

# 回弯的简单公式\*

孟 杰

(北京大学物理系, 100871)

殷传宗 林辛未

(西南师范大学物理系, 重庆 630715)

## 摘 要

用吴-曾公式描述基带,用常转动惯量公式描述超带,且引入一个唯象的带间相互作用将两个带混合,即可得到对大多数原子核晕带和次晕带较为理想的描述,还可重现转动惯量的回弯。对公式中的参数做进一步的分析后,可获得核的基态转动惯量与刚体转动惯量等信息。

## 一、引 言

自从回弯现象发现以来,已有大量的工作对转动带的性质进行描述<sup>[1-3]</sup>。在早期的工作中,通常用一个公式对实验结果进行描述<sup>[4-9]</sup>,如  $I(I+1)$  的幂展开公式, Harris 公式,可变转动惯量公式(VMI)等。随后,实验的发展促使人们引入两个甚至三个公式<sup>[10-12]</sup>。通常的作法是用 VMI 公式与描述超带的常转动惯量公式耦合。这是因为在较高角动量时,转动惯量趋于一个常数<sup>[1-3]</sup>。

最近,吴崇试和曾谨言等人从 Bohr 哈密顿量出发,导出了适合于偶偶变形核基带的两参数公式<sup>[9]</sup>

$$E(I) = a [\sqrt{1 + bI(I+1)} - 1], \quad (1)$$

并利用(1)式拟合了所有手边的实验能谱。结果表明理论与实验有惊人的一致,且其结果比 Harris 公式和 Bohr-Mottelson 公式更好。由文献[13]知,因为 Harris 公式与 VMI 等价,所以(1)式比 VMI 更好,用起来相当方便。因此,本文从(1)式出发,用它来描述基带,并引入一个尝试性的带间相互作用,使它与常转动惯量公式耦合起来描述晕带。所有参数均由拟合晕带实验值给出,由理论预言的次晕带与实验的比较可进一步验证本文模型的合理性。此外,文中还研究了核的其它性质,如基态转动惯量随不同核的变化等。

## 二、理论模型

在文献[9]中,作者从 Bohr 哈密顿量出发,采用  $\beta$  可分离变量的位能,转动动能项按

本文1991年7月11日收到。

\* 国家自然科学基金资助。

$\sin 3\gamma$  展开,并略去  $0(\sin^4 3\gamma)$  的高级小量,对偶偶变形核的基态转动带得到了如(1)式所示的二参数简单公式,它可以很好地描述带交叉之前的区域.进一步假设核绕  $x$  轴转动,则其转动惯量和转动频率分别为:

$$\mathcal{I} = I_x \left( \frac{dE}{dI_x} \right)^{-1}, \quad \hbar\omega = \frac{dE}{dI_x}. \quad (2)$$

利用(1)式和(2)式,可用  $(\hbar\omega)^2$  将转动惯量表述为:

$$\mathcal{I} = (\hbar/ab) \cdot \sqrt{1 - \frac{(\hbar\omega)^2}{a^2b}}, \quad (3)$$

在低自旋即转动频率较小时,由于  $\frac{(\hbar\omega)^2}{a^2b} \ll 1$ , 故上式即 Harris 公式.

利用(1)式描述偶偶变形核的基带,用常转动惯量公式:

$$E_x(I) = E_0 + AI(I+1), \quad (4)$$

描述超带,再引入一个尝试性的带间相互作用项<sup>[12]</sup>:

$$V = X\sqrt{I(I+1)}, \quad X > 0 \quad (5)$$

将基带与超带按照通常的作法耦合起来,即求解久期方程:

$$\begin{vmatrix} W_x - W & V \\ V & E_x - W \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

则对每一个  $I$  有

$$W_{\pm} = \frac{E_x + E_s}{2} \pm \sqrt{\frac{(E_x - E_s)^2}{4} + V^2}, \quad (7)$$

其中  $W_-(I)$  描述晕带,  $W_+(I)$  描述次晕带.此外,由公式

$$\mathcal{I}_x = I \left[ \frac{dW_-}{dI} \right]^{-1}, \quad \hbar\omega = \frac{dE}{dI} \quad (8)$$

可研究晕带的转动惯量随角动量或转动频率的变化,以验证此模型是否可重现回弯.

用(1)式中的  $E_x$  取代(8)式中的  $W_-$ ,可导出偶偶核基态带的转动惯量为:

$$\mathcal{I}_x = \frac{\hbar}{ab} \sqrt{1 + bI(I+1)}, \quad (9)$$

显然,  $\frac{\hbar}{ab}$  即为  $I = 0$  时的转动惯量,由此即可对模型的合理性进行检验.

此外,晕带公式中的两个参数  $E_0$  和  $A$  分别为超带的带首能量以及超带转动惯量倒数的一半.它们也由(7)式拟合实验值后定出.下节将看到,本文的理论模型不仅与实验符合得很好,而且还有助于了解原子核的其它信息.

### 三、计算结果和讨论

利用上节(7)式给出的晕带公式,我们拟合了所有偶偶变形核的实验晕带能谱.<sup>164</sup>Er, <sup>166</sup>Hf, <sup>168</sup>Hf, <sup>178</sup>Os, <sup>180</sup>Os, <sup>182</sup>Os 等核的数据取自文献[16—20].它不仅给出了较为完整的晕带,而且还给出了目前所能测到的一些次晕带能谱.其余的数据均取自文献[3]和

[15].

拟合参数时, 首先用回弯以下(远离回弯)的晕带数据拟合出(1)式中的  $a$  和  $b$ , 然后再用回弯以上(远离回弯)的晕带数据定出(4)式中的  $E_0$  和  $A$ , 相互作用项中的参数  $X$  由下式

$$X = \frac{1}{\sqrt{I(I+1)}} \sqrt{\left[ \frac{E_g + E_i}{2} - E_{ex} \right]^2 - \frac{(E_g - E_i)^2}{4}} \quad (10)$$

定出. 其中  $E_{ex}$  表示回弯附近的晕态能量. 这样做的原因是根据目前较为流行的带交叉观点, 以及带间相互作用仅对回弯处有较大影响, 所以回弯下面较低自旋的态可视为纯

表 1 理论上的晕带和次晕带与相应的实验结果的比较: a)  $^{164}\text{Er}$ , b)  $^{166}\text{Hf}$

$^{164}\text{Er}_{9,6}$

$I$	Yrast-band		Yrare-band		Pure-band		Parameter
	$E_{ex}$	$E_{th}$	$E_{ex}$	$E_{th}$	$E_{gb}$	$E_{tb}$	
2	91.4	90.9		1246.1	90.9	1246.1	$a = 7319.6(\text{keV})$
4	299.5	298.5		1351.5	298.8	1351.5	$b = 0.0042$
6	614.4	614.4		1517.0	614.5	1517.0	$E_0 = 1201.1(\text{keV})$
8	1024.6	1025.7		1742.7	1025.7	1742.7	
10	1518.1	1519.2		2028.7	1519.2	2028.7	$A = 7.52(\text{keV})$
12	2082.8	2081.9	2519.3	2374.8	2082.0	2374.8	
14	2702.6	2702.2	2874.8	2781.3	2702.4	2781.1	$X = 0.29(\text{keV})$
16	3263.1	3247.4	3411.2	3370.6	3370.4	3247.6	
18	3768.6	3774.2	4121.2	4077.7	4077.6	3774.2	实验数据取自[16]
20	4345.7	4361.1	4868.4	4817.3	4817.3	4361.1	
22	5000.1	5008.1	5651.5	5583.8	5583.7	5008.2	
24	5729.1	5715.4		6372.5	6372.5	5715.5	

$^{166}\text{Hf}_{9,4}$

$I$	Yrast-band		Yrare-band		Pure-band		Parameter
	$E_{ex}$	$E_{th}$	$E_{ex}$	$E_{th}$	$E_{gb}$	$E_{tb}$	
2	158.7	150.1		1300.8	150.2	1300.8	$a = 2231.3(\text{keV})$
4	470.7	468.2		1415.2	468.2	1415.2	$b = 0.0232$
6	897.4	903.4		1595.0	903.5	1594.9	$E_0 = 1251.7(\text{keV})$
8	1407.0	1414.1		1840.3	1414.3	1840.1	
10	1972.8	1972.4		2151.3	1973.1	2150.5	$A = 8.17(\text{keV})$
12	2567.2	2522.5	2736.0	2567.2	2563.1	2526.5	
14	3010.8	2966.8	3191.8	3175.3	3174.3	2967.8	$X = 1.03(\text{keV})$
16	3450.9	3473.6	3837.6	3800.9	3800.1	3474.5	
18	4011.3	4045.6	(4500.4)	4437.3	4436.4	4046.5	实验数据取自[17]
20	4673.7	4582.8		5081.6	5080.5	4683.9	
22	5412.8	5385.2		5732.0	5730.4	5386.7	

注: 表中能量数据的单位均为 keV.

基带,上面较高自旋的态可视为纯超带。

在表1中,给出了 $^{164}\text{Er}$ 和 $^{166}\text{Hf}$ 的晕带,次晕带能谱与相应实验结果的比较。其中第二列为理论与实验晕带的比较,第三列为理论与实验次晕带的比较。理论值是根据上述方法定出 $a, b, E_0, A$ 和 $X$ 后,用(7)式的晕带公式 $W_-(I)$ 和次晕带公式 $W_+(I)$ 计算得出的。从表中可以看出,理论与实验符合得相当好。虽然实验上仅测得几个次晕带能级,但我们还是给出了全部的理论数据,以资能在实验上有助于发现和确定新的次晕带数据。第四列还从理论上给出了纯的基带和超带数据。从它可以看出带间相互作用对基带和超带的影响。显然,除了带交叉(或回弯)区域,带间相互作用的影响基本上可以忽略。

图1为 $^{168}\text{Hf}$ , $^{180}\text{Os}$ 和 $^{182}\text{Os}$ 的晕带、次晕带能谱图。从图上可以看出;理论与实验结果符合得相当好。特别是对 $^{168}\text{Hf}$ 核,即使角动量高达 $34\hbar$ ,理论和实验值仍相当一致。其它的偶偶变形核的情况也与此类似。这里选择此三个核为例,是因为此三个核不仅有比较完整的晕带,还包括了一些次晕带数据,可以很好地检验本文的理论。

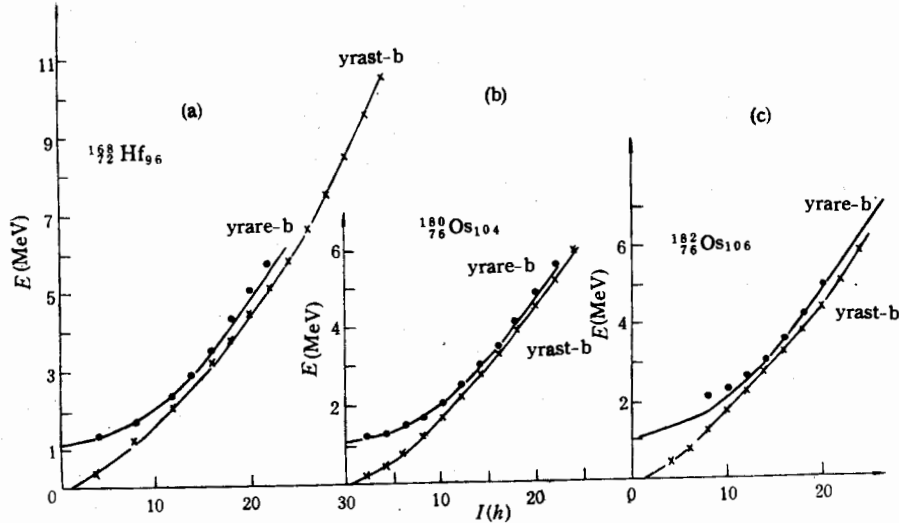


图1  $^{168}\text{Hf}$ ,  $^{180}\text{Os}$  和  $^{182}\text{Os}$  转动带能量的理论和实验比较,  
其中实线表示理论计算结果

×表示晕带实验数据,○表示次晕带实验数据

图2为 $^{158}\text{Dy}$ , $^{164}\text{Er}$ , $^{166}\text{Yb}$ , $^{168}\text{Hf}$ , $^{174}\text{W}$ 和 $^{182}\text{Os}$ 的回弯图,即转动惯量 $\mathcal{I}$ 对旋转频率平方 $(\hbar\omega)^2$ 做的图。实线表示理论结果,×表示实验数据。理论值是用上面定出的参数,由(8)式计算而得。此六个核有较明显的回弯。图2说明理论公式能很好地重现实验结果,证明了两带交叉模型的合理性,以及本文采用的公式的合理性。

由公式(9),我们知道 $\hbar^2/ab$ 是基态的转动惯量,由于带间相互作用对回弯附近区域有较大影响,对于偏离回弯区较远的基态,它的影响几乎可以忽略不计。所以可取 $\hbar^2/ab$ 作为定性描写基态转动惯量的公式。利用上面拟合实验数据时定出的 $a$ 和 $b$ 则可得到如图3所示的 $\mathcal{I}_g = \hbar^2/ab$ 。从图中可以看出,它们对于某个同位素, $\mathcal{I}_g$ 皆随质量数 $m$ 的增加而变大,仅对钷同位素有轻微涨落,这与文献[21]中给出的实验结果一致。

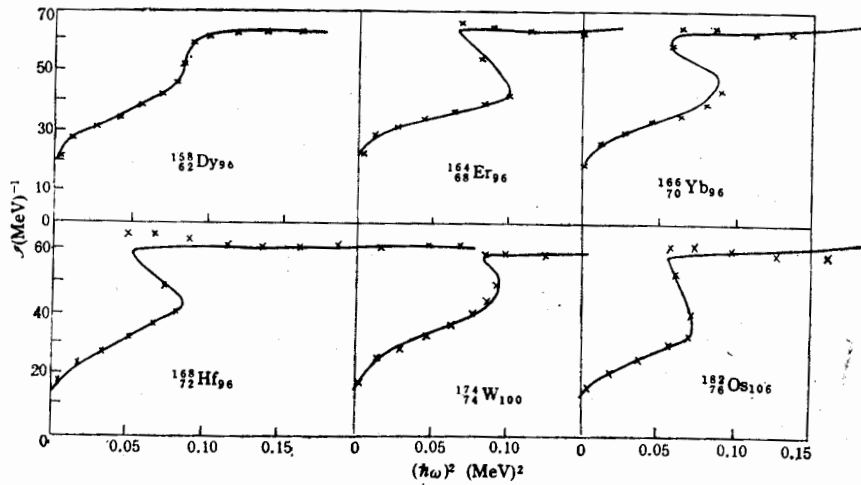


图 2  $^{158}\text{Dy}$ ,  $^{164}\text{Er}$ ,  $^{166}\text{Yb}$ ,  $^{168}\text{Hf}$ ,  $^{174}\text{W}$  和  $^{182}\text{Os}$  的回弯图

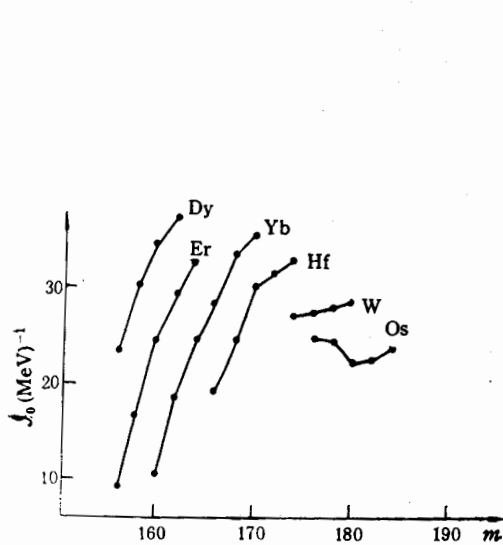


图 3  $J_0 = \hbar^2/ab$  对质量数  $m$  的关系图

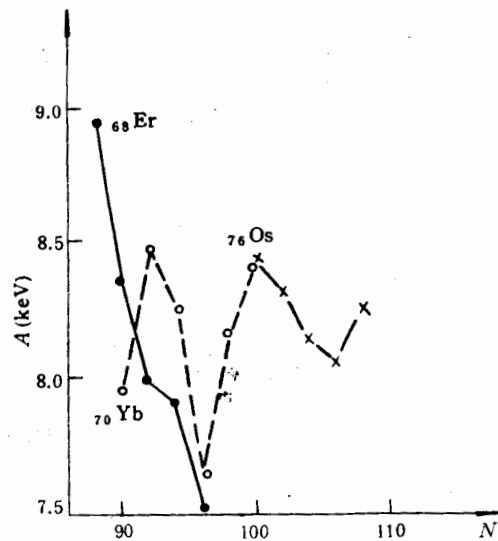


图 4 铒、镱和铱三种同位素的  $A$  随中子数的变化

在图 4 中是由(4)式给出铒、镱、铱同位素的  $A$  随中子数的变化。从图中可以看出;对于铒同位素,随着中子数的增加,  $A$  单调地减少。但对镱则有较大的涨落。当  $N = 100-106$  时,铱同位素的  $A$  随  $N$  的增加单调地减少,但  $N = 108$  却变大。对于稀土区的所有偶偶变形核,  $A$  的值在 7.5 至 9 keV 之间,这与文献[12]中给出的 7 至 9 keV 相一致。

总之,利用简单的二参数公式(1)式描述基带,用常转动惯量公式(4)描述超带,并引入一个唯象的带间相互作用后,即可导出晕带和次晕带的简单公式。它能对实验结果进行满意的描述,而且还可再现回弯。这首先源于(1)式和(4)式的合理性。从文献[14]的工作,我们知道了(1)式是基带较为理想的公式。而实验上又表明:在较高自旋时,原子核的转动惯量趋近于一个常数,所以使用常转动惯量公式有很好的实验支持。另外,虽然

带间相互作用是唯一地引入的,但它与通常流行的推转壳模型和粒子加转子模型的带间耦合项相符。此外,本文采用了两带耦合模型,由本文所导出的结果又反过来证实了带交叉观点的合理性。由(7)式定出的参数均满足它自身一定的物理性质,这说明了本文所取模型的合理性。它不仅可描述目前已经确定的实验数据,而且对于发现和确定许多目前尚属未知的能级都会很有帮助。

### 参 考 文 献

- [1] A. Bohr, and B. R. Mottelson, Nuclear Structure, Vol. II (Benjamin, New York, 1975).
- [2] I. Hamamoto, Treatise on Heavy-Ion Science, Vol. 3, Edited by D. A. Bromley (Plenum Publishing Cor., 1985), p. 313.
- [3] M. J. A. de Voigt, J. Dudek and Z. Szymanski, *Rev. Mod. Phys.*, **55**(1983), 949.
- [4] S. M. Harris, *Phys. Rev. Lett.*, **13**(1964), 663; *Nucl. Phys.*, **63**(1965), 82.
- [5] F. S. Stephens, N. L. Lark and B. M. Diamond, *Phys. Rev. Lett.*, **12**(1964), 225; *Nucl. Phys.*, **63**(1965), 82.
- [6] M. A. J. Mariscotti, G. Scharff-Goldhaber and B. Buck, *Phys. Rev.*, **178**(1969), 1864.
- [7] J. E. Draper, *Phys. Lett.*, **41B**(1972), 105.
- [8] Ø. Saethre, S. A. Hjorth, A. Johnson, S. Jagare, H. Ryde and Z. Szymanski. *Nucl. Phys.*, **A207**(1973), 486.
- [9] Wu Chongshi and Zeng Jinyan, *Commun. in Theor. Phys.*, **8**(1987), 51.
- [10] R. A. Broglia, A. Molinari, G. Pollarolo and T. Regge, *Phys. Lett.*, **50B**(1974), 295; **57B**(1975), 113.
- [11] A. Covello and G. Giberti, *J. Phys.*, **G5**(1979), 989.
- [12] Dennis Bonatsos, *Phys. Rev.*, **C31**(1985), 2256.
- [13] A. Klein, R. M. Dreizler and T. K. Das, *Phys. Lett.*, **31B**(1970), 333.
- [14] Meng Jie, Phenomenological Description for the collective excitation spectra of well-deformed nuclei. (The Thesis for Master's Degree) (unpublished).
- [15] Mitsuo Sakai, *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, **31**(1984), 399.
- [16] S. W. Yates et al., *Phys. Rev.*, **C21**(1980), 2366.
- [17] Y. K. Agarwal et al., *Nucl. Phys.*, **A399**(1983), 199.
- [18] R. Chapman et al., *Phys. Rev. Lett.*, **51**(1983), 2265.
- [19] G. D. Dracoulis et al., *Nucl. Phys.*, **A383**(1980), 119.
- [20] C. Fahlander and G. D. Dracoulis, *Nucl. Phys.*, **A375**(1982), 263.
- [21] 曾谨言,孙洪洲,原子核理论,上海科学技术出版社。(1987),150页。

## A Simple Formula for Backbending

MENG JIE

(Department of Physics, Peking University, 100871)

YIN CHUANZONG LIN XINWEI

(Department of Physics, Southwest China Normal University, Chongqing 630715)

### ABSTRACT

Using Wu-Zeng formula to characterize g-band, Bohr-Mottelson formula to describe s-band, and introducing a tentative interband interaction, a better description for the yrast, and yrare-band of the most even-even well-deformed nuclei is obtained. The backbending of the moment of inertia is also well reproduced in this formalism. By analysing the parameters used here, other information such as the moment of inertia for the ground state can be concluded.