第15卷 第12期 高能物理与核物理 Vol. 15, No. 12
1991年12月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Dec., 1991

量子力学偶极求和规则和 $\psi(3770)$ 的电偶极跃迁*

丁亦兵[1,2] 周雷
(中国科学院研究生院物理部,北京 100039)
秦旦华[2] 赵光达[1,2]
(北京大学物理系,北京 100871)

摘 要

本文对量子力学偶极求和规则进行了一些普遍的讨论. 利用这些求和规则估算了 $\psi(3770)$ 的电偶极跃迁宽度的上限和下限. 结果表明, Mark III 组给出的实验值明显偏大.

一、引 言

最近,我们在势模型的框架内,对 $c\bar{c}$ 族 1^3D_1 态 $\psi(3770)$ 的电偶极 ($E1$) 跃迁宽度进行了一些理论计算[1]. 我们发现, 不管是非相对论的结果, 还是考虑了一级相对论修正, $\psi(3770)\to\gamma\chi_J$ ($J=0,1,2$) 的衰变宽度理论值都比 Mark III 实验组报告的实验结果[2]小得多. 在文献[3]中,我们又进一步讨论了 $\psi(3770)$ 作为 $^3D_1$ 和 $^3S_1$ 的混合态的可能性. 结果表明,无论采用何种混合方案,理论与实验之间的这种矛盾都不能得到解决.

本文拟从另一个角度,即从量子力学求和规则出发,对这个问题再进行一些深入的研究,力求给出一些与模型无关或有尽量少的依赖关系的一些理论结果,供实验家们参考.

量子力学求和规则在原子物理中曾有过许多重要的应用[4]. 用它来讨论重夸克偶素的电偶极跃迁, 也曾为实验家们提供过很有价值的理论参考值[5]. 最近, 文献[6]曾用它来研究禁闭势的可能形式.

本文在第二节把文献 [5] 中所谓的 Thomas-Reiche-Khun (TRK) 求和规则推广到普遍情况. 第三节讨论了这些求和规则与电偶极跃迁宽度的一般关系. 第四节用一阶和二阶求和规则,考虑到尽可能减少模型相关性的要求,分别给出了 $\psi(3770)\to\gamma\chi_J$ ($J=0,1,2$) $E1$ 跃迁宽度的上限值. 第五节用文献[5]中的 Wigner 求和规则不仅给出了上

本文 1991 年 2 月 13 日收到.
* 国家自然科学基金资助.
1) 中国高等科学技术中心(世界实验室),北京 100080
2) 中国科学院理论物理研究所客座研究人员,北京 100080

述同样过程宽度的上限，而且给出了下限值．我们发现所有这些理论结果彼此是自洽的，它们对相应的实验给出了很强的限制．这些理论值比 Mark III 实验组报告的实验值小得多，而与我们用势模型所做的理论计算是基本一致的．在本文的最后一小节中，我们对这些结果给出了一些简单的讨论．

二、偶极求和规则的一般形式

设量子系统的哈密顿量为

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu} + U(\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

其中，μ 为约化质量，$U(\boldsymbol{r})$ 为相互作用势．设 H 的本征值为 E_n，相应的本征矢为 $|n\rangle$，n 标记着所有的量子数．又设厄米算符 A，且定义

$$A(0) = A, \tag{2}$$

$$A(k) = [H, A(k-1)]\quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{3}$$

易证

$$\sum_m |\langle m|A(k)|n\rangle|^2 = \langle n|A^+(k)A(k)|n\rangle. \tag{4}$$

由上式并考虑到 $|n\rangle$ 和 $|m\rangle$ 皆为 H 的本征矢，可以求得一般形式的偶数阶求和规则为

$$\sum_m (E_m - E_n)^{2k}|\langle m|A|n\rangle|^2 = \langle n|A^+(k)A(k)|n\rangle. \tag{5}$$

同理，并考虑到 A 的厄米性，易证

$$2\sum_m (E_m - E_n)|\langle m|A(k)|n\rangle|^2 = \langle n|[[A^+(k), H], A(k)]|n\rangle, \tag{6}$$

由它可以求得一般形式的奇数阶求和规则为

$$\sum_m (E_m - E_n)^{2k+1}|\langle m|A|n\rangle|^2 = \frac{1}{2}\langle n|[[A^+(k), H], A(k)]|n\rangle. \tag{7}$$

若取 $A = \boldsymbol{r}$，则

$$A(0) = \boldsymbol{r}, \tag{8}$$

$$A(1) = [H, \boldsymbol{r}] = -\frac{i\boldsymbol{p}}{\mu}. \tag{9}$$

$$A(2) = \frac{1}{\mu}\nabla U. \tag{10}$$

$$\cdots\cdots$$

把这些结果代入（5）式和（7）式中，可以依次求得所有各阶偶极求和规则．设 $\boldsymbol{r}_{mn} = \langle m|\boldsymbol{r}|n\rangle$，则前五阶偶极求和规则为：

$$\sum_m (E_m - E_n)|\boldsymbol{r}_{mn}|^2 = \frac{3}{2\mu}, \tag{11}$$

$$\sum_m (E_m - E_n)^2|\boldsymbol{r}_{mn}|^2 = \frac{1}{\mu^2}\langle n|\boldsymbol{p}^2|n\rangle, \tag{12}$$

$$\sum_m (E_m - E_n)^3 |\boldsymbol{r}_{mn}|^2 = \frac{1}{2\mu^2}\langle n|\nabla^2 U|n\rangle, \tag{13}$$

$$\sum_m (E_m - E_n)^4 |\boldsymbol{r}_{mn}|^2 = \frac{1}{\mu^2}\langle n|(\nabla U)^2|n\rangle, \tag{14}$$

$$\sum_m (E_m - E_n)^5 |\boldsymbol{r}_{mn}|^2 = \frac{1}{2\mu^3}\langle n|(\nabla\nabla U):(\nabla\nabla U)|n\rangle. \tag{15}$$

(11)式即所谓的 TRK 求和规则，它与(12)式一起在原子物理中有很多应用[4]，文献[5]曾用(11)式讨论过粲偶素的电偶极跃迁。文献[6]曾用(13)式讨论了禁闭势的可能形式。

三、用电偶极跃迁宽度表示求和规则

矩阵元 $\boldsymbol{r}_{mn}$ 与电偶极跃迁宽度直接相关。利用这种关系我们可以把上述偶极求和规则用电偶极跃迁宽度表示出来。

对夸克偶素，H 的本征态通常记为 $|nlsjm\rangle$，其中 n 为主量子数，l 为轨道角动量，s 为总自旋，j 和 m 分别为总角动量及其投影。由于能级对量子数 m 总是简并的，而且上述各求和规则等式右边与量子数 m 无关，所以如果定义

$$\bar{r}(n'l's'j', nlsj) = \frac{1}{2j+1}\sum_m \sum_{m'} |\langle n'l's'j'm'|\boldsymbol{r}|nlsjm\rangle|^2, \tag{16}$$

则例如(11)式可以改写成

$$\sum_{n'l's'j'} (E_{n'l's'j'} - E_{nlsj})\bar{r}(n'l's'j', nlsj) = \frac{3}{2\mu}. \tag{17}$$

(12)式到(15)式也可改写成类似形式。

实验观测的由初态 $|n_il_is_ij_i\rangle$ 到末态 $|n_fl_fs_fj_f\rangle$ 并放出一个能量为 ω_{if} 的光子的 $E1$ 跃迁宽度为

$$\begin{aligned}\Gamma(n_il_is_ij_i &\to n_fl_fs_fj_f) \\ &= \frac{1}{2j_i+1}\sum_{m_i}\sum_{m_f}\frac{4}{3}\alpha e_Q^2\omega_{if}^3 |\langle n_il_is_ij_im_i|\boldsymbol{r}|n_fl_fs_fj_fm_f\rangle|^2,\end{aligned} \tag{18}$$

其中 α 为精细结构常数，e_Q 为夸克电荷，而

$$\omega_{if} = E_{n_il_is_ij_i} - E_{n_fl_fs_fj_f}. \tag{19}$$

如果完成(18)式中对末态极化的求和及对初态极化的求平均，则得到[7]

$$\Gamma(n_il_is_ij_i \to n_fl_fs_fj_f) = \frac{4}{3}e_Q^2\alpha\omega_{if}^3 C(j_il_ij_fl_fs)\delta_{s_is_f}\langle r\rangle^2, \tag{20}$$

其中统计因子 $C(j_il_ij_fl_fs)$ 为

$$C(j_il_ij_fl_fs) = \max(l_i, l_f)(2j_f+1)\begin{Bmatrix} l_f & j_f & s \\ j_i & l_i & 1\end{Bmatrix}^2, \tag{21}$$

$\langle r\rangle$为径向积分

$$\langle r\rangle = \int_0^\infty r R_{n_fl_f}(r) R_{n_il_i}(r) r^2 \mathrm{d}r. \tag{22}$$

由(16)式、(18)式和(20)式显然可见，若取 $j = j_i$ 和 $j' = j_f$，则

$$\bar{r}(n'l's'j',nlsj)=\frac{\Gamma(nlsj\to n'l's'j')}{\frac{4}{3}\alpha e_Q^2\omega_{if}^3},\tag{23}$$

和

$$\bar{r}(n'l's'j',nlsj)=C(jlj'l's)\langle r\rangle^2.\tag{24}$$

而若取 $j'=j_i$ 和 $j=j_f$，则

$$\bar{r}(n'l's'j',nlsj)=\frac{2j'+1}{2j+1}\cdot\frac{\Gamma(n'l's'j'\to nlsj)}{\frac{4}{3}\alpha e_Q^2\omega_{if}^3}\tag{25}$$

和

$$\bar{r}(n'l's'j',nlsj)=\frac{2j'+1}{2j+1}\cdot C(j'l'jls)\langle r\rangle^2.\tag{26}$$

利用这些表达式，可以把上述一阶到五阶求和规则表示成

$$\sum_{n'l's'j'}\frac{1}{(E_{n'l's'j'}-E_{nlsj})^2}\left(\frac{2j'+1}{2j+1}\right)\Gamma(n'l's'j'\to nlsj)-\sum_{n'l's'j'}\frac{1}{(E_{nlsj}-E_{n'l's'j'})^2}\Gamma(nlsj\to n'l's'j')=\frac{2\alpha e_Q^2}{\mu},\tag{27}$$

$$\sum_{n'l's'j'}\frac{1}{E_{n'l's'j'}-E_{nlsj}}\left(\frac{2j'+1}{2j+1}\right)\Gamma(n'l's'j'\to nlsj)+\sum_{n'l's'j'}\frac{1}{E_{nlsj}-E_{n'l's'j'}}\Gamma(nlsj\to n'l's'j')=\frac{4\alpha e_Q^2}{3\mu^2}\langle nlsj|\boldsymbol{p}^2|nlsj\rangle,\tag{28}$$

$$\sum_{n'l's'j'}\left(\frac{2j'+1}{2j+1}\right)\Gamma(n'l's'j'\to nlsj)-\sum_{n'l's'j'}\Gamma(nlsj\to n'l's'j')=\frac{2\alpha e_Q^2}{3\mu^2}\langle nlsj|\nabla^2U|nlsj\rangle,\tag{29}$$

$$\sum_{n'l's'j'}(E_{n'l's'j'}-E_{nlsj})\left(\frac{2j'+1}{2j+1}\right)\Gamma(n'l's'j'\to nlsj)+\sum_{n'l's'j'}(E_{nlsj}-E_{n'l's'j'})\Gamma(nlsj\to n'l's'j')=\frac{4\alpha e_Q^2}{3\mu^2}\langle nlsj|(\nabla U)^2|nlsj\rangle,\tag{30}$$

$$\sum_{n'l's'j'}(E_{n'l's'j'}-E_{nlsj})^2\left(\frac{2j'+1}{2j+1}\right)\Gamma(n'l's'j'\to nlsj)-\sum_{n'l's'j'}(E_{nlsj}-E_{n'l's'j'})^2\Gamma(nlsj\to n'l's'j)=\frac{2\alpha e_Q^2}{3\mu^3}\langle nlsj|(\nabla\nabla U):(\nabla\nabla U)|nlsj\rangle.\tag{31}$$

对于给定的 $|nlsj\rangle$ 态，在适当的简化假设下，各阶求和规则原则上均可给出对于电偶极跃迁宽度的理论限制．但五阶以上等式右边的形式相当复杂，必须用数值积分，给不

出简明的结果. 三阶和四阶求和规则我们将在另文讨论. 本文仅就一阶和二阶进行一些定量研究.

四、求和规则对 $\psi(3770)$ 态 $E1$ 跃迁宽度的限制

取 $|nlsj\rangle = |1^3P_J\rangle$ 态,即 $n=1, l=1, s=1$ 和 $j=J$. 以 $|1^3P_J\rangle$ (即 χ_{cJ}) ($J=0,1,2$) 为初态,可允许的末态只有 $|1^3S_1\rangle$ 态(即 J/ψ). 而以 $|1^3P_J\rangle$ 为末态, 可允许的初态有 $|2^3S_1\rangle$、$|3^3S_1\rangle$、……; $|1^3D_{J'}\rangle$、$|2^3D_{J'}\rangle$、……; ……. 对 $c\bar{c}$ 族, 实验上观测到的有关的电偶极跃迁有 $\chi_{cJ}\to\gamma J/\psi$, $\psi(3686)\to\gamma\chi_{cJ}$ 以及 Mark III 组报告的 $\psi(3770)\to\gamma\chi_{cJ}(J=0,1,2)$. 理论上估计[8]更高的量子数的态到 χ_{cJ} 的电偶极跃迁宽度很小, 对求和规则的贡献可以忽略. 下面分别用一阶和二阶求和规则, 根据 $\chi_{cJ}\to\gamma J/\psi$ 和 $\psi(3686)\to\gamma\chi_{cJ}$ 的实验结果, 导出对 $\psi(3770)\to\gamma\chi_{cJ}$ 衰变宽度的限制, 并把它们与 Mark III 组报告的实验结果比较.

(1) 一阶求和规则

考虑到表1所示的 $^3D_{J'}\to\gamma^3P_J$ 跃迁的统计因子值, 可知

表1 $^3D_{J'}\to\gamma^3P_J$ 跃迁的统计因子 $C(J'2J11)$

J' \ J	0	1	2
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{90}$
2	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$
3	0	0	$\frac{2}{5}$

$$\Gamma(1^3D_2\to1^3P_0)=0, \tag{32}$$

$$\Gamma(1^3D_3\to1^3P_0)=0. \tag{33}$$

于是,对于 $J=0$,由(27)式可以得到

$$\frac{1}{(E_{3770}-E_{\chi_{c0}})^2}\cdot3\Gamma(1^3D_1\to1^3P_0)<\frac{2\alpha e_Q^2}{\mu}-\frac{1}{(E_{3686}-E_{\chi_{c0}})^2}\cdot3\Gamma(2^3S_1\to1^3P_0)+\frac{1}{(E_{\chi_{c0}}-E_{J/\psi})^2}\Gamma(1^3P_0\to1^3S_1). \tag{34}$$

取 $e_Q=\frac{2}{3}$ 和我们在文献[1]中所用的 $m_c=1.84\text{GeV}$, 代入 $\mu=\frac{m_c}{2}$ 及 $\Gamma(2^3S_1\to1^3P_0)$ 和 $\Gamma(1^3P_0\to1^3S_1)$ 的实验值[9]

$$\Gamma(2^3S_1\to1^3P_0)\sim23\text{keV}, \tag{35}$$

$$\Gamma(1^3P_0\to1^3S_1)\sim95\text{keV}, \tag{36}$$

可以求得

$$\Gamma(1^3D_1 \to 1^3P_0) < 0.29\text{MeV}. \tag{37}$$

对于 $J=1$ 和 $J=2$，1^3D_2 和 1^3D_3 态的贡献不再为零．但这两个态至今尚未观测到．我们假定，在非相对论近似下由于 $1^3D_{J'}(J'=1,2,3)$ 的三个态简并，均取 3770MeV 为其质量的近似值，而且对所有的 $1^3D_{J'} \to 1^3P_J$ 跃迁，径向积分 $\langle 1D|r|1P\rangle$ 取相同值．宽度的不同完全由统计因子决定．于是由表 1 可以求得

$$\frac{\Gamma(1^3D_2 \to 1^3P_1)}{\Gamma(1^3D_1 \to 1^3P_1)} = \frac{9}{5}, \tag{38}$$

$$\frac{\Gamma(1^3D_2 \to 1^3P_2)}{\Gamma(1^3D_1 \to 1^3P_2)} = 9, \tag{39}$$

$$\frac{\Gamma(1^3D_3 \to 1^3P_2)}{\Gamma(1^3D_1 \to 1^3P_2)} = 36. \tag{40}$$

把上述结果分别代入(27)式，类似于 $J=0$ 时的做法，可以得到

$$\Gamma(1^3D_1 \to 1^3P_1) < 0.14\text{MeV}. \tag{41}$$

和

$$\Gamma(1^3D_1 \to 1^3P_2) < 0.006\text{MeV}. \tag{42}$$

(2) 二阶求和规则

二阶求和规则的(28)式的右边正比于平均动能．根据 Virial 定理，当 $U(r)\equiv U(r)$ 时，有下列关系式

$$\left\langle \frac{p^2}{2\mu} \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle r\frac{dU}{dr} \right\rangle. \tag{43}$$

若取对数势[10]

$$U(r) = c\ln\left(\frac{r}{r_0}\right), \tag{44}$$

其中，

$$c = 0.733\text{GeV}, \quad r_0 = 0.89\text{GeV}^{-1}, \tag{45}$$

代入(28)式，可以得到

$$\sum_{n'l's'j} \frac{1}{E_{n'l's'j'} - E_{nlsj}}\left(\frac{2j'+1}{2j+1}\right)\Gamma(n'l's'j' \to nlsj) + \sum_{n'l's'j'} \frac{1}{E_{nlsj} - E_{n'l's'j'}}\Gamma(nlsj \to n'l's'j') = \frac{4\alpha e_Q^2 c}{3\mu}. \tag{46}$$

利用上式，类似于对一阶求和规则(27)式的处理，且仍取 $m_c = 1.84\text{GeV}$，则求得

$$\Gamma(1^3D_1 \to 1^3P_0) < 0.34\text{MeV}, \tag{47}$$

$$\Gamma(1^3D_1 \to 1^3P_1) < 0.16\text{MeV}, \tag{48}$$

$$\Gamma(1^3D_1 \to 1^3P_2) < 0.006\text{MeV}. \tag{49}$$

五、Wigner 求和规则及其对 $\psi(3770)$ $E1$ 跃迁宽度的限制

利用上述 TRK 类求和规则只能给出 $\psi(3770)$ 电偶极跃迁宽度的上限．Wigner 曾

引入另一类偶极求和规则[11],利用它们不仅可以求出 $E1$ 跃迁宽度的上限,而且也可以给出下限. 下面,我们首先利用角动量算符与坐标算符、动量算符的对易关系,按照文献[5]的做法,导出这种求和规则,并把它们化成用径向积分表达的形式,然后给出一些定量的讨论.

设 $c = l(l+1)$, $c_+ = (l+1)(l+2)$ 和 $c_- = (l-1)l$,并引入两个算符

$$\pi^{\pm} = \frac{\boldsymbol{L}^2 - c_{\mp}}{c_{\pm} - c_{\mp}}. \tag{50}$$

易证,

$$\pi^+ |l+1, m\rangle = |l+1, m\rangle, \tag{51}$$

$$\pi^+ |l-1, m\rangle = 0, \tag{52}$$

$$\pi^- |l+1, m\rangle = 0, \tag{53}$$

$$\pi^- |l-1, m\rangle = |l-1, m\rangle, \tag{54}$$

即 $\pi^{\pm}$ 是两个投影算符.

利用 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 算符的基本对易关系以及

$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{L}^2] = i(\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}), \tag{55}$$

$$[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{L}] = i(\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{L}), \tag{56}$$

$$\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} + \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{p} = 2i\boldsymbol{p}, \tag{57}$$

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{L} + \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{p} = 2i\boldsymbol{r}. \tag{58}$$

可以证明,

$$\boldsymbol{r} \cdot \pi^+ \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p} \cdot \pi^+ \boldsymbol{r} = i\,\frac{7\boldsymbol{L}^2 + 6 - 3c_-}{2(2L+1)}, \tag{59}$$

$$\boldsymbol{r} \cdot \pi^- \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p} \cdot \pi^- \boldsymbol{r} = -i\,\frac{7\boldsymbol{L}^2 + 6 - 3c_+}{2(2L+1)}. \tag{60}$$

利用(59)式、(60)式和 $\pi^{\pm}$ 的投影算符性质以及 $\boldsymbol{r}$ 或 $\boldsymbol{p}$ 在轨道角动量本征态之间的矩阵元满足 $\Delta l = \pm 1$ 的选择定则,即可求得下列两个 Wigner 求和规则

$$\sum_n \sum_{m'=-(l+1)}^{l+1} |\langle n, l+1, m' | \boldsymbol{r} | klm\rangle|^2 m_c (E_{n,l+1} - E_{k,l}) = \frac{(2l+3)(l+1)}{2l+1}, \tag{61}$$

和

$$\sum_n \sum_{m'=-(l-1)}^{l-1} |\langle n', l-1, m' | \boldsymbol{r} | klm\rangle|^2 m_c (E_{n,l-1} - E_{k,l}) = -\frac{l(2l-1)}{2l+1}, \tag{62}$$

其中 m_c 为 c 夸克质量.

由于(61)式和(62)式右边与 m 量子数无关,故它们可以进一步化成

$$\sum_n m_c (E_{n,l+1} - E_{k,l}) \cdot \frac{1}{2l+1} \sum_m \sum_{m'} |\langle n, l+1, m' | \boldsymbol{r} | klm\rangle|^2 = \frac{(2l+3)(l+1)}{2l+1}. \tag{63}$$

和

$$\sum_n m_c(E_{n,l-1}-E_{k,l})\cdot\frac{1}{2l+1}\sum_m\sum_{m'}|\langle n,l-1,m'|r|klm\rangle|^2 = -\frac{l(2l-1)}{2l+1}. \tag{64}$$

利用不可约张量的性质和 Wigner-Eckart 定理，不难证明

$$\frac{1}{2l+1}\sum_m\sum_{m'}|\langle n,l+1,m'|r|klm\rangle|^2 = \frac{l+1}{2l+1}|\langle n,l+1|r|kl\rangle|^2, \tag{65}$$

$$\frac{1}{2l+1}\sum_m\sum_{m'}|\langle n,l-1,m'|r|klm\rangle|^2 = \frac{l}{2l+1}|\langle n,l-1|r|kl\rangle|^2. \tag{66}$$

把(65)式和(66)式分别代入(61)和(62)式，得到适合我们需要的 Wigner 求和规则为：

$$\sum_n(E_{n,l+1}-E_{k,l})|\langle n,l+1|r|kl\rangle|^2 = \frac{2l+3}{m_c}. \tag{67}$$

和

$$\sum_n(E_{n,l-1}-E_{k,l})|\langle n,l-1|r|kl\rangle|^2 = -\frac{2l-1}{m_c}. \tag{68}$$

对于(67)式，取 $l=1$ 并略去 $n>1$ 的所有的态的贡献，则得到

$$\langle 1D|r|1P\rangle^2 < \frac{5}{m_c(E_{1D}-E_{1P})}. \tag{69}$$

仍取 $m_c = 1840\text{MeV}$ 和

$$E_D - E_P = 3770 - M_{c.o.g}(P_J) = 245\text{MeV}. \tag{70}$$

则有

$$\langle 1D|r|1P\rangle^2 < 11.1\times 10^{-6}(\text{MeV})^{-2}. \tag{71}$$

将其代入宽度的计算公式(20)中，则可以分别求得 $\psi(3770)\to\gamma\chi_{cJ}$ $(J=0,1,2)$ 的衰变宽度上限为

$$\Gamma(1^3D_1\to 1^3P_0) < 0.48\text{MeV}, \tag{72}$$

$$\Gamma(1^3D_1\to 1^3P_1) < 0.14\text{MeV}, \tag{73}$$

$$\Gamma(1^3D_1\to 1^3P_2) < 0.0052\text{MeV}. \tag{74}$$

由(68)式，取 $l=2$ 并略去 $n>1$ 的所有的态的贡献，则得到

$$\langle 1D|r|1P\rangle^2 > \frac{3}{m_c(E_{1D}-E_{1P})}. \tag{75}$$

代入如上述相同数据可以求得

$$\langle 1D|r|1P\rangle^2 > 6.7\times 10^{-6}(\text{MeV})^{-2}. \tag{76}$$

将其代入(20)式中，可以分别给出 $\psi(3770)\to\gamma\chi_J$ $(J=0,1,2)$ 衰变宽度的下限为

$$\Gamma(1^3D_1\to 1^3P_0) > 0.29\text{MeV}, \tag{77}$$

$$\Gamma(1^3D_1\to 1^3P_1) > 0.085\text{MeV}, \tag{78}$$

$$\Gamma(1^3D_1\to 1^3P_2) > 0.0031\text{MeV}. \tag{79}$$

六、讨 论 和 结 语

(1) 为了能对上面求得的 $\psi(3770)\to\gamma\chi_{cJ}$ 的衰变宽度的上下限与我们用势模型

表2 $\psi(3770)$ 的电偶极跃迁宽度

过程	TRK 类求和规则上限值 (keV)		Wigner 求和规则结果 (keV)		势模型计算值 (keV)	MarkIII 实验值 (keV)
	一阶	二阶	上限	下限		
$1^3D_1\to1^3P_0$	290	340	480	290	312(183)	500±200
$1^3D_1\to1^3P_1$	140	160	140	85	95(70)	430±180
$1^3D_1\to1^3P_2$	6	6	5.2	3.1	3.6(3.0)	≤500

注：表中各态表示的物理态为：1^3D_1:$\psi(3770)$; 1^3P_0:$\chi_{c0}(3415)$; 1^3P_1:$\chi_{c1}(3510)$; 1^3P_2: $\chi_{c2}(3555)$. 势模型的计算值中，括号外为非相对论值，括号内为相对论修正值。

求得的理论值以及 Mark III 组给出的实验结果加以比较，我们把它们一起在表2中列出。由该表可以清楚地看到，我们用势模型计算得到的宽度值与求和规则得到的上下限是完全一致的，而 Mark III 给出的实验值明显偏大。这进一步肯定了我们在[1]和[2]中所得到的结论。此外，Mark III 组取得的事例数不多，实验结果误差很大，对作出判断是不利的。如果北京正负电子对撞机（BEPC）能得到更多的 $\psi(3770)$ 事例，对它的电偶极衰变宽度给出更精确的实验结果，无疑对检验势模型是有重要意义的。

（2）求和规则是利用非相对论哈密顿量推导出来的，对 $c\bar{c}$ 这类系统，由于有较大的相对论效应，所以由求和规则给出的上限和下限值也会有比较大的修正。但势模型计算的经验表明，这种修正会使衰变宽度变得更小，因此对我们关于实验值偏大的结论不会有什么影响。

（3）除了二阶 TRK 类求和规则用了对数势的假设，因而与模型有较强的依赖关系外，一阶求和规则以及 Wigner 求和规则只通过 c 夸克质量而依赖于模型，与势的具体形式无明显地依赖关系。c 夸克质量减小，将使求得的上限与下限值有不同的增加。例如，若取 $m_c=1.6\text{GeV}$ 而不是 1.84GeV，则大约会使结果提高 10%，总的结论不会有大的改动。

参考文献

[1] 秦旦华，丁亦兵，赵光达，高能物理与核物理，**14**(1990)，380.
[2] R. H. Schindler, SLAC-PUB-4694, (1988).
[3] 秦旦华，丁亦兵，赵光达，高能物理与核物理，**15**(1991)，284.
[4] H. A. Bethe and E. E. Salpeter, Quantum Mechanics of One and Two-Electron Atoms (Springer, 1957).
[5] V. A. Novikov et al., *Phys. Reports*, **41**(1978), 1.
[6] X. T. Song, *Phys. Lett.*, **246B** (1990), 195.
[7] W. Kwong and J. L. Rosner, *Phys. Rev.*, **38D** (1988), 279.
[8] W. Buchmuller and S.-H. H. Tye, *Phys. Rev.*, **24D** (1981), 132.
[9] G. P. Yost et al., Particle Data Group, *Phys. Lett.*, **204B** (1988), 1.
[10] C. Quigg and Rosner, *Phys. Lett.*, **71B** (1977), 153.
[11] E. Wigner, *Phys. Z.*, **32**(1931), 450.

Dipole Sum Rules in Quantum Mechanics and Electric Dipole Transitions of $\psi(3770)$

DING YIBING　ZHOU LEI

(*Department of Physics, Graduate School, Academia Sinica, Beijing* 100039)

QIN DANHUA　ZHAO GUANGDA

(*Department of Physics, Peking University, Beijing* 100871)

ABSTRACT

Dipole sum rules in quantum mechanics are generally discussed. The upper and the lower bounds on the electric dipole transition widths of $\psi(3770)$ are estimated. It evidently indicates that the experimental values obtained by Mark III collaboration are much larger than the theoretical expectations.