 因此对轻夸克弦模型没有充足的理由成立, 我们将主要计算重夸克的静态势.

### 三、弦模型中的静态夸克势

在弦模型中, 考虑  $\exp(-S)$  在所有可能世界面上的泛函积分,  $S$  是相应弦模型的作用量, 当  $T \rightarrow \infty$  时, 这个积分取如下形式

$$\int_{\text{surface}} DX^\mu \exp(-S) \sim \exp[-V(R)T]. \quad (3.1)$$

$V(R)$  就是弦模型中的静态夸克势。

按照 Braaten 等的方法<sup>[4]</sup>, 考虑“物理规范”的微小涨落, 令

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} -T^2(1 + \sigma_0(r)) & 0 \\ 0 & R^2(1 + \sigma_1(r)) \end{bmatrix},$$

$$\alpha^{ab} = \frac{i}{2} M_0^2 \begin{bmatrix} \frac{R}{T} \alpha_0(r) & 0 \\ 0 & \frac{T}{R} \alpha_1(r) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

对  $D-2$  个横向坐标  $X^i$  施行高斯积分, (3.1)式化简为

$$\int DX^\mu \exp(-S[X^\mu]) = \int Dg_{ab} D\alpha^{ab} \exp(-S_{\text{eff}}[g_{ab}, \alpha^{ab}]). \quad (3.3)$$

有效势  $W(R)$  定义为: 当  $T \rightarrow \infty$  时,  $S_{\text{eff}} \rightarrow W(R)T$ .

对 N-G 弦,

$$W_{\text{N-G}}[\sigma_0, \sigma_1, \alpha_0, \alpha_1] = \frac{M_0^2}{2} \int_0^R \left( \alpha_0 \sigma_0 - \alpha_1 \sigma_1 + E + \frac{1}{E} \right) dr$$

$$+ \frac{D-2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \text{Tr} \ln [2i(-g)^{-1/2} (\partial_a \alpha^{ab} \partial_b + \alpha^{ab} \partial_a \partial_b)]. \quad (3.4)$$

同理对 P-K 弦作用量积分得

$$W_{\text{P-K}}[\sigma_0, \sigma_1, \alpha_0, \alpha_1] = \int_0^R \left[ \frac{M_0^2}{2} \left( \alpha_0 \sigma_0 - \alpha_1 \sigma_1 + E + \frac{1}{E} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2e^2} \frac{1}{A} \left( \frac{d}{dr} E \right)^2 \right] dr$$

$$+ \frac{D-2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \text{Tr} \ln [2i(-g)^{-1/2} (\partial_a \alpha^{ab} \partial_b + \alpha^{ab} \partial_a \partial_b)], \quad (3.5)$$

其中  $A = (1 + \sigma_0)^{1/2} (1 + \sigma_1)^{1/2}$ ,  $E = (1 + \sigma_0)^{1/2} / (1 + \sigma_1)^{1/2}$ . (3.6)

我们所得的有效势与 Braaten 等<sup>[4]</sup>得到的有效势形式上稍有差异。因为我们对 N-G 项采用了 Polyakov 形式, 且时空度规是闵氏的。这样 P-K 弦与 N-G 弦  $\ln$  项中的算符完全一样, 避免了由外部曲率项带来的复杂算符运算。外部曲率项的影响主要体现在 P-K 弦与 N-G 弦本征态的不同。

为得到全程势, 我们按照 Alvarez 提出的目前普遍采用的按  $1/D$  展开的方法<sup>[5]</sup>求解, 这里  $D$  是时空维数, 在  $D \rightarrow \infty$  的极限下,  $W$  的鞍点值即是静态势  $V(R)$ 。对 P-K 弦, 考虑度规  $g_{ab}$  有平均涨落的情况, 本征基取固定边界条件下的解(2.14)式, 由基本的正交归一关系,

$$\frac{2}{R} \int_0^R \sin \frac{N\pi r}{R} \sin \frac{n\pi r}{R} dr = 0, \quad N \neq n$$

$$\frac{2}{R} \int_0^R \sin^2 \frac{n\pi r}{R} dr = 1. \quad (3.7)$$

我们得(3.5)式第二项为

$$\frac{D-2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \text{Tr} \ln O = -\frac{D-2}{4\pi} \pi^{1/2} \frac{\partial}{\partial \beta} \cdot B(\beta) \frac{\Gamma\left(\beta - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\beta)} S(\beta) \Big|_{\beta=0}, \quad (3.8)$$

其中  $\Lambda = cM_0 R/\pi$ ,

$$B(\beta) = \mu^{4\beta} \left(\frac{\alpha_0 M_0^2}{A}\right) \left(\frac{\alpha_1 \pi^2}{\alpha_0 R^2}\right)^{-\beta + \frac{1}{2}},$$

$$S(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} [B^2 R_0^4 n^{-2\beta+1} + (1 - B^2 R_0^4)(n^2 + \Lambda^2)^{-\beta + \frac{1}{2}}].$$

这里为消除积分与求和的发散,我们引入了任意的重整化标度  $\mu$ ,它具有能量的量纲。

当  $\beta \rightarrow 0$  时,  $S(\beta)$  的渐近形式为

$$S(\beta) = \rho(-1) + (1 - B^2 R_0^4) \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \left(\gamma + \frac{1}{2\beta}\right) + (1 - B^2 R_0^4) S_1. \quad (3.9)$$

对于大  $\Lambda$ ,  $S_1$  的渐近形式为

$$S_1 = \frac{\Lambda^2}{2} \left(\ln \frac{2}{\Lambda} - \gamma + \frac{1}{2}\right) + \rho(0)\Lambda - \rho(-1), \quad (3.10)$$

$\gamma$  为 Euler 常数,  $\gamma = 0.57721 \dots$ .

对于小  $\Lambda$ ,  $S_1$  的渐近形式为

$$S_1 = -\frac{1}{8} \rho(3)\Lambda^4 + \frac{1}{16} \rho(5)\Lambda^6 + \dots. \quad (3.11)$$

由解析正规化方法得 P-K 弦在有平均涨落时的有效势为

$$W_{P-K} = \frac{\pi(D-2)}{24R} \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{1}{2} \left( \alpha_0 \sigma_0 - \alpha_1 \sigma_1 + E + \frac{1}{E} \right) + 12\lambda \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)^{1/2} \left( F + \frac{1}{4} a \ln A - \frac{1}{4} a \ln \alpha_1 \right) \right], \quad (3.12)$$

其中  $a = 1 - B^2 R_0^4$ ,

$$F = \rho(-1) + a \left( \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 + S_1 + \frac{1}{4} \ln \frac{\mu^4 R^2}{M_0^2 \pi^2} \right). \quad (3.13)$$

将  $W_{P-K}$  对  $\sigma_0, \sigma_1, \alpha_0, \alpha_1$  求变分,得鞍点方程:

$$\alpha_0 = \frac{1 - E^2}{2AE^2} - \frac{3\lambda a}{AE} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)^{1/2},$$

$$\alpha_1 = \frac{1 - E^2}{2A} + \frac{3\lambda a E}{A} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)^{1/2}, \quad (3.14)$$

$$\sigma_0 = 12\lambda \alpha_1^{1/2} \alpha_0 \left[ F + \frac{1}{4} a \ln A - \frac{1}{4} a \ln \alpha_1 \right],$$

$$\sigma_1 = 12\lambda (\alpha_0 \alpha_1)^{-1/2} \left[ F + \frac{1}{4} a \ln A - \frac{1}{4} a \ln \alpha_1 \right] - 6\lambda a (\alpha_0 \alpha_1)^{-1/2}.$$

当  $\Lambda > 1$  时, 令

$$\sigma_0 = \Sigma_0 + \Sigma_1 \frac{1}{\Lambda} + \Sigma_2 \frac{1}{\Lambda^2} + \dots, \quad \sigma_1 = \Sigma'_0 + \Sigma'_1 \frac{1}{\Lambda} + \Sigma'_2 \frac{1}{\Lambda^2} + \dots. \quad (3.15)$$

代入方程求解, 最后得大  $R$  ( $R > \frac{\pi}{eM_0}$ ) 时, 静态夸克势为:

$$\begin{aligned} V(R) = & M_0^2 R \left[ 1 + \frac{(D-2)ae^2}{2\pi} \left( \frac{1}{4} - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{eM_0 R} \right) \right] \\ & - \frac{(D-2)a}{4} eM_0 - \frac{\pi(D-2)}{24R} + \frac{\pi(D-2)}{24R} \\ & \cdot a \left( 6\gamma - \frac{1}{2} - 6 \ln 2 + 6 \ln \frac{\mu^2}{eM_0^2} - 6 \ln \frac{\pi}{eM_0 R} \right) \\ & + \frac{\pi^2(D-2)a}{8geM_0} \frac{1}{R^2} - \frac{\pi^3(D-2)}{16ge^2M_0^2R^3} \left[ 4\rho(-1) + a \right. \\ & \left. \cdot \left( 2\nu + \frac{4}{3} - 2 \ln 2 + 2 \ln \frac{\mu^2}{eM_0^2} - 2 \ln \frac{\pi}{eM_0 R} \right) \right], \quad (3.16) \end{aligned}$$

其中

$$g = \frac{1}{4} - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\Lambda}.$$

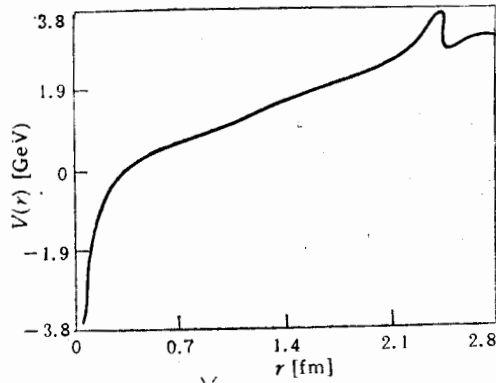


图1 P-K弦静态势能曲线  
 $M_0 = 0.44 \text{ GeV}$ ,  $e = 1$ ,  $a = 0.04$ .

当  $\Lambda < 1$  时, 令

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \Sigma_0 + \Sigma_1 \Lambda + \Sigma_2 \Lambda^2 + \dots, \\ \sigma_1 &= \Sigma'_0 + \Sigma'_1 \Lambda + \Sigma'_2 \Lambda^2 + \dots. \end{aligned} \quad (3.17)$$

求解鞍点方程, 最后得小

$$R \left( R < \frac{\pi}{eM_0} \right)$$

时的静态夸克势为

$$\begin{aligned} V(R) = & M_0^2 R - \frac{\pi(D-2)}{24R} \\ & + \frac{\pi(D-2)}{24R} a \left[ 3 + 12 \left( \frac{\gamma}{2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \ln \frac{\mu^2}{e^2 M_0^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{2}{\Lambda} \right) \right] \\ & - \frac{(D-2)a}{16\pi^3} \xi(3) e^4 M_0^4 R^3. \quad (3.18) \end{aligned}$$

其势能曲线如图1所示。

以下我们将用所得势具体计算  $c\bar{c}$ 、 $b\bar{b}$ 、 $t\bar{t}$  谱及其轻子衰变宽度, 确定参数, 检验模型。

#### 四、 $c\bar{c}$ 、 $b\bar{b}$ 、 $t\bar{t}$ 束缚态

按照文献<sup>[10]</sup>的方法, 由非相对论模型计算出  $c\bar{c}$ 、 $b\bar{b}$  的谱结构及其轻子衰变宽度, 结

表 1  $c\bar{c}$  谱: 质量、速度、均方根半径拟合参量  $\alpha = 0.04$   $m_c = 1.289\text{GeV}$   $M_0 = 0.44\text{GeV}$ 

State	Exp. <sup>[11]</sup> (MeV)	Mass(MeV)	$\langle v^2/c^2 \rangle$	$\langle r^2 \rangle^{1/2}(\text{fm})$
1s	3096.9±0.1	3096.4(fit)	0.240	0.463
2s	3686±0.1	3704.2	0.354	0.878
3s		4182.7	0.478	1.193
4s		4600.6	0.557	1.504
1p	3509.9±0.5	3506.8	0.127	0.703
2p		4000.2	0.285	1.056
3p		4437.3	0.409	1.361
1D		4256.3	0.258	1.208

表 2  $b\bar{b}$  谱: 质量、速度、均方根半径拟合参量  $\alpha = 0.04$   $M_0 = 0.44\text{GeV}$   $m_b = 4.7\text{GeV}$ 

State	Exp. <sup>[11]</sup> (MeV)	Mass(MeV)	$\langle v^2/c^2 \rangle$	$\langle r^2 \rangle^{1/2}(\text{fm})$
1s	9460.32±0.22	9461.23(fit)	0.076	0.229
2s	10023.30±0.31	9987.73	0.074	0.514
3s	10355.3±0.5	10326.05	0.089	0.745
4s	10580.0±3.5	10606.69	0.106	0.938
5s	10865±8	10863.30	0.127	1.093
1p	9900.6±0.71	9889.97	0.026	0.416
2p	10260.6±0.63	10235.92	0.053	0.662
3p		10521.43	0.074	0.867
1D		10123.68	0.019	0.554
2D		10418.82	0.046	0.777

表 3  $c\bar{c}s$  态轻子衰变宽度  $m_c = 1.289\text{GeV}$   $\Gamma_{cc}(ns)/\Gamma_{cc}(1s)$ 

n	Exp. <sup>[11]</sup>	Our model	Buchmuller <sup>[12]</sup>
2	0.45±0.08	0.54	0.46
3	0.16±0.04	0.38	0.32
4	0.11±0.04	0.29	0.25

表 4  $b\bar{b}s$  态轻子衰变宽度  $m_b = 4.7\text{GeV}$   $\Gamma_{cc}(ns)/\Gamma_{cc}(1s)$ 

n	Exp. <sup>[11]</sup>	Our model	Buchmuller <sup>[12]</sup>
2	0.46±0.03	0.41	0.44
3	0.33±0.03	0.31	0.32
4	0.23±0.03	0.26	0.26

果列于表 1—表 4。

我们取了  $m_s$  为 50GeV—120GeV 的值进行计算, 结果表明, 为了使  $\langle v^2/c^2 \rangle$  值自恰地满足非相对论性,  $m_s$  的值应大于 120GeV,  $M_0^2$  为 100GeV<sup>2</sup> 左右。表 5 是一组理想的计算结果。

表5  $t\bar{t}$ :  $\alpha = 0.04$   $1/M_0 = 0.1\text{GeV}^{-1}$   $m_c = 120\text{GeV}$ 

State	Mass(GeV)	$\Gamma_{cc}(ns)/\Gamma_{cc}(1s)$	$\langle v^2/c^2 \rangle$	$\langle r^2 \rangle^{1/2}(\text{fm})$
1s	240.2927	1.	0.071	0.009
2s	252.4484	0.40	0.066	0.021
3s	260.0151	0.30	0.078	0.031
4s	266.2334	0.26	0.091	0.039
5s	271.8384	0.24	0.108	0.046

## 五、讨 论

长程库仑项系数与对  $c\bar{c}$  的实际拟合参数不符,是以前弦模型的一个重要缺点。由于我们考虑 P-K 弦一般本征解的结果,库仑项中除原来的 Lüscher 普适系数外,还增加了参数  $a$  的影响。通过协同调节  $a, M_0$  及  $m_c, m_b$ , 我们得到一个与  $c\bar{c}, b\bar{b}$  谱符合得很好的势。另外,在长程范围内,由于  $1/R^2$  和  $1/R^3$  项分母中的  $g(R)$  函数在  $R \rightarrow R_c$  时,  $g(R) \rightarrow 0$ , 产生一奇点。在  $V(R)$  图上有一超出线性的突变,如图1所示。这和 QCD 导出的势能曲线<sup>[12]</sup>是一致的。

严格说来,按  $1/D$  展开的方法不是没有局限性的。第三章的结果要在  $D$  很大时才严格成立,并且确保涨落可以忽略。然而第四章的计算实际取了  $D = 4$ 。即使这样,我们仍然有理由相信,整个图象描述了我们这个系统的主要性质。

## 参 考 文 献

- [1] A. M. Polyakov, *Nucl. Phys.*, **B268**(1986), 406.
- [2] H. Kleinert, *Phys. Lett.*, **B174**(1986), 335.
- [3] T. L. Curtright et al., *Phys. Rev.*, **D34**(1986), 3811.
- [4] E. Braaten et al., *Phys. Rev.*, **D36**(1987), 3102.
- [5] E. Eichten et al., *Phys. Rev.*, **D21**(1980), 203.
- [6] X. Zhou, *Phys. Lett.*, **B238**(1990), 205.
- [7] F. Alonso et al., *Nucl. Phys.*, **B233**(1987), 393.
- [8] M. Luscher *Nucl. Phys.*, **B180**(1981), 317.
- [9] O. Alvarez, *Phys. Rev.*, **D24**(1981), 440.
- [10] E. Eichten et al., *Phys. Rev.*, **D17**(1978), 3090.
- [11] J. J. Hernandez et al., *Phys. Lett.*, **B239**(1990).
- [12] W. Buchmuller et al., *Phys. Rev.*, **D24**(1981), 132.



## Static Quark Potential Study for Polyakov Kleinert String

JIANG TAO

(Foundation Department, Sichuan Building Material College, Mianyang 621002)

HU SHIKE

(Department of Physics, Sichuan University, Chengdu 610064)

### ABSTRACT

By considering the  $g_{ab}$  as an independent field, we have derived a covariant Polyakov string equation. The general eigenfunctions in the case of the free and fixed boundary conditions to this equation are obtained. By evaluating the trace of the fixed eigenfunctions and expanding to the leading order in  $1/D$  expansion, we have obtained the heavy quark potential. The numerical results of  $\psi$  and  $\gamma$  families including energy levels, leptonic widths etc., are in good agreement with experiment. Furthermore, we have calculated the energy levels and leptonic widths of  $(tt)$  in a wide range of  $t$  quark mass ( $50\text{GeV}\sim 120\text{GeV}$ ).