第16卷 第5期　　高能物理与核物理　　Vol. 16, No. 5
1992年5月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　May, 1992

$SU(2)$ 与 $SU(3)$ 自偶 Yang-Mills 自由源场方程的完全可积系统的研究

李 富 斌*
(中国矿业大学数力系,徐州 221008)

摘　　要

本文借助调和映射理论用八维 Rieman 流形描述了 $SU(2)$ 与 $SU(3)$ 自偶 Yang-Mills 自由源场方程的完全可积系统。确定了16个独立的 Killing 矢量场;构造了解到解映射的两个变换群;并据逆散射方法提出并阐述了关于该系统完全可积性的猜想.

一、引　　言

1981年, Xanthopulos 曾用一种适当的 Rieman 流形的调和映射理论描述过 $SU(2)$ 与 $SU(3)$ 自偶 Yang-Mills 场方程;并由此描述得出了如下三点结论[1]:

(i) 依据 $SU(2)$ 与 SU(3) 自偶 Yang-Mills 方程可用度规R描述的信息,则在其坐标图 $\{f^a\}=(u,v,x_1,x_2,y_1,y_2,w_1,w_2)$ 中,便可用 Rieman 流形 (N,g'_{ab}) 中的线元将文献[1]中的方程(14)进行编码,并写成下式:

$$ds^2=g'_{ab}(df^a)(df^b)=\frac{1}{u^2}(du)^2+\frac{1}{v^2}(dv)^2-\frac{1}{uv}(du)(dv)$$
$$+\frac{u}{v^2}(dy_1)(dy_2)+\left(\frac{y_1y_2}{uv}+\frac{v}{u^2}\right)(dx_1)(dx_2)$$
$$-\frac{y_1}{uv}(dx_1)(dw_2)-\frac{y^2}{uv}(dw_1)(dw_2)+\frac{1}{uv}(dw_1)(dw_2), \tag{1}$$

(ii) 由 (N,g'_{ab}) 的 Killing 矢量场可给出其无穷小变换及 (N,g'_{ab}) 有限变换的等矩[2],该等矩可由文献[1]中的方程(14)的解生成通解.

(iii) 由 (N,g'_{ab}) 的测地线给出了依赖于文献[1]中方程(14)的解的某些泛函.贯穿本文始终的测地线均意味着仿射参数化. 注意结论(ii)和(iii)是相互关联的:即由 Killing 矢量场可导出其测地线运动的常数;该常数对于测地线的明确测定又是十分有用的.

本文的目的有两个:第一.给出 Rieman 流形 (N,g'_{ab}) 的十六个线性独立 Killing

本文1991年6月5日收到.
* 中国高科技中心(世界实验室),北京 100080.

矢量场的明显确定式。第二. 依据逆散射方法提出了存在适用于 $SU(2)$ 与 $SU(3)$ 自偶 Yang-Mills 自由源场方程的完全可积系统的猜想,并对此作了系统的阐述；提出了证实此种猜想正确性的理论依据——存在某些具有完全可积性的偏微分方程系统.

二、$SU(2)$ 与 $SU(3)$ 自偶 Yang-Mills 场方程的完全可积系统的描述

(N, g'_{ab}) 的十六个线性独立 Killing 矢量场分别为:

$$\left.\begin{aligned}
A_1^a &= (0,0,1,0,0,0,0,0),\\
A_2^a &= (0,0,0,1,0,0,0,0),\\
B_1^a &= (0,0,0,0,0,0,1,0),\\
B_2^a &= (0,0,0,0,0,0,0,1),\\
K_1^a &= (-ux_2, 0, u^2v^{-1}, -x_2^2, 0, x_2y_2 - w_2, u^2v^{-1}y_1, -x_2w_2),\\
K_2^a &= (-ux_1, 0, -x_1^2, u^2v^{-1}, x_1y_1 - w_1, 0, -x_1w_1, u^2v^{-1}y_2),\\
\Lambda_1^a &= (-uw_2, v(x_2y_2 - w_2), u^2v^{-1}y_2, -x_2w_2, -v^2u^{-1}x_2,\\
&\qquad y_2(x_2y_2) - w_2, uv + u^2v^{-1}y_1y_2, -w_2^2),\\
\Lambda_2^a &= (-uw_1, v(x_1y_1 - w_1), -x_1w_1, u^2v^{-1}y_1, y_1(x_1y_1 - w_1),\\
&\qquad -v^2u^{-1}x_1, -w_1^2, uv + u^2v^{-1}y_1y_2),\\
E_1^a &= (2u/3, v/3, 0, x_2, 0, 0, 0, w_2),\\
E_2^a &= (2u/3, v/3, x_1, 0, 0, 0, w_1, 0),\\
H_1^a &= (u/3, 2v/3, 0, 0, 0, y_2, 0, w_2),\\
H_2^a &= (u/3, 2v/3, 0, 0, y_1, 0, w_1, 0),\\
P_1^a &= (0,0,0,0,0,1,0,x_2),\\
P_2^a &= (0,0,0,0,1,0,x_1,0),\\
Q_1^a &= (0, -vy_2, 0, w_2, v^2u^{-1}, -y_2^2, 0, 0),\\
Q_2^a &= (0, -vy_1, w_1, 0, -y_1^2, v^2u^{-1}, 0, 0),
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

在上述列举的十六个 Killing 矢量场表示式中,其中，$A_i^a = (\partial/\partial x_i)^a$，$B_i^a = (\partial/\partial w_i)^a$，$i = 1, 2$；是四个明显的 Killing 矢量场,这四个场与四个可忽略的坐标 x_i，w_i，$i = 1, 2$，相关. 而其余的十二个 Killing 矢量场却并不明显出现. 事实上，既使对此十二个 Killing 矢量场进行直接的检验，但其检验结果告诉我们这十二个 Killing 矢量场依然是 Killing 矢量场；直接检验就是验证这十二个 Killing 矢量场是否满足 Killing 方程：$2\nabla_{(a}K_{b)} = \nabla_a K_b + \nabla_b K_a = 0$，以及微分算子 ∇_a 与 g'_{ab} 是否相容. 这种直接检验需要大量的涉及代数计算的结果. 只要通过研究 g'_{ab} 的测地线方程便会发现这十二个 Killing 矢量场;当对其仿射参数 s 的总导数消失为零时，便可将其中某些场的表示式写出来. 显然,对于任何测地线的矢量场 ξ^a:

$$\left.\begin{aligned}
&\xi^a = (\dot u, \dot v, \dot x_1, \dot x_2, \dot y_1, \dot y_2, \dot w_1, \dot w_2),\\
&(\cdot)\text{表示上述诸量对仿射参数 } s \text{ 的导数}
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

如果

$$d(\xi^b K_b)/ds = \xi^a \nabla_a(\xi^b K_b) = \xi^a \xi^b \nabla_a K_b = 0, \tag{4}$$

则

$$\nabla_a(K_b) = 0, \tag{5}$$

方程(5)意味着 K_a 是一个 Killing 矢量场. 由于任何两个 Killing 矢量场的对易子 $[K^a, \Lambda^a] = K^m \nabla_m \Lambda^a - \Lambda^m \nabla_m K^a$ 仍是一个 Killing 矢量场, 故可借助其对易子与已知场进行对易, 便可求得其余的 Killing 矢量场. 不过我们必须在此注意如下的事实: 虽然我们无法证明我们是否已经发现了度规 g'_{ab} 的所有的 Killing 矢量场, 但我们可由如下的(6)式所示的对易子关系式得出如下的结论: 由(2)式所示的十六个 Killing 矢量场构成了一个十六维的李代数 L. L 的结构是由如下的对易关系式(6)来确定:

$$\left.\begin{aligned}
&[A_\alpha, E_\beta] = A_\alpha,\ [A_\alpha, K_\beta] = H_\beta - 2E_\beta,\ [A_\alpha, P_\beta] = B_\alpha,\\
&[B_\alpha, E_\beta] = B_\alpha,\ [A_\alpha, \Lambda_\beta] = -Q_\beta,\ [B_\alpha, Q_\beta] = A_\alpha,\\
&[B_\alpha, H_\beta] = B_\alpha,\ [B_\alpha, K_\beta] = -P_\beta,\ [P_\alpha, Q_\alpha] = E_\alpha - 2H_\alpha,\\
&[K_\alpha, E_\alpha] = K_\alpha,\ [B_\alpha, \Lambda_\beta] = -(E_\beta + H_\beta),\ [P_\alpha, H_\alpha] = P_\alpha,\\
&[\Lambda_\alpha, E_\alpha] = -\Lambda_\alpha,\ [K_\alpha, Q_\alpha] = -\Lambda_\alpha,\ [Q_\alpha, H_\alpha] = -Q_\alpha,\\
&[\Lambda_\alpha, H_\alpha] = -\Lambda_\alpha,\ [\Lambda_\alpha, P_\alpha] = -K_\alpha;
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

在此结果中, 下标 α 与 β 的取值为 1 和 2. 当 α 与 β 均出现在同一表示式中时, 则 $\alpha \neq \beta$, 且 α 与 β 的重复出现并不意味着求和. 在(6)式中, 未列举出的 L 的其余对易子均等于零. 显然, 李代数 L 拥有三个四维的阿贝耳子代数, 这三个阿贝尔子代数是由 $\{A_\alpha, B_\alpha, \alpha = 1,2\}$, $\{K_\alpha, \Lambda_\alpha, \alpha = 1,2\}$ 和 $\{E_\alpha, H_\alpha, \alpha = 1,2\}$ 所生成.

由 Killing 矢量场可直接导出如下的无穷小变换:

$$f^a \to \tilde{f}^a = f^a + \varepsilon K^a(f^b) + O(\varepsilon^2), \tag{7}$$

依据上式中参数 ε 的情况可知上式是一阶的, 表示将解映射到文献[1]中方程(14)的解上; 其中的 K^a 是诸 Killing 矢量场的任意恒定的线性组合的逆变分量. 此外, 我们能够由(2)式所示的 Killing 矢量场生成某些等矩的指数显式[1], 并能求得解到解映射的精确变换式; 由 Killing 矢量场 $\alpha_1 K_2 + \alpha_2 K_1$ 可求得如下的变换式:

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{u} = \Omega^{-1} u,\\
&\tilde{v} = v,\\
&\tilde{x}_1 = \Omega^{-1}[x_1 + \alpha_2(x_1 x_2 + u^2 v^{-1})],\\
&\tilde{y}_1 = y_1 + \alpha_1(x_1 y_1 - w_1),\\
&\tilde{w}_1 = \Omega^{-1}[w_1 + \alpha_2(x_2 w_1 + y_1 u^2 v^{-1})],\\
&\Omega = 1 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 \alpha_2(x_1 x_2 + u^2 v^{-1}),
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

由 Killing 矢量场 $\alpha_1 \Lambda_2 + \alpha_2 \Lambda_1$ 又可求得如下的变换式:

$$\begin{aligned}
&\tilde{u} = P^{-1} u,\\
&\tilde{v} = Q^{-1} v,\\
&\tilde{x}_1 = x_1(\rho_1 - 1)(\rho_1 P)^{-1},\\
&\tilde{w}_1 = P^{-1}(w_1 + \alpha_2(w_1 w_2 + y_1 y_2 u^2 v^{-1} + uv)],\\
&\tilde{y}_1 = \frac{\rho_1}{x_1(\rho_1 - 1)Q}\{x_1 y_1 + \alpha_2[x_1 y_1(2w_2 - x_2 y_2) + u^2 y_1 y_2 v^{-1} - v^2 x_1 x_2 u^{-1}]
\end{aligned}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&+\alpha_2^2[w_2(x_1y_1w_2+y_1y_2u^2v^{-1}-x_1x_2v^2u^{-1})\\
&\quad -x_2y_2(x_1y_1w_2+y_1y_2u^2v^{-1}+uv)]\},\\
P&=1+\alpha_1w_1+\alpha_2w_2+\alpha_1\alpha_2(w_1w_2+y_1y_2u^2v^{-1}+uv),\\
Q&=P-\alpha_1x_1y_1(1+\alpha_2w_2)-\alpha_2x_2y_2(1+\alpha_1w_1)\\
&\quad+\alpha_1\alpha_2(x_1x_2v^2u^{-1}-y_1y_2u^2v^{-1}+x_1x_2y_1y_2),\\
A&=\alpha_1\alpha_2u(y_1y_2u^2v^{-1}+x_1x_2w_1w_2vu^{-2}+x_1y_1w_2+x_2y_2w_1),\\
B&=(\alpha_1w_1+\alpha_2w_2)x_1x_2vu^{-1}+u(\alpha_1x_1y_1+\alpha_2x_2y_2),\\
\Gamma&=x_1x_2vu^{-1},
\end{aligned}\right\}\quad(9)
$$

其中，ρ_1 和 ρ_2 是方程 $A\rho^2+B\rho+\Gamma=0$ 的两个根，α_1 和 α_2 为任意常数． 在方程(8)和(9)中没有列举出的变量 $\tilde{x}_2$，$\tilde{y}_2$，$\tilde{w}_2$ 可通过交换下标 1 和 2，并由 $\tilde{x}_1$，$\tilde{y}_1$，$\tilde{w}_1$ 的表示式求得．当其常数 α_1 和 α_2 为复共轭时，该变换仍然保持了相应于 Yang-Mills 场的纯洁性．但是，我们应当指出：我们无法预知由这些变换式是否可导出其物理学特解或者由一个规范变换是否可导出一个与原解有关的解．

利用如(2)式所示的十六个 Killing 矢量场，我们便可直接求得测地线运动的如下式所示的十六个积分：

$$
\left.\begin{aligned}
2a_\alpha&=vu^{-2}\dot{x}_\beta-y_\alpha(uv)^{-1}(\dot{w}_\beta-y_\beta\dot{x}_\beta),\\
2b_\alpha&=(uv)^{-1}(\dot{w}_\beta-y_\beta\dot{x}_\beta),\\
2k_\alpha&=-2x_\beta u^{-1}\dot{u}+x_\beta v^{-1}\dot{v}-vu^{-2}x_\beta^2\dot{x}_\alpha+uv^{-2}(x_\beta y_\beta-w_\beta)\dot{y}_\alpha+\dot{x}_\beta\\
&\quad+x_\beta(x_\beta y_\beta-w_\beta)(uv)^{-1}(\dot{w}_\alpha-y_\alpha\dot{x}_\alpha),\\
2\lambda_\alpha&=-(x_\beta y_\beta+w_\beta)u^{-1}\dot{u}+(2x_\beta y_\beta-w_\beta)v^{-1}\dot{v}-vu^{-2}x_\beta w_\beta\dot{x}_\alpha\\
&\quad+(x_\beta y_\beta-w_\beta)w_\beta(uv)^{-1}(\dot{w}_\alpha-y_\alpha\dot{x}_\alpha)+uv^{-2}y_\beta(x_\beta y_\beta-w_\beta)\dot{y}_\alpha\\
&\quad+\dot{w}_\beta-x_\beta\dot{y}_\beta,\\
2\varepsilon_\alpha&=u^{-1}\dot{u}+vu^{-2}x_\beta\dot{x}_\alpha+(w_\beta-x_\beta y_\beta)(uv)^{-1}(\dot{w}_\alpha-y_\alpha\dot{x}_\alpha),\\
2\eta_\alpha&=v^{-1}\dot{v}+uv^{-2}y_\beta\dot{y}_\alpha+w_\beta(uv)^{-1}(\dot{w}_\alpha-y_\alpha\dot{x}_\alpha),\\
2p_\alpha&=uv^{-2}\dot{y}_\alpha+x_\beta(uv)^{-1}(\dot{w}_\alpha-y_\alpha\dot{x}_\alpha),\\
2q_\alpha&=y_\beta u^{-1}\dot{u}-2y_\beta v^{-1}\dot{v}+w_\beta vu^{-2}\dot{x}_\alpha-uv^{-2}y_\beta^2\dot{y}_\alpha+\dot{y}_\beta\\
&\quad-y_\beta w_\beta(uv)^{-1}(\dot{w}_\alpha-y_\alpha\dot{x}_\alpha),
\end{aligned}\right\}\quad(10)
$$

在上式中，我们曾令：

$$
\left.\begin{aligned}
a_\alpha&=A_{\alpha,m}\xi^m,\quad b_\alpha=B_{\alpha,m}\xi^m,\\
k_\alpha&=K_{\alpha,m}\xi^m,\quad \lambda_\alpha=\Lambda_{\alpha,m}\xi^m,\\
\varepsilon_\alpha&=E_{\alpha,m}\xi^m,\quad \eta_\alpha=H_{\alpha,m}\xi^m,\\
p_\alpha&=P_{\alpha,m}\xi^m,\quad q_\alpha=Q_{\alpha,m}\xi^m;
\end{aligned}\right\}\quad(11)
$$

由于对(10)式的积分并不明显地依赖于测地线的仿射参数，故(10)式中的十六个积分就不可能是独立的泛函．但是，我们能够证明(10)式中的任何十五个积分都确实是独立的．因此，我们断定：Rieman 流形 (N, g'_{ab}) 是完全可积的．为了阐明完全可积的概念，不妨给出完全可积的明确定义：当其流形的测地线可明确确定为完全可积时，我们就把具有度规的这种流形叫做完全可积的．而当其测地线的积分可简化为纯粹的积分时，即等效于当其测地线的积分分别具有 $2n-1$ 个和 n 个整体运动积分（n 为流形的维数）时，我们

便把具有度规的此种流形叫做简单可积的. 最后,还应当注意,我们可由(10)式的积分直接写出文献[1]中 $SU(2)$ 与 $SU(3)$ 自偶 Yang-Mills 场方程(14)式的相应积分.

三、关于系统完全可积性的猜想

在逆散射方法的应用中所使用的"完全可积"的术语并不同于在微分几何学中所使用的"完全可积"的术语. 在逆散射情形下，当一个偏微分方程系统可容纳一个带有相容性条件的线性本征值问题时[3,4]，我们便把这个偏微分方程系统叫做完全可积的. 由"完全可积"的概念便可诱发如下的猜想: **如果存在这样一个微分方程系统,它既可用线性本征值方法加以描述,也可用 Rieman 流形的调和映射方法加以描述，则此微分方程系统便是完全可积系统;用这两种方法所定义的完全可积性的概念是等价的.**

该猜想的有效性和正确性表现在我们可由此猜想导出一个可应用逆散射方法的某类偏微分方程系统的精美的几何学特性: 当且仅当一个系统可容纳 $(2n-1)$ 个独立的 Killing 矢量场(更普遍地说，是 $(2n-1)$ 个独立的不可约简的 Killing 张量场)[5],且可用 Rieman 流形的调和映射来描述时,则此系统在逆散射方法中是可积系统.

四、证实猜想正确的理论依据

我们将给出支持这种猜想并能证实该猜想正确的依据.

(1) 稳态轴对称爱因斯坦真空场方程[6]. 用线性本征值如何求解此方程的方法已由 Maison 和 Harrison 于 1978—1979 年作过阐述[7-9]. 而且，Belinskii 和 Zakharov 于同年对此方法还进行了某些发展[10,11]. 用场的 Rieman 流形的调和映射所描述的方程是一个含有线元 $ds^2=x^{-2}[(dx)^2+(dy)^2]$ 且具有恒定纯量曲率的两维双曲面[12]. 由于此流形可容纳三个独立的 Killing 矢量场，故依照前述猜想,便可断定: 稳态轴对称爱因斯坦真空场方程系统是完全可积系统.

(2) 稳态轴对称爱因斯坦-麦克斯韦电真空场方程[13]. Aleksejev 于 1980 年曾对用线性本征值方法求解上述方程作过阐述,且对该方程的解还曾作过某些改进[14]. Kramor 等人于 1980 年曾用场的流形的调和映射方法对此方程也作过描述[15,16]. 该场的流形是一个可容纳八个线性独立的 Killing 矢量场的场,这八个线性独立的 Killing 矢量场就是 Ehlers-Harrison-Kinnersley 规范变换下的八维群的生成元[17].

(3) $SU(2)$ 与 $SU(3)$ 自偶 Yang-Mills 自由源场方程[1]. Manakov 和 Zakharov 于 1981 年曾用 $(2+1)$ 维的逆散射方法证明了此方程的可积性[18]. 此方程的辅助系统可分别用一个三维流形和一个八维流形的场流形的调和映射方法来描述. 其中的三维流形是一个含有线元 $ds^2=x^{-2}[(dx)^2+(dy)(dz)]$，且具有恒定纯量曲率的双曲面; 因为此流形可容纳 $3(3+1)/2=6$ 个独立的 Killing 矢量场，故由此流形所描述的系统也是完全可积的. 其中的八维流形是一个含有如本文(1)式所示的线元的流形,由本文所导出的前述结果便可证明用此流形所描述的系统也是完全可积的.

(4) 两维非线性 σ 模型. 借助于由 Zakharov 和 Mikhailov 所建立的普遍理论便

可证明此模型(即 σ 模型)的方程系统的完全可积性[19]. 在用调和映射方法对此模型方程的描述中，场的流形是一个单位双曲面。由于该场的流形可容纳其允许维数的最大数目的 Killing 矢量场;故用此场的流形所描述的上述模型方程系统是完全可积的。

参 考 文 献

[1] B. C., Xanthopoulous, *J. Phys.* **A14**(1981), 1445.
[2] L. R. Eisenhart, Riemannian Geemetry, Princeton, NJ, Princeton University Press, 1926.
[3] P. D. Lax, *Commun. Pure. Appl. Math.*, **21**(1968), 467.
[4] A. C. Scott, E. Y. F. Chu, D. W. Melaughlin, Proc. IEEE., **61**(1973), 1443.
[5] P. Sommers, PhD, thesis, the University of Texas at Austin, 1973.
[6] F. Ernst, *Phys. Rev.*, **167**(1968), 1175.
[7] D. Maison, *Phys. Rev. Lett.*, **41**(1978), 521.
[8] D. Maison, *J. Math. Phys.*, **25**(1979), 871.
[9] B. K. Harrison, *Phys. Rev. Lett.*, **41**(1978), 1197.
[10] V. A. Belinskii, V. E. Xakharov, *Sov. Phys. -JETP*, **48**(1978), 985.
[11] V. A. Belinskii, V. E. Zakharov, *Sov. Phys. -JETP*, **50**(1979), 1.
[12] R. A. Matzner, C. W. Misner, *Phys. Rev.*, **154**(1976), 1229.
[13] F. Ernst, *Phys. Rev.*, **168**(1968), 1415.
[14] G. A. Alekseyev, Proc. GrG, vol. **11**(1980), 231.
[15] C. Hoenselaers, *J. Math. Phys.*, **19**(1978), 539.
[16] D. Kramer, Stephani H, Mac Callum M, Herlt E, Exact Solutions of Einstein's Field Equations, Cambridge: Cup, 1980.
[17] W. Kinnersley, *J. Math. Phys.*, **14**(1973), 651.
[18] S. V. Manakov, V. E. Zakharov, *Lett. Math. Phys.*, **5**(1981), 247.
[19] V. E. Zakharov, A. V. Mikhailov, *Sov. Phys. -JETP*, **47**(1978), 1017.

Description of the Complete Integrability of the $SU(2)$ and $SU(3)$ Self-Dual Yang-Mills Source-Free Field Equations System and Further Discussions

Li Fubin

(*The Mathematical-Mechanical Department, China University of Mining Technology, Xuzhou* 221008)

Abstract

With the theory of harmonic maps and the eight-dimensional Riemannian manifold, the completely integrable $SU(2)$ and $SU(3)$ self-dual Yang-Mills source-free field equations are described. Sixteen independent Killing vector fields are determined, two transformation groups which map solutions into solutions are constructed, and a conjecture on the complete integrability of systems by the inverse scattering method is formulated.