第14卷 第7期　　高能物理与核物理　　Vol. 14, No. 7
1990 年 7 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　July, 1990

一些 $U_N \supset G$ 同位标量因子的解析表达式

潘　峰
（辽宁师范大学物理系，大连）

曹　雨　芳
（华东师范大学物理系，上海）

摘　要

本文导出了部分 $U_6 \supset SU_3$，$U_N \supset (U_1)^N$ 及 $SO_7 \supset (SU_2)^3$ 同位标量因子的解析表达式.

$U_N \supset G$（这里 G 指子群或子群链）群链在许多物理及化学问题中都有着广泛的应用. 该群链下张量算符的构造、约化矩阵元和同位标量因子的计算，在实际应用中是非常重要的. 部分 $SU_N \supset SU_{N-1}$ 或 SO_{N-1} 同位标量因子的解析表达式已由许多作者给予了讨论[1-6]. 但是，对诸如 $SU_6 \supset U_3$ 同位标量因子的计算还没有一种完整和有效的方法. 本文将利用张量算符直接导出 $SU_6 \supset SU_3$，$U_N \supset (U_1)^N$ 及 $SO_7 \supset (SU_2)^3$ 同位标量因子的解析表达式.

1. $SU_6 \supset SU_3$ 群链

在文献[7]中，孙洪洲利用 s，d 玻色子的产生算符构造了 $SU_6 \supset SU_3 \supset SU_2 \times U_1$ 群链的波函数，其最高权态可表为

$$|n(\lambda\mu)\epsilon_{\max}\Lambda_0\Lambda_0\rangle = \mathcal{N}(npq)\bar{a}_0^{n-2p-3q}\bar{g}_1^p\bar{e}^q|0\rangle, \tag{1}$$

其中

$$\lambda = 2n - 4p - 6q,$$

$$\mu = 2p,\quad \epsilon_{\max} = 2\lambda + \mu,\quad \Lambda_0 = \mu/2,$$

$$\bar{a}_0 = \sqrt{\frac{1}{3}}(\sqrt{2}\,d_0^+ - s^+),$$

$$\bar{g}_1 = \bar{a}_0 d_2^+ - \frac{1}{2}d_1^{+2},$$

$$\bar{c}_0 = \sqrt{\frac{1}{3}}(d_0^+ + \sqrt{2}\,s^+),$$

本文 1989 年 4 月24日收到.

$$\bar{e} = \bar{a}_0(2d_2^+d_{-2}^+ - \bar{c}_0^2) - (d_1^{+2}d_{-2}^+ + d_{-1}^{+2}d_2^+ - 2d_1^+d_{-1}^+\bar{c}_0), \tag{2}$$

$$\mathcal{N}(npq) = \left[\frac{2^p(2n-4p-3q+1)!!}{(n-2p-3q)!p!q!(2n-2p-3q+1)!!}\right]^{\frac{1}{2}} \times [\xi(npq)\xi(npq-1)\cdots\xi(np1)]^{-\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

$$\xi(npq) = \begin{cases} 4(n-p)(3q-p)/3 + 2(n-3p) - 2(2q+1)(2q-1), & \text{当 } q \neq 0, \\ 1, & \text{当 } q = 0. \end{cases} \tag{4}$$

利用张量算符的定义容易证明，该群链下的对称张量算符可表为

$$T^{[n]}_{(2n-4p-6q,2p)4n-6p-6q,p,p} = \left[\frac{n!2^p(2n-4p-3q+1)!!}{p!q!(n-2p-3q)!(2n-2p-3q+1)!!}\right]^{\frac{1}{2}} \times [\xi(npq)\xi(npq-1)\cdots\xi(np1)]^{-\frac{1}{2}}\bar{a}_0^{n-2p-3q}\bar{g}_1^p\bar{e}^q. \tag{5}$$

利用上述结果及 $SU_3 \supset SU_2$ 同位标量因子和 Wigner-Eckart 定理，我们得到如下 $SU_6 \supset SU_3$ 同位标量因子

$$\left[\begin{matrix} [N_1] & [N_2] \\ (2N_1-4p_1-6q_1, 2p_1) & (2N_2-6q_2, 0) \end{matrix}\middle| \begin{matrix} [N] \\ (2N-4p-6q, 2p) \end{matrix}\right]$$
$$= \{[(2N_1-4p-3q_1+1)!!(N-2p-3q)!(2N-2p-3q+1)!!N_1!N_2!q!]/[(N_1-2p-3q_1)!(2N_1-2p-3q_1+1)!!(2N-4p-3q+1)!!(N_2-3q_2)!N!q_1!q_2!]\}^{\frac{1}{2}} \times \{[\xi(Npq)\xi(Npq-1)\cdots\xi(Np1)]/[\xi(N_1pq_1)\xi(N_1pq_1-1)\cdots\xi(N_1p1)\xi(N_20q_2)\xi(N_20q_2-1)\cdots\xi(N_201)]\}^{\frac{1}{2}} \times \delta_{N_1+N_2,N}\delta_{pp_1}\delta_{q_1+q_2,q}. \tag{6}$$

利用该式很容易得到文献 [8] 表 IX 中的一些结果。

2. $U_N \supset (U_1)^N$ 群链

该群链下的对称张量算符可用 N 种玻色子的产生算符 $b_\mu^\dagger, \mu = 1,2,\cdots,N$，构造出来

$$T^{[n]}_{[n_1][n_2]\cdots[n_N]} = \left[\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} n_i!}\right]^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N} b_j^{\dagger n_j}, \tag{7}$$

其中 $n = \sum_{i=1}^{N} n_i$。利用该结果，我们得到如下 $U_N \supset (U_1)^N$ 同位标量因子

$$\left[\begin{matrix} [n_1] & [n_2] \\ n_1'n_2'\cdots n_{N-1}'n_N' & n_1''n_2''\cdots n_{N-1}''n_N'' \end{matrix}\middle| \begin{matrix} [n] \\ n_1n_2\cdots n_{N-1}n_N \end{matrix}\right]$$
$$= \left[\frac{n_1!n_2!}{n!}\prod_{i=1}^{N}\frac{n_i!}{n_i'!n_i''!}\right]^{\frac{1}{2}} \delta_{n_1+n_2,n} \prod_{i=1}^{N} \delta_{n_i'+n_i'',n_i}. \tag{8}$$

在推导 (6) 式及 (8) 式时，均用到了 U_N 约化矩阵元的结果

$$\langle [n] \| T^{[n'']} \| [n'] \rangle = \sqrt{\frac{n!}{n'!}}\, \delta_{n,n'+n''}. \tag{9}$$

3. $SO_7\supset(SU_2)^3$ 群链

群链 $U_7\supset SO_7\supset SO_3$ 在描述原子核的八极振动方面是很有用的[9-11]。但由于 $SO_7\supset SO_3$ 不是简单可约的.为了解决该 missing label 问题,我们曾利用 f 玻色子构造了 $SO_7\supset(SU_2)^3$ 群链的显式波函数，然后再投影到 SO_3 角动量为本征值的态上去[12]。其最高权态可表为

$$|ww;aa;(w-a)/2-k,(w-a)/2-k,(w-a)/2-k\rangle = \mathcal{N}\Lambda^{w}_{ka}f_1^{+a}f_3^{+w-a-2k}|0\rangle, \tag{10}$$

$$\Lambda^{w}_{ka}=\sum_t(-)^t\binom{k}{t}\frac{(2w-2a-2k+2)!!(2a+1)!!}{(2w-2a-2k-2t+2)!!(2a+2t+1)!!}S_{10}^{+t}S_{23}^{+k-t}, \tag{11}$$

$$S_{10}^{+}=(f_0^{+2}-2f_1^{+}f_{-1}^{+})/2, \tag{12}$$

$$S_{23}^{+}=f_2^{+}f_{-2}^{+}-f_3^{+}f_{-3}^{+}, \tag{13}$$

$$\mathcal{N}=\left[\frac{(w-a-2k+1)(2a+2k+1)!!(2w-2k+3)!!}{k!a!(w-a-k+1)!(2w+3)!!(2a+1)!!}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

可以证明 $U_7\supset SO_7\supset(SU_2)^3$ 群链下的对称张量算符可表为

$$T^{[w,0,0](w,0,0)}_{aa,(w-a)/2-k,(w-a)/2-k}=\sqrt{w!}\,\mathcal{N}\Lambda^{w}_{ka}f_1^{+a}f_3^{+w-a-2k}. \tag{15}$$

关于耦合 $(w_1,\ 0,\ 0)\times(w_2,\ 0,\ 0)\to(w_1+w_2,0,0)$ 的 $SO_7\supset(SU_2)^3$ 同位标量因子可通过直接计算(15)式的矩阵元得到,其最终结果为:

$$\left[\begin{array}{cc|c}(w_1,0,0) & (w_2,0,0) & (w_1+w_2,0,0)\\ a_1,(w_1-a_1)/2-k_1 & a_2,(w_2-a_2)/2-k_2 & a_1+a_2,(w_1+w_2-a_1-a_2)/2-k_1-k_2\end{array}\right]$$
$$=\{[(w+w_1-w_2-a-a_1+a_2-2k-2k_1+2k_2)!!(w+w_2-w_1-a-a_2+a_1-2k-2k_2+2k_1)!!]/[2^{w-a-2k}(w_1-a_1-2k_1)!(w_2-a_2-2k_2)!]\}$$
$$\times\{[(2w_1+3)!!(2a_1+1)!!(2w_2+3)!!(2a_2+1)!!k!a!(w-a-k+1)!!(2a+2k+1)!!]/[(2w_1-2k_1+3)!!(2w_2-2k_2+3)!!(2a_1+2k_1+1)!!(2a_2+2k_2+1)!!(w-a-2k+1)]$$
$$\times[(2w-2k+3)!!(w_1-a_1-2k_1+1)(w_2-a_2-2k_2+1)w_1!w_2!(a+a_1-a_2)!(a+a_2-a_1)!]/[k_1!k_2!a_1!a_2!(w_1-a_1-k_1+1)!(w_2-a_2-k_2+1)!(2a+1)!!w!(2w+3)!!(2a_1)!(2a_2)!]\}^{\frac{1}{2}}. \tag{16}$$

参 考 文 献

[1] E. Chacon, M. Ciftan, and L. C. Biedenharn, *J. Math. Phys.*, **13**(1972), 577.
[2] S. J. Alisauskas, *J. Phys., A*, **17**(1984), 2899; **20**(1987), 1045.
[3] A. Castilho Alicaras, and V. Vanagas, *J. Math. Phys.*, **28**(1987), 1995.
[4] S. J. Alisauskas, *Liet. Fiz. Rink.*, **9**(1969), 641; **18**(1978), 701.
[5] K. T. Hecht, R. Le Blanc, and D. J. Rowe, *J. Phys. A*, **20**(1987), 257.
[6] Feng Pan, Yu-Fang Cao, *J. Math. Phys.*, **29**(1988), 2384.
[7] 孙洪洲,核物理,**3**(1981)199.

[8] H. C. Wu, A. E. L. Dieperink, and S. Pittel, *Phys. Rev.*, **C34** (1986), 703.
[9] S. G. Rohozinski, *J. Phys.*, **G4** (1978), 1075.
[10] R. Gaskell, A. Peccia, and R. T. Sharp, *J. Math. Phys.*, **19**(1978), 727.
[11] J. Engel, and F. Iachello, *Nucl. Phys.*, **A472** (1987), 61.
[12] Feng Pan, Yu-Fang Cao, and Zheng-Yong Pan, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22**(1989), 4105.

ANALYTICAL EXPRESSIONS OF SOME ISOSCALAR FACTORS FOR $U_N \supset G$

Pan Feng
(*Department of Physics, Liaoning Normal University, Dalian*)

Cao Yufang
(*Department of Physics, East China Normal University, Shanghai*)

Abstract

Analytical expressions of some isoscalar factors for $U_6 \supset SU_3$, $U_N \supset (U_1)^N$ and $SO_7 \supset (SU_2)^3$ are derived.