第 15 卷 第 8 期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol. 15, No. 8
1991 年 8 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Aug., 1991

IBM4 中的强耦合 $SU(3)$ 极限

李 光 华
(长沙水电师院物理系，410077)

孙 洪 洲
(清华大学物理系，北京 100084)

韩 其 智
(北京大学物理系，100871)

李 先 胤
(安徽大学物理系，合肥 230039)

摘　　要

将 IBM 推广应用于轻核时叫 IBM4. 本文讨论了其中的下述群链.

$$U(36)\supset U_6(sd)\times U_6(ST)\supset SU_3(sd)\times SU_3(S)\times SU_3(T)$$
$$\supset SU_3(sdS)\times SU_3(T)\supset O_3(J)\times O_3(T)$$

的约化、典型能谱与 $E2$ 跃迁，并用它对 sd 壳的核基态进行了分类.

一、引　言

在轻核中，由于质子与中子处于同一壳，必须引入同位旋，将 IBM 推广应用于轻核就叫 IBM4[1]. 在 IBM4 中，将价核子对看成是玻色子，其轨道角动量 $l=0$ 或 2，自旋 s 与同位旋 τ 的组合为 $s=0$、$\tau=1$ 或 $s=1$、$\tau=0$，体系的最大对称性群是 $U(36)$. 它有七条可能的群链，我们已研究了其中的 $O(6)$[2]、$U(5)$ 与 $SU(3)$[3] 极限，在 $O(6)$ 极限中我们得到了偶偶核与奇奇核在一个多重态中的例子[4]. 本文研究其中的下述群链

$$U(36)\supset U_6(sd)\times U_6(ST)\supset SU_3(sd)\times SU_3(S)\times SU_3(T)$$
$$\supset SU_3(sdS)\times SU_3(T)\supset O_3(J)\times O_3(T), \tag{1}$$

它叫强耦合 $SU(3)$ 极限.

二、约化规则与典型能谱

对于一个具有 n 个玻色子的体系，$U(36)$ 的不可约表示是全对称表示 $\{n\}$. $U(36)\supset$

本文 1990 年 9 月 15 日收到.

$U_6(sd) \times U_6(ST)$ 的约化为

$$\{n\} = \sum_{\nu} [\nu]_{U_6(sd)} \times [\nu]_{U_6(ST)}, \tag{2}$$

其中 ν 是 n 的一个配分，其部份数不超过 6。

$SU_3(sd) \times SU_3(S) \supset SU_3(sdS)$ 的约化为

$$\begin{aligned}
&(\lambda_1, \mu_1) \times (\lambda_2, \mu_2) \\
&= \sum_{k=0}^{\{\lambda_1,\lambda_2\}} \sum_{l=0}^{\{\mu_1,\lambda_2-k\}} \sum_{m=0}^{t} (\lambda_1 + \lambda_2 - k - s + m + (\lambda_2 - k - l)\delta_{\lambda_2 s}\delta_{mt}, \\
&\quad \mu_1 + \mu_2 + k - l + 2(\lambda_2 - k - l)\delta_{\lambda_2 s} - 2m - 2(\lambda_2 - k - l)\delta_{\lambda_2 s}\delta_{mt}) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\{\lambda_1,\lambda_2\}} \sum_{j=1}^{\{k,\mu_2,\mu_1+\lambda_1-\lambda_2\}} \sum_{m=0}^{r} (\lambda_1 - k + m, \mu_1 + \mu_2 - \lambda_2 + 2k - 2m - 3j) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\mu_2} \sum_{l=0}^{\{\mu_2-k,\mu_1,\lambda_2\}} \sum_{m=0}^{\{\mu_2-k-l,\mu_1+\lambda_2-2l\}} (\lambda_1 - \lambda_2 - k + m, \mu_1 + \mu_2 + \lambda_2 \\
&\quad - k - 3l - 2m).
\end{aligned} \tag{3}$$

其中

$$s = \begin{cases} l, & k = 0; \\ k + l, & l = \mu_1; \\ \{\lambda_2, k + l\}, & k, l \text{ 为其他值}. \end{cases} \tag{4}$$

$$t = \{\mu_2, \mu_1 + k - l\}, \quad r = \{\mu_2 - j, \mu_1 + 2k - \lambda_2 - 2j\}, \tag{5}$$

$\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 或 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 表示取 α_1 与 α_2 或 α_1、α_2 与 α_3 中之小者。关于群链(1)的生成元及其他约化规则见文献[4]。

由于考虑了同位旋，因此具有相同玻色子数的偶偶核与奇奇核形成一个多重态。表中我们给出了 sd 壳核按玻色子数 n 与基态同位旋 T 的分类。

表 1　sd 壳核的分类

T \ n	1	2	3	4	5	
0	^{18}F	^{20}Ne	^{22}Na	^{24}Mg	^{26}Al	^{28}Si
1	^{18}O, ^{18}Ne	^{20}F, ^{20}Na	^{22}Ne, ^{22}Mg	^{24}Na, ^{24}Al	^{26}Mg, ^{26}Si	^{28}Al, ^{28}P
2	^{18}N	^{20}O	^{22}F	^{24}Ne	^{26}Na	^{24}Mg

T \ $\bar{n}$	1	2	3	4	
0	^{38}K	^{36}Ar	^{34}Cl	^{32}S	^{30}P
1	^{38}Ar, ^{38}Ca	^{36}Cl, ^{36}K	^{34}S, ^{34}Ar	^{32}P, ^{32}Cl	^{30}Si, ^{30}S
2	^{38}Cl	^{36}S	^{34}P	^{32}Si	^{30}Al

由实验数据[5]知偶偶核的基态角动量为 $J^\pi = 0^+$，对于奇奇核，有很低的 $J^\pi = 1^+$ 态。在群链(1)中，$U_6(ST) \supset SU_3(S) \times SU_3(T)$ 的约化为 $[n,0] = (n, 0) \times (0, 0) + (n-1, 0)$

$\times(1,0)+\cdots$. 对于 $SU_3(sd)\times SU_3(S)\supset SU_3(sdS)$,

当 $T=0$ 时, $(2n,0)\times(n,0)=(3n,0)+(3n-2,1)+\cdots$ (6)

当 $T=1$ 时, $(2n,0)\times(n-1,0)=(3n-1,0)+(3n-3,1)+\cdots$ (7)

对于 $SU_3(sdS)\supset O_3(J)$ 的约化,当玻色子数 n 为偶数时, $T=0$ 有 $(3n,0)=0+2+4+\cdots+3n$, 对应于偶偶核; $T=1$ 有 $(3n-1,0)=1+3+5+\cdots+(3n-1)$, 对应于奇奇核. 当 n 为奇数时,正好相反, $T=0$ 是奇奇核, $T=1$ 是偶偶核,这正是表中所显示的情况.

仅含一体和二体玻色子相互作用项的哈密顿量, 可以用群链(1)的 Casimir 算子表示为

$$H=\varepsilon_0 C_{1U(36)}+AC_{2U_6(sd)}+BC_{2SU_3(sd)}+\alpha C_{2SU_3(S)}$$
$$+\beta C_{2SU_3(sdS)}+\gamma C_{2SO_3(J)}+\alpha' C_{2SU_3(T)}+\delta C_{2SO_3(T)}. \quad (8)$$

对于 $T=0$ 的低能态, 只需考虑属于 $SU_3(sd)$ 的不可约表示 $(\lambda_1\mu_1)=(2n,0)$ 与 $SU_3(S)$ 的不可约表示 $(\lambda_2\mu_2)=(n,0)$ 的态. 这时能量本征值为

$$E=E_0+\beta[\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu+3(\lambda+\mu)]$$
$$+\gamma J(J+1). \quad (9)$$

对于 $T=1$ 的低能态, 只需考虑属于 $SU_3(sd)$ 的不可约表示 $(\lambda_1\mu_1)=(2n,0)$ 与 $SU_3(S)$ 的不可约表示 $(\lambda_2\mu_2)=(n-1,0)$ 的态. 这时能量本征值为

$$E=E'_0+\beta[\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu+3(\lambda+\mu)]$$
$$+\gamma J(J+1). \quad (10)$$

当 $n=4$ 时, 利用 (9) 式与(10)式可以分别算出基态同位旋 $T=0$ 的偶偶核(图 a, $E_0=18.9\text{MeV}$, $\beta=-0.105\text{MeV}$, $\gamma=0.174\text{MeV}$) 与 $T=1$ 的奇奇核(图 b, $E'_0=15.822\text{MeV}$) 的典型能谱.

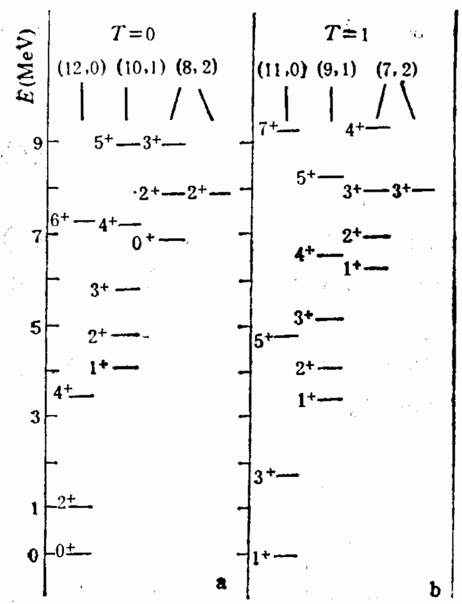

图 1 $n=4$ 的典型能谱

(圆括号内的数是 λ 与 μ 的值)

三、E2 跃迁

按群链(1)分类的 IBM4 的波函数为

$$\left|\begin{array}{l} U(36)\ U_6(sd)\ SU_3(sd)SU_3(S)SU_3(sdS)\ SO_3(J)SU_3(T)\ SO_3(T) \\ \{n\}[n_1,\cdots,n_6]\xi(\lambda_1\mu_1)(\lambda_2\mu_2)\ (\lambda\mu)\ K\ J\ (\lambda_3\mu_3)\ T \end{array}\right\rangle, \quad (11)$$

其中 ξ 与 K 是附加量子数. 波函数(11)是 $C_{1U(36)}$、$C_{2U_6(sd)}$、$C_{2SU_3(sd)}$、$C_{2SU_3(S)}$、$C_{2SU_3(sdS)}$、$C_{2SO_3(J)}$、$C_{2SU_3(T)}$ 与 $C_{2SO_3(T)}$ 的共同本征函数.

在强耦合 $SU(3)$ 极限下, E2 跃迁算符取为

$$T(E2)_q=e_2 O_q=e_2\left[Q_q+\sqrt{\frac{3}{4}}B(1010)^{20}_{q0}\right], \quad (12)$$

即 $T(E2)_q$ 正比于 $SU_3(sdS)$ 群的无穷小生成元 O_q，e_2 相当于有效电荷．由于 O_q 是由 $U(36)$、$U_6(sd)$、$SU_3(sd)$、$SU_3(S)$ 与 $SU_3(sdS)$ 的生成元构成的，又由于

$$\begin{gathered}[B(l,l')^L_M,\ B(s\tau,\ s'\tau')^{S\ T}_{M_S M_T}]=0,\\ [B(1010)^{S\ 0}_{M_S 0},\ B(0101)^{0\ T}_{0\ M_T}]=0\end{gathered}\tag{13}$$

故

$$\begin{aligned}&\langle\{n\}[n_1,\cdots,n_6](\lambda_1\mu_1)(\lambda_2\mu_2)(\lambda\mu)KJ;(\lambda_3\mu_3)T|\\ &T(E2)|\{n\}[n'_1,\cdots,n'_6](\lambda'_1\mu'_1)(\lambda'_2\mu'_2)(\lambda'\mu')K'J';(\lambda'_3\mu'_3)T'\rangle\\ &=\delta^{n_1,\cdots,n_6}_{n'_1,\cdots,n'_6}\delta^{\lambda_1\mu_1}_{\lambda'_1\mu'_1}\delta^{\lambda_2\mu_2}_{\lambda'_2\mu'_2}\delta^{\lambda,\mu}_{\lambda',\mu'}\delta^{\lambda_3\mu_3}_{\lambda'_3\mu'_3}\delta^{T}_{T'}\\ &\cdot\langle\{n\}[n_1,\cdots,n_6](\lambda_1\mu_1)(\lambda_2\mu_2)(\lambda\mu)KJ;(\lambda_3\mu_3)T|\\ &T(E2)|\{n\}[n'_1,\cdots,n'_6](\lambda'_1\mu'_1)(\lambda'_2\mu'_2)(\lambda'\mu')K'J';(\lambda'_3\mu'_3)T'\rangle,\end{aligned}\tag{14}$$

于是得到选择定则

$$\Delta\lambda=0,\ \Delta\mu=0\ 和\ \Delta T=0.\tag{15}$$

前者表明属于 $SU(3)$ 不同的不可约表示的带之间的跃迁是禁戒的，后者表示不同的同位旋态之间的跃迁也是禁戒的．利用 Elliott 波函数 $\psi((\lambda\mu)KJM)$[6]，得到 O_q 的约化矩阵元为

$$\begin{aligned}&\langle\psi(\lambda\mu)KJ\|O\|\psi(\lambda\mu)KJ'\rangle\\ &=\frac{2J'+1}{(2J+1)^{1/2}}\cdot\frac{C(KJ)}{C(KJ')}\langle J'K,20|JK\rangle\Big[2\lambda+\mu+3+\frac{1}{2}J(J+1)\\ &-\frac{1}{2}J'(J'+1)\Big]+\textstyle\sum_\pm\dfrac{2J'+1}{(2J+1)^{1/2}}\cdot\dfrac{C(K\pm2,J)}{C(K,J')}\langle J'K,2\pm2|JK\pm2\rangle\\ &\times\left[\frac{3(2\Lambda\mp K)(2\Lambda\pm K+2)}{2}\right]^{1/2}\\ &\cdot\langle\psi(\lambda\mu)KJM|\psi(\lambda\mu)K\pm2JM\rangle,\end{aligned}\tag{16}$$

其中 Elliott 系数 $C(K,J)$ 定义为[7,8]

$$a(K,J)=b(K)C(K,J),\tag{17}$$

$$b(K)=e^{-\frac{i}{2}\mu\pi}\left\{\frac{\mu!}{2^\mu\left(\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}K\right)!\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}K\right)!}\right\}^{1/2},\tag{18}$$

对于任意的 λ 值，Vergados[9] 给出了系数 $a(K,J)$ 的表达式．

当 $T=0$ 时，对于基带 $(3n,0)$，我们得到

$$B(E2,J+2\to J)=\frac{6(J+1)(J+2)(3n-J)(3n+J+3)}{(2J+3)(2J+5)}e_2^2,\tag{19}$$

对于 $(3n-2,1)$ 带，当 $3n-J=$ 偶数时，有

$$\begin{aligned}B(E2,J+1\to J)=&\frac{108n^2}{(J+1)(2J+3)}\cdot\frac{(3n+J)!!}{(3n+J-1)!!}\\ &\cdot\frac{(3n-J-3)!!}{(3n-J-2)!!}e_2^2,\end{aligned}\tag{20}$$

$$B(E2,J+2\to J)=\frac{6J(J+3)(3n-J-2)(3n+J+1)}{(2J+3)(2J+5)}e_2^2.\tag{21}$$

当 $3n-J=$ 奇数时，有

$$B(E2,J+1\to J)=\frac{12(3n-J-1)}{(J+1)(2J+3)}\cdot\frac{(3n+J+1)!!}{(3n+J)!!}\cdot\frac{(3n-J-2)!!}{(3n-J-3)!!}e_2^2, \tag{22}$$

$$B(E2,J+2\to J)=\frac{6J(J+3)(3n-J-1)(3n+J+2)}{(2J+3)(2J+5)}e_2^2. \tag{23}$$

当 $T=1$ 时，对于基带 $(3n-1,0)$ 有

$$B(E2,J+2\to J)=\frac{6(J+1)(J+2)(3n-J-1)(3n+J+2)}{(2J+3)(2J+5)}e_2^2. \tag{24}$$

对于 $(3n-3,1)$ 带，当 $3n-J=$ 偶数时，有

$$B(E2,J+1\to J)=\frac{12(3n-J-2)}{(J+1)(2J+3)}\cdot\frac{(3n+J)!!}{(3n-J-4)!!}\cdot\frac{(3n-J-3)!!}{(3n+J-1)!!}e_2^2, \tag{25}$$

$$B(E2,J+2\to J)=\frac{6J(J+3)(3n-J-2)(3n+J+1)}{(2J+3)(2J+5)}e_2^2. \tag{26}$$

当 $3n-J=$ 奇数时，有

$$B(E2,J+1\to J)=\frac{12(3n-1)^2}{(J+1)(2J+3)}\cdot\frac{(3n+J-1)!!}{(3n-J+1)!!}\cdot\frac{(3n-J)!!}{(3n+J-2)!!}e_2^2, \tag{27}$$

$$B(E2,J+2\to J)=\frac{6J(J+3)(3n-J-3)(3n+J)}{(2J+3)(2J+5)}e_2^2. \tag{28}$$

四、讨　论

由 $n=4$ 的典型能谱图可以看出，对于偶偶核，除了基带(12，0) ($J^\pi=0^+, 2^+, 4^+,\cdots$) 外，还有(10，1)带 ($J^\pi=1^+, 2^+, 3^+,\cdots$)，它的出现是 sd 空间与 S 空间耦合的结果，这正是强耦合 $SU(3)$ 极限的特征之一。在轻核中，虽然我们还没有找到强耦合 $SU(3)$ 极限的典型例子，但讨论这一极限，将有助于了解轻核中存在的近似对称性。对于轻核，一般需要用数值方法将哈密顿量对角化来处理。

参 考 文 献

[1] P. Halse, J. P. Elliott and J. A. Evans, *Nucl. Phys.*, **A417**(1984), 301.
[2] Li Guanghua, Sun Hongzhou, Han Qizhi *Commun. in Thcor, Phys.*, **7**(1987), 303.
[3] 李光华，长沙水电师院学报(自然科学版)2,1(1987),9;2,2(1987),9.
[4] Han Qizhi, Sun Hongzhou, Li Cuanghua, *Phys. Rcv.*, **C35**(1987), 786.
[5] P. M. Endt, C. Van der leun, *Nucl. Phys.*, **A310**(1978), 1.
[6] J. P. Elliott, *Proc. Roy. Soc.*, **A245**(1958), 562.
[7] 曾谨言，孙洪洲，原子核结构理论，上海科技出版社，1987，p. 242
[8] J. P. Elliott, M. Harvey, *Proc. Roy. Soc.*, **A272**(1963), 557.

[9] J. D. Vergados, *Nucl. Phys.*, A111(1968), 681.

The Strong Coupling $SU(3)$ Limit in IBM4

Li Guanghua
(*Changsha Normal University of Water Resources and Electric Power*, 410077)

Sun Hongzhou
(*Tsinghua University, Beijing* 100084)

Han Qizhi
(*Beijing University*, 100871)

Li Xianyin
(*Anhui University, Hefei* 230039)

Abstract

When the IBM is generalized and used to the case of light nuclei, it is called IBM4. In this paper, for the following group chain of the IBM4

$$U(36)\supset U_6(sd)\times U_6(ST)\supset SU_3(sd)\times SU_3(S)\times SU_3(T)$$
$$\supset SU_3(sdS)\times SU_3(T)\supset O_3(J)\times O_3(T)$$

the reduction rules, typical energy spectra and E2 transitions are discussed. Using this strong coupling $SU(3)$ limit, the nuclei in *sd* shell are classified.