第14卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 14, No. 4
1990年4月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Apr., 1990

快报

可解的1+1维格点$U(1)$规范模型与费米子加倍问题

郑 波
(中山大学物理系,广州)

摘 要

本文准确求解了一个有费米子加倍的格点$U(1)$规范模型. 结果显示正反费米子组成的介子态出现相应的加倍问题. 进一步,我们证明Susskind费米子方案可以消除介子态的加倍.

一、引 言

费米子加倍问题是带费米子格点规范理论的根本问题之一. 严格地说,通常说的费米子加倍是格点自由费米子理论存在的问题[1]. 至今,我们并不十分清楚费米子加倍对有相互作用规范理论的影响. 同时,尽管人们一般相信Susskind费米子方案和Wilson费米子方案是正确的格点化方案,但还没有可靠的证据表明这一点.

近来,作者准确求解了一个1+1维$U(1)$规范模型[2]. 由于模型是非相对论的,我们可以随意构造出没有费米子加倍或有费米子加倍的相应的格点规范模型. 已经证明,没有费米子加倍的格点规范模型有正确的连续极限[3]. 进一步,本文将通过对有费米子加倍的格点规范模型的研究,给出一个严格可解的例子,说明费米子加倍对有相互作用规范理论的影响,及演示Susskind费米子方案如何消去这一影响.

二、有费米子加倍的格点$U(1)$规范模型

本文采用参考文献[3]的符号系统. 对参考文献[2]中提出的1+1维$U(1)$规范模型,我们构造有费米子加倍的格点规范模型的哈密顿量

$$H=\frac{1}{2}e^2a\sum_x E(x)^2+:\frac{F}{4a^2}\sum_x \phi^+(x)\gamma_0(2\phi(x)-U(x,2)\phi(x+2)$$
$$-U(x,-2)\phi(x-2)):, \tag{2.1}$$

其中

本文1989年10月16日收到.

$$U(x, \pm 2) = U(x, \pm 1)U(x \pm 1, \pm 1), \tag{2.2}$$

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta^+(x) \end{pmatrix}, \qquad \psi^+(x) = (\xi^+(x) \quad \eta(x)), \tag{2.3}$$

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

正规乘积只对(2.3)式定义的费米场产生和消灭算子作用. 事实上, H可以重写为

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} e^2 a \sum_x E(x)^2 \\ & + \sum_x \frac{F}{4a^2} (\xi^+(x)U(x, 1) - \xi^+(x+2)U(x+2, -1)) \\ & \cdot (U(x+1, -1)\xi(x) - U(x+1, 1)\xi(x+2)) \\ & + \sum_x \frac{F}{4a^2} (U(x+1, -1)\eta^+(x) - U(x+1, 1)\eta^+(x+2)) \\ & \cdot (\eta(x)U(x, 1) - \eta(x+2)U(x+2, -1)). \end{aligned} \tag{2.5}$$

定义态 $|0\rangle$ 为

$$E(x)|0\rangle = 0, \ \xi(x)|0\rangle = 0, \ \eta(x)|0\rangle = 0. \tag{2.6}$$

因为H正定, 且

$$H|0\rangle = 0, \tag{2.7}$$

所以 $|0\rangle$ 为H的基态. 双费米子规范不变、空间平移不变态为

$$|E\rangle = \sum_{x,n} f_E(n)\xi^+(x)U(x, n)\eta^+(x+n)|0\rangle, \tag{2.8}$$

其中

$$U(x, n) = \begin{cases} \prod_{i=0}^{n-1} U(x+i, 1) & (n > 0) \\ \prod_{i=0}^{-(n-1)} U(x-i, -1) & (n < 0). \end{cases} \tag{2.9}$$

要求 $|E\rangle$ 为H的能量本征态, 即

$$H|E\rangle = E|E\rangle, \tag{2.10}$$

由(2.5)和(2.8)不难导出 $f_E(n)$ 满足的方程

$$f_E(n+2) + f_E(n-2) = \frac{2\left(\frac{|n|}{2} + \frac{F}{e^2a^3} - \frac{E}{e^2a}\right)}{\frac{F}{e^2a^3}} f_E(n). \tag{2.11}$$

容易明白, (2.11) 中 n 为偶数和 n 为奇数两部分方程没有耦合. 对比贝塞尔函数的递推关系

$$B_{\nu+1}(z) + B_{\nu-1}(z) = \frac{2\nu}{z} B_\nu(z), \tag{2.12}$$

再考虑到 $f_E(n)$ 的有限性, 我们得到(2.11)两组互相独立的解[4]:

1.
$$f_E(n)=\begin{cases}\begin{cases}\lambda_e^+ J_{\nu_n}(z) & (n\text{ 为偶},\ n\geqslant 0)\\ \lambda_e^- J_{\nu_{-n}}(z) & (n\text{ 为偶},\ n\leqslant 0)\end{cases}\\ 0 & (n\text{ 为奇}),\end{cases}\tag{2.13}$$

其中 $J_\nu(z)$ 为贝塞尔函数，$\lambda_e^\pm$ 与 n 无关，

$$z=\frac{F}{e^2a^3},\qquad \nu_{\pm n}=\pm\frac{n}{2}+z-\frac{E}{e^2a}.\tag{2.14}$$

对偶宇称态，由 $n=0$ 及 $n=2$ 处解的连接条件，

$$\lambda_e^+=\lambda_e^-,\tag{2.15}$$

能谱由 $\partial zJ_{\nu_0}(z)$ 的零点方程决定:

$$\partial zJ_{\nu_0}(z)=0.\tag{2.16}$$

对奇宇称态，

$$\lambda_e^+=-\lambda_e^-,\tag{2.17}$$

能谱由 $J_{\nu_0}(z)$ 的零点方程决定:

$$J_{\nu_0}(z)=0.\tag{2.18}$$

2.
$$f_E(n)=\begin{cases}0 & (n\text{ 为偶})\\ \begin{cases}\lambda_0^+ J_{\nu_n}(z) & (n\text{ 为奇},\ n>0)\\ \lambda_0^- J_{\nu_{-n}}(z) & (n\text{ 为奇},\ n<0),\end{cases}\end{cases}\tag{2.19}$$

其中 $\lambda_0^\pm$ 与 n 无关，z 和 $\nu_{\pm n}$ 仍按(2.14)式定义．对偶宇称态，由 $n=\pm 1$ 处解的连接条件，

$$\lambda_0^+=\lambda_0^-,\tag{2.20}$$

能谱由

$$J_{\nu_1}(z)=J_{\nu_{-1}}(z)\tag{2.21}$$

决定．对奇宇称态，

$$\lambda_0^+=-\lambda_0^-,\tag{2.22}$$

能谱由

$$J_{\nu_1}(z)=-J_{\nu_{-1}}(z)\tag{2.23}$$

决定．

解(2.13)和(2.19)均为束缚态．方程(2.11)除解(2.13)和(2.19)外没有其他解．

保持 $na=L$ 为有限值，当 $a\to 0$ 时，$J_{\nu_{\pm n}}(z)$ 的渐近行为是[5]

$$\begin{aligned}J_{\nu_{\pm n}}&\sim\phi\left(\left(\frac{2}{z}\right)^{1/3}(\nu_{\pm n}-z)\right)\\&\sim\phi\left(\left(\frac{e^2}{4F}\right)^{1/3}\left(\pm na-\frac{2E}{e^2}\right)\right),\end{aligned}\tag{2.24}$$

其中 $\phi(t)$ 是 Airy 函数．所以，尽管(2.13)和(2.19)为互相独立的不同的解，当 $a\to 0$ 时，其能谱相同，由

$$\phi'\left(-\left(\frac{e^2}{4F}\right)^{1/3}\frac{2E}{e^2}\right)=0,\tag{2.25}$$

$$\phi\left(-\left(\frac{e^2}{4F}\right)^{1/3}\frac{2E}{e^2}\right)=0\tag{2.26}$$

决定．(2.25)和(2.26)给出的能谱和连续理论一致，但对应的状态多了一倍[2]，即由正反费米子组成的介子态出现加倍．

三、Susskind 费米子方案

为了消去格点自由费米子的加倍，Susskind 引入 Susskind 费米子方案，把费米场不同分量定义于不同格点上．相应于 (2.5) 式的哈密顿量，Susskind 费米子方案的哈密顿量为

$$
\begin{aligned}
H = & \frac{1}{2} e^2 a \sum_x E(x)^2 \\
& + \sum_x \frac{F}{4a^2} (\xi^+(2x)U(2x, 1) - \xi^+(2x+2)U(2x+2, -1)) \\
& \times (U(2x+1, -1)\xi(2x) - U(2x+1, 1)\xi(2x+2)) \\
& + \sum_x \frac{F}{4a^2} (U(2x+2, -1)\eta^+(2x+1) - U(2x+2, 1)\eta^+(2x+3)) \\
& \cdot (\eta(2x+1)U(2x+1, 1) - \eta(2x+3)U(2x+3, -1)),
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

其中 $\xi^+(x)$ 和 $\xi(x)$ 只定义于偶格点，$\eta^+(x)$ 和 $\eta(x)$ 只定义于奇格点． 我们仍定义 $|0>$ 态为

$$E(x)|0\rangle = 0, \ \xi(2x)|0\rangle = 0, \ \eta(2x+1)|0\rangle = 0. \tag{3.2}$$

容易明白，$|0\rangle$ 为基态． 对应于(2.8)式的双费米子态为

$$|E\rangle = \sum_{x,n} f_E(2n+1)\xi^+(2x)U(2x, 2n+1)\eta^+(2x+2n+1)|0\rangle, \tag{3.3}$$

其中 $f_E(n)$ 只在 n 为奇数时有定义．若要求 $|E\rangle$ 为 H 的能量本征态，则有

$$f_E(2n+3) + f_E(2n-1) = \frac{2\left(\frac{|2n+1|}{2} + \frac{F}{e^2a^3} - \frac{E}{e^2a}\right)}{\frac{F}{e^2a^3}} f_E(2n+1). \tag{3.4}$$

(3.4)式只有唯一的一组解：

$$f_E(2n+1) = \begin{cases} \lambda^+ J_{\nu_{2n+1}}(z) & (2n+1>0) \\ \lambda^- J_{\nu_{-(2n+1)}}(z) & (2n+1<0), \end{cases} \tag{3.5}$$

其中 $\lambda^\pm$ 与 n 无关，z 和 $\nu_{\pm n}$ 仍按(2.14)式定义．解 (3.5) 对应于解 (2.19)．也就是说，Susskind 费米子方案成功地消去了解(2.13)，即消去了介子态的加倍．

四、结果与讨论

1. 我们准确求解了一个有费米子加倍的 $1+1$ 维格点 $U(1)$ 规范模型．由于双费米子态能量本征方程分解为没有耦合的两部分，我们得到两组互相独立的介子态．当 $a \to 0$ 时，两组态的能谱都趋于连续理论的能谱，状态比连续理论多了一倍，即介子态出现加

倍.

2. 当引入 Susskind 费米子方案，模型仍然可解．结果表明，Susskind 费米子方案成功地消除介子态加倍.

参　考　文　献

[1] J. B. Kogut, *Rev. Mod. Phys.*, **55**(1983), 775.
[2] 郑波、郭硕鸿，高能物理与核物理，**14**(1990)，
[3] 郑波、郭硕鸿，高能物理与核物理，**14**(1990)，
[4] 郑波、郭硕鸿，高能物理与核物理，**13**(1989)，696.
[5] G. N. Watson, Theory of Bessel function (University Press, Cambridge, 1944)

A(1+1)-DIMENSIONAL LATTICE *U*(1) GAUGE MODEL AND THE FERMION SPECIES DOUBLING

Zheng Bo

(Department of Physics Zhongshan University, Guangzhou)

Abstract

A(1+1)-dimensional lattice $U(1)$ gauge model with fermion species doubling is solved exactly. The results show that doubling exists for meson states composed of fermions and antifermions. Furthermore we prove that Susskind fermions can beat the doubling of meson states.