第 15 卷 第 8 期　　高能物理与核物理　　Vol. 15, No. 8
1991 年 8 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Aug., 1991

快报

存在库仑屏蔽时的 D-D 聚变截面*

王 顺 金
(兰州大学现代物理系，730001)

摘　　要

本文推广了常用的 Gamow 公式，给出了考虑库仑屏蔽后 D-D 聚变截面的下限公式。

存在库仑屏蔽时的 D-D 反应截面，对于分析金属介质中的聚变反应具有重要的意义。通常的 Gamow 公式[1]可以分两步得到：第一步用库仑散射波函数或 WKB 方法得到位垒穿透几率；第二步用位垒穿透几率计算截面公式，然后利用实验数据把截面公式参数化。

根据修正后的 WKB 方法[2]，库仑位垒上散射的径向波函数为，

$$u_C(r) \propto \frac{1}{\sqrt{k}\,r} Q^{-\frac{1}{2}}(r) \exp\left(-\int_r^{r_1} Q(r)\mathrm{d}r\right),\ r < r_1, \tag{1}$$

其中

$$Q(r) = \left[\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\frac{ZZ'e^2}{r} - E\right) + \frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

$$r_1 = ZZ'e^2/E. \tag{3}$$

不难算出，

$$\int_r^{r_1} Q(r)\mathrm{d}r = \left(l+\frac{1}{2}\right) - \left[\frac{2\mu ZZ'e^2}{\hbar^2} r + \left(l+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2\mu E}{\hbar^2} r^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \left(l+\frac{1}{2}\right)\ln\left[\left(1 + \frac{ZZ'e^2\mu}{\hbar^2\left(l+\frac{1}{2}\right)^2} r + \sqrt{1 + \frac{2ZZ'e^2\mu r}{\hbar^2\left(l+\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{2\mu E r^2}{\hbar^2\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}}\right)\frac{r_1}{2r}\right]$$
$$+ n\left[\sin^{-1}\frac{(1 - 2Er/ZZ'e^2)}{\sqrt{1 + \left(l+\frac{1}{2}\right)^2/n^2}} + \sin^{-1}\left(1 + \left(l+\frac{1}{2}\right)^2/n^2\right)^{-1/2}\right]$$

本文 1990 年 10 月 15 日收到.
* 国家自然科学基金和国家教委博士点基金资助的项目.

$$-\left(l+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{\mu ZZ'e^2r_1}{2\hbar^2\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}\right), \tag{4}$$

其中

$$n = ZZ'e^2/\hbar v. \tag{5}$$

当考虑两个核穿透库仑位垒进入核力力程范围（10^{-12}cm）时，$r\to 0$ 的极限情况是十分重要的：

$$\int_{r\to 0}^{r_1} Q(r)dr \approx \left(l+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{r_1}{r} + 2n\sin^{-1}\left[1+\left(l+\frac{1}{2}\right)^2/n^2\right]^{-1/2}, \tag{6}$$

$$u_C(r) \xrightarrow{r\to 0} \frac{1}{\sqrt{kr}}\sqrt{\frac{r}{\left(l+\frac{1}{2}\right)}}\exp\left[-\left(l+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{r_1}{r}\right.$$

$$\left.-2n\sin^{-1}\left(1+\left(l+\frac{1}{2}\right)^2/n^2\right)^{-1/2}\right]$$

$$=\sqrt{\frac{1}{\left(l+\frac{1}{2}\right)kr_1}}\left(\frac{r}{r_1}\right)^l\exp\left[-2n\sin^{-1}\left(1+\left(l+\frac{1}{2}\right)^2/n^2\right)^{-1/2}\right]. \tag{7}$$

因此，两个核穿透库仑位垒达到核力力程以内的几率为

$$P\propto|u_C(r\to 0)|^2\sim\frac{1}{\left(l+\frac{1}{2}\right)hr_1}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{2l}\exp\left[-4n\sin^{-1}\left(1+\left(l+\frac{1}{2}\right)^2/n^2\right)^{-1/2}\right]. \tag{8}$$

上式表明，位垒穿透几率主要来自 $l=0$ 的分波，$l>0$ 的分波的贡献是高阶无穷小量。对于 $l=0$ 的分波，

$$P\propto\frac{2}{kr_1}e^{-4n\sin^{-1}(1+1/4n^2)^{-1/2}}\approx\frac{2}{kr_1}e^{-2n\pi+2}\sim\frac{C}{v}e^{-2n\pi}. \tag{9}$$

另一方面，用库仑散射的严格解算得的穿透几率为[3]，

$$P\propto|u_C(0)|^2=\frac{2\pi n}{v}e^{-2n\pi}. \tag{10}$$

因此，两种方法得到的结果是一致的。利用(9)式或(10)式计算 D-D 聚变截面并参数化后，得到 D-D 反应截面的 Gamow 公式，

$$\sigma_{D-D}=\frac{182}{E_D}\exp(-44.24/\sqrt{E_D}),\ (10^{-24}\text{cm}^2) \tag{11}$$

其中 E_D 是氘核的动能，以 keV 为单位。

考虑库仑屏蔽后，库仑势能为

$$U(r)=\frac{ZZ'e^2}{r}e^{-2r/\lambda}. \tag{12}$$

按照修正后的 WKB 方法[2]，存在库仑屏蔽时 $l=0$ 的分波的位垒穿透几率为

$$P_\lambda\propto\exp\left\{-2\int_a^b\sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\frac{ZZ'e^2}{r}e^{-2r/\lambda}-E\right)+\frac{1}{4r^2}}\,dr\right\}, \tag{13a}$$

$$= \exp\left\{-2\int_a^b \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\frac{ZZ'e^2}{r}k(r) - \tilde{E}\right) + \frac{1}{4r^2}}\,dr\right\}, \tag{13b}$$

其中 a 是两核接触时的质心距离，在 Gamow 公式中取 $a = 0$；而 $b = b(E)$ 由下式确定

$$be^{2b/\lambda} = ZZ'e^2/E. \tag{14}$$

等效能量 $\tilde{E}$ 为

$$\tilde{E} = \frac{ZZ'e^2}{b} = Ee^{2b/\lambda}. \tag{15}$$

屏蔽修正因子 $k(r)$ 为

$$k(r) = e^{-2r/\lambda} + \frac{r}{b}(1 - e^{-2b/\lambda}). \tag{16}$$

$k(r)$ 具有下述性质

$$0 < k(r) \leqslant 1, \tag{17a}$$

$$k(r) \xrightarrow{r\to 0} 1, \tag{17b}$$

$$k(r) \xrightarrow{r\to b} 1, \tag{17c}$$

其极小值为

$$r_{\min} = -\frac{\lambda}{2}\ln\left[\frac{\lambda}{2b}(1 - e^{-2b/\lambda})\right] \approx \frac{\lambda}{2}\ln\frac{2b}{\lambda}, \tag{18a}$$

$$k_{\min} \equiv k(r_{\min}) \approx \frac{\lambda}{2b}(1 - e^{-2b/\lambda})\left(1 + \ln\frac{2b}{\lambda}\right) < 1. \tag{18b}$$

从(17a)式可知，

$$\int_a^b \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\frac{ZZ'e^2}{r}k(r) - \tilde{E}\right) + \frac{1}{4r^2}}\,dr < \int_a^b \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\frac{ZZ'e^2}{r} - \tilde{E}\right) + \frac{1}{4r^2}}\,dr. \tag{19}$$

(19)式表明，在 WKB 近似下，对于 $l = 0$ 的分波，相对动能为 E 的两个核在有屏蔽的库仑位垒上的穿透几率大于相对动能为 $\tilde{E}$ 的两个核在无屏蔽的库仑位垒上的穿透几率。按照前面的方法，可以求得相对动能为 $\tilde{E}$ 的两个核通过 $l = 0$ 的分波穿透无屏蔽的库仑位垒的反应截面(见(10)式)，

$$\sigma(\tilde{E}) \propto \frac{\mu\pi ZZ'e^2}{\hbar\tilde{E}}\, e^{-\sqrt{2\mu}\pi ZZ'e^2/\hbar\sqrt{\tilde{E}_D}}. \tag{20}$$

对于 D-D 反应，相应的 Gamow 参数化公式为

$$\sigma_{D-D}(\tilde{E}_D) = \frac{182}{\tilde{E}_D}\, e^{-44.24/\sqrt{\tilde{E}_D}}. \tag{21}$$

其中等效能量

$$\tilde{E}_D = E_D e^{2b/\lambda}, \tag{22a}$$

$$be^{2b/\lambda} = 2e^2/E_D. \tag{22b}$$

设用 P_λ 计算的存在库仑屏蔽的 D-D 反应截面为 $\sigma_\lambda(E_D)$，而(21)式 $\sigma_{D-D}(\tilde{E}_D)$ 是相应的无库仑屏蔽时的反应截面。从(19)式可知，$\sigma_{D-D}(\tilde{E}_D)$ 是 $\sigma_\lambda(E_D)$ 的下限，即

$$\sigma_\lambda(E_D) \geqslant \sigma_{D-D}(\tilde{E}_D) = \frac{182}{\tilde{E}_D}\, e^{-44.24/\sqrt{\tilde{E}_D}}. \tag{23}$$

上述公式已用来估算有库仑屏蔽时的 D-D 聚变截面[4].

参 考 文 献

[1] G. Gamow, *Z. Physik*, **51**(1928), 204.
[2] R. E. Langer, *Phys. Rev.*, **51**(1937), 669.
[3] L. L. 席夫,量子力学,高等教育出版社, 1982, p161.
[4] 王顺金,科学通报, **35**(1990), 583.

Effect of Coulumb Screening on Deuterium-Deuterium Fusion Cross-Section

WANG SHUNJIN
(Department of Modern Physics, Lanzhou University 730001)

ABSTRACT

The popular Gamow formula for the deuterim–deuterium fusion cross-section is generalized to take into account the Coulumb screening effect. The generalized formula has been used to discuss the fusion process occurring in the metal medium.