

具有动力学破缺的模型在有限温度和密度下的手征相变*

王恩科 李家荣

(华中师范大学粒子物理研究所, 武汉)

摘 要

作为一种定性的指导, 本文用近似方法考察了具有动力学破缺的模型的手征对称性恢复相变. 建立了模型的自洽方程; 给出了费米子的凝聚和质量以及系统的能量密度和比热对温度和密度的依赖关系. 结果表明在零化学势和有限温度情况, 手征相变是二级相变, 而在有限温度和密度及零温有限密度情况, 手征相变是一级相变且从破缺相到正常相的转变温度或密度不同于从正常相到破缺相的转变温度或密度.

一、引 言

在有限温度和密度下, 强相互作用理论中自发破缺的手征对称性能否得到恢复是近期人们一直感兴趣的课题之一^[1,2,3]. 在有限温度下的格点 QCD 理论, 用 Monte Carlo 方法计算了手征相变的序参量 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, 证实了有手征对称性恢复相变存在, 但由于如何在格点上引入费米子所带来的问题^[4] 以及计算机规模的限制, 使得关于相变等级的结论不能肯定^[5], 关于相变机制的研究难以深入, 在这种情况下, 人们转而讨论有关手征对称的模型理论在高温高密度下的行为^[2,3] 探索分析相变性质的有效计算方法, 为最终弄清 QCD 的手征相变问题创造条件. 注意到 QCD 的手征对称性自发破缺是通过费米子对凝聚体现的, 因而对存在费米子凝聚的模型理论的研究更具有吸引力, 在这方面, 若干作者采用温度格林函数方法讨论了 Nambu 模型^[3], 在我们前期的工作^[6] 中, 利用泛函方法建立了具有费米子凝聚的模型在有限温度下的自洽方程, 提出了通过求解自洽方程分析手征相变的方法.

分析序参量和热力学量在临界点附近的性质是研究相变的重要方法, 在这篇文章中, 利用 Walecka 的平均场近似^[6] 和 Linde 所提供的技巧^[7] 并借用 QCD 背景场理论的思想^[8], 试图用简捷的方法给出序参量所满足的自洽方程, 使其结果显示清晰的物理图象, 另外, 给出一种近似地计算系统的能量密度和比热方便可行的途径. 本文不仅得到了和文献[5]一致的自洽方程, 而且得到了系统的能量密度和比热随温度和密度的变化关

本文 1990 年 1 月 24 日收到.

* 国家自然科学基金资助课题.

系。所得到的结果表明: 在平均场近似下, 对于在零化学势(零净重子数密度)和有限温度情况, 手征相变是二级相变, 而在有限温度和密度及零温有限密度两种情况, 手征相变是一级相变。并给出了相应的相图。

二、模型及零温零化学势下的费米子凝聚和自洽方程

考虑具有手征对称性的如下模型^[9]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \quad (2.1a)$$

$$\mathcal{L}_0 = -\bar{\Psi}\gamma_\mu\partial_\mu\Psi - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_i\partial_\mu\phi_i - \frac{\mu^2}{2}\phi_i^2 - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_p\partial_\mu\phi_p - \frac{\mu^2}{2}\phi_p^2, \quad (2.1b)$$

$$\mathcal{L}_1 = g\bar{\Psi}\Psi\phi_i + ig\bar{\Psi}\gamma_5\Psi\phi_p. \quad (2.1c)$$

其中 Ψ 为核子场, ϕ_i 和 ϕ_p 分别为标量场和赝标量场。由此可得运动方程

$$[\gamma_\mu\partial_\mu - g(\phi_i + i\gamma_5\phi_p)]\Psi = 0, \quad (2.2a)$$

$$(\partial^2 - \mu^2)\phi_i = -g\bar{\Psi}\Psi, \quad (2.2b)$$

$$(\partial^2 - \mu^2)\phi_p = -ig\bar{\Psi}\gamma_5\Psi. \quad (2.2c)$$

对(2.2b)和(2.2c)两边取真空平均, 令

$$\sigma_i = \langle 0 | \phi_i | 0 \rangle, \quad \sigma_p = \langle 0 | \phi_p | 0 \rangle. \quad (2.3)$$

则有

$$\mu^2\sigma_i = g\langle 0 | \bar{\Psi}\Psi | 0 \rangle, \quad (2.4)$$

$$\mu^2\sigma_p = ig\langle 0 | \bar{\Psi}\gamma_5\Psi | 0 \rangle. \quad (2.5)$$

文献[9]的基本假定是拉氏量(2.1)的手征对称性是动力学自发破缺的, 宇称是守恒的。由于宇称守恒要求

$$\sigma_p = \langle 0 | \phi_p | 0 \rangle = 0, \quad (2.6)$$

而动力学自发破缺要求存在非零的费米子凝聚, 因此, 只有当 $\langle 0 | \bar{\Psi}\Psi | 0 \rangle \neq 0$ 时, 才满足基本假设。故(2.4)式就是模型的自洽方程。

借用 QCD 背景场理论^[10]的思想, 假设费米子场的非微扰效应由经典场(背景场) $\psi_c(x)$ 中的相互作用来描写, 而微扰效应由相对于背景场的量子涨落场 $\eta(x)$ 来描写, 对原始拉氏量中的费米子场作平移

$$\Psi(x) = \psi_c(x) + \eta(x), \quad (2.7)$$

代入(2.1)并注意到(2.2a)就是 $\psi_c(x)$ 满足的运动方程, 得到有效拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_c + \mathcal{L}^0 + \mathcal{L}^1, \quad (2.8a)$$

$$\mathcal{L}_c = -\bar{\psi}_c\gamma_\mu\partial_\mu\psi_c + g\bar{\psi}_c\psi_c\phi_i + ig\bar{\psi}_c\gamma_5\psi_c\phi_p, \quad (2.8b)$$

$$\mathcal{L}^0 = -\bar{\eta}\gamma_\mu\partial_\mu\eta - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_i\partial_\mu\phi_i - \frac{\mu^2}{2}\phi_i^2 - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_p\partial_\mu\phi_p - \frac{\mu^2}{2}\phi_p^2, \quad (2.8c)$$

$$\mathcal{L}^1 = g\bar{\eta}\eta\phi_i + ig\bar{\eta}\gamma_5\eta\phi_p. \quad (2.8d)$$

要精确计算 $\langle 0 | \bar{\psi}_c(x)\psi_c(x) | 0 \rangle$, 必须求解耦合运动方程(2.2), 这是极为困难的, 我们利用 Walecka 的平均场近似^[6], 即费米子运动方程中的玻色场算符用相应的真空平均值来代替, 注意到(2.6)式, 则 $\psi_c(x)$ 满足的运动方程为

$$(\gamma_\mu \partial_\mu - g\sigma_i)\psi_c = 0, \quad (2.9)$$

此方程是可精确求解的。必须指出的是上述方程的质量项出现一个人们所不熟悉的负号,这并不表示费米子的质量为负值,实质上(2.9)是通常的 Dirac 方程的一种等价描述形式(见附录),此时费米子的质量仍为

$$m = g\sigma_i. \quad (2.10)$$

同时它的费曼传播子也是可严格求出的,

$$S_F(0) = -\frac{1}{(4\pi)^4} \int \frac{d^4k}{\gamma \cdot k + im}. \quad (2.11)$$

此积分是发散的,引入三动量截断 $\Lambda^{[10]}$, 进行 Wick 转动后得到

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{\psi}_c \psi_c | 0 \rangle &= -\text{Tr} S_F(0) = \frac{m}{\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{|\mathbf{k}|^2 d|\mathbf{k}|}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}} \\ &= \frac{\Lambda^3 \hat{m}}{2\pi^2} \left[\sqrt{1 + \hat{m}^2} - \hat{m}^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \hat{m}^2}}{\hat{m}} \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

其中 $\hat{m} = \frac{m}{\Lambda}$. 为了方便,在下面的讨论中,用 Λ 对具有质量量纲的任一物理量 A 进行重新标度,采用记号 $\hat{A} \left(= \frac{A}{\Lambda} \right)$ 标记与物理量 A 对应的无量纲的量。此时,费米子凝聚对应的能量密度为

$$\begin{aligned} \varepsilon_c &= \frac{1}{V} \int d^3x \bar{\psi}_c (\gamma \cdot \nabla - m) \psi_c \\ &= -\frac{\Lambda^4}{4\pi^2} \left[(\sqrt{1 + \hat{m}^2})^3 - \frac{\hat{m}^2}{2} \left(\sqrt{1 + \hat{m}^2} + \hat{m}^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \hat{m}^2}}{\hat{m}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

在得到上式时,已取了和(2.12)相同的截断 Λ .

利用 Walecka 的平均场近似^[6],并注意到(2.6),由(2.8)我们得到 η 满足的方程

$$(\gamma_\mu \partial_\mu - m)\eta = 0, \quad (2.14)$$

此方程也是可精确求解的,在附录中已给出了它的平面波解,考虑到在真空态

$$\langle 0 | c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} | 0 \rangle = \langle 0 | d_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger d_{\mathbf{k}\sigma} | 0 \rangle = 0, \quad (2.15)$$

利用(A5)我们得到在零温零密度下的费米子凝聚

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle &= \langle 0 | \bar{\psi}_c \psi_c | 0 \rangle + \frac{1}{V} \langle 0 | \int : \bar{\eta}(x,0) \eta(x,0) : d^3x | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \bar{\psi}_c \psi_c | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.16)$$

其中：“:”表示取正规顺序。此时自洽方程(2.4)化为

$$\hat{m} F(\hat{m}) = 0, \quad (2.17a)$$

$$F(\hat{m}) = \hat{\mu}^2 - \frac{g^2}{2\pi^2} \left[\sqrt{1 + \hat{m}^2} - \hat{m}^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \hat{m}^2}}{\hat{m}} \right]. \quad (2.17b)$$

上述方程和用泛函方法导出的结果是一致的^[5]. 显然自洽方程存在一个平凡解 $\hat{m} = 0$, 对应无手征对称性破缺的情况,而非平凡解由 $F(\hat{m}) = 0$ 决定。在文献[5]中已给出截断 $\Lambda \approx 860 \text{ MeV}$.

三、有限温度和密度下的费米子凝聚和自洽方程

在零温零化学势情况, 物理可观察量由其真空平均值来描写, 对于温度为 T 化学势为 α 的热平衡系统, 相应的物理可观察量由 Gibbs 平均

$$\langle \dots \rangle^{\alpha\beta} = \frac{\text{Tr}\{\exp[-\beta(H \mp \alpha N)] \cdot \dots\}}{\text{Tr}\{\exp[-\beta(H \mp \alpha N)]\}}, \quad (3.1)$$

来描写, 其中 $\beta=1/T$. 为了方便, 本文用上标 $\alpha\beta$, α, β 分别标记有限温度和密度 ($\alpha \neq 0$, $T \neq 0$), 零温有限密度 ($T=0$, $\alpha \neq 0$) 及零化学势有限温度 ($\alpha=0$, $T \neq 0$) 情况下的物理量.

完全类似于零温零化学势情况, 对方程 (2.2b) 和 (2.2c) 两边取 Gibbs 平均, 得到和 (2.4) 对应的自洽方程. 引入背景场 $\psi_c(x)$ 以及相对于背景场的热涨落场 $\eta(x)$, 并把 Walecka 的平均场近似推广到有限温度和密度情况, 则可导出与 (2.9) 和 (2.14) 对应的背景场和热涨落场所满足的 Dirac 方程, 由此, 可得依赖于温度和化学势的费米子有效质量

$$m^{\alpha\beta} = g\sigma_i^{\alpha\beta}, \quad (3.2a)$$

$$\sigma_i^{\alpha\beta} = \langle \phi_i \rangle^{\alpha\beta}. \quad (3.2b)$$

将 (2.12) 中的 \hat{m} 换为 $\hat{m}^{\alpha\beta}$, 就得到相应的 $\langle \bar{\psi}_c \psi_c \rangle^{\alpha\beta}$.

注意到与零温零密度时的 (2.15) 不同, 在有限温度和密度下的粒子数密度 $\langle c_{k\sigma}^+ c_{k\sigma} \rangle^{\alpha\beta}$ 和 $\langle d_{k\sigma}^+ d_{k\sigma} \rangle^{\alpha\beta}$ 不再为零, 而由 Fermi-Dirac 分布函数决定, 即

$$\langle c_{k\sigma}^+ c_{k\sigma} \rangle^{\alpha\beta} = \frac{1}{\exp[\hat{\beta}(\sqrt{\hat{k}^2 + (\hat{m}^{\alpha\beta})^2} - \hat{\alpha})] + 1}, \quad (3.3a)$$

$$\langle d_{k\sigma}^+ d_{k\sigma} \rangle^{\alpha\beta} = \frac{1}{\exp[\hat{\beta}(\sqrt{\hat{k}^2 + (\hat{m}^{\alpha\beta})^2} + \hat{\alpha})] + 1}. \quad (3.3b)$$

由 (A5) 我们得到有限温度和密度下的费米子凝聚

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle^{\alpha\beta} = \langle \bar{\psi}_c \psi_c \rangle^{\alpha\beta} + \frac{1}{V} \left\langle : \bar{\eta}(x, 0) \eta(x, 0) : d^3x \right\rangle^{\alpha\beta} = \langle \bar{\psi}_c \psi_c \rangle^{\alpha\beta} - \langle \bar{\psi} \psi \rangle_{\alpha T}, \quad (3.4a)$$

$$\langle \bar{\psi}_c \psi_c \rangle^{\alpha\beta} = \frac{\Lambda^3 \hat{m}^{\alpha\beta}}{2\pi^2} \left[\sqrt{1 + (\hat{m}^{\alpha\beta})^2} - (\hat{m}^{\alpha\beta})^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 + (\hat{m}^{\alpha\beta})^2}}{\hat{m}^{\alpha\beta}} \right], \quad (3.4b)$$

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{\alpha T} = \frac{\Lambda^3 \hat{m}^{\alpha\beta}}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\hat{k}^2 d\hat{k}}{\sqrt{\hat{k}^2 + (\hat{m}^{\alpha\beta})^2}} (\langle c_{k\sigma}^+ c_{k\sigma} \rangle^{\alpha\beta} + \langle d_{k\sigma}^+ d_{k\sigma} \rangle^{\alpha\beta}). \quad (3.4c)$$

显然, $\langle \bar{\psi}_c \psi_c \rangle^{\alpha\beta}$ 描写有效质量为 $\hat{m}^{\alpha\beta}$ (它与温度和化学势有关) 的费米子在真空态中的凝聚, 它的贡献造成手征对称性的自发破缺, 而 $\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{\alpha T}$ 则是在有限温度和密度下有效质量为 $\hat{m}^{\alpha\beta}$ 的费米子热激发的贡献, (3.4a) 清楚地表明它的贡献导致在真空态中的费米子凝聚减弱, 使得在真空态凝聚的费米子“蒸发”.

与 (2.17) 对应, 我们可建立在有限温度和密度下的自洽方程

$$\hat{m}^{\alpha\beta} F(\hat{m}^{\alpha\beta}) = 0, \quad (3.5a)$$

$$F(\hat{m}^{\alpha\beta}) = \hat{\mu}^2 - \frac{g^2}{2\pi^2} \left[\sqrt{1 + (\hat{m}^{\alpha\beta})^2} - (\hat{m}^{\alpha\beta})^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 + (\hat{m}^{\alpha\beta})^2}}{\hat{m}^{\alpha\beta}} \right] + \frac{g^2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\hat{k}^2 d\hat{k}}{\sqrt{\hat{k}^2 + (\hat{m}^{\alpha\beta})^2}} (\langle c_{\mathbf{k}\sigma}^+ c_{\mathbf{k}\sigma} \rangle^{\alpha\beta} + \langle d_{\mathbf{k}\sigma}^+ d_{\mathbf{k}\sigma} \rangle^{\alpha\beta}). \quad (3.5b)$$

实质上上述方程给出了费米子有效质量的限制条件。

注意到在零温有限密度情况, (3.5b) 中与 $\langle c_{\mathbf{k}\sigma}^+ c_{\mathbf{k}\sigma} \rangle^{\alpha\beta}$ 有关的积分只有当满足条件 $\sqrt{\hat{k}^2 + (\hat{m}^{\alpha\beta})^2} \leq \hat{\alpha}$ 时被积函数才非零, 而与 $\langle d_{\mathbf{k}\sigma}^+ d_{\mathbf{k}\sigma} \rangle^{\alpha\beta}$ 有关的积分为零, 此时(3.5b)化为

$$F(\hat{m}^{\alpha}) = \hat{\mu}^2 - \frac{g^2}{2\pi^2} \left[\sqrt{1 + (\hat{m}^{\alpha})^2} - \hat{\alpha} \sqrt{\hat{\alpha}^2 - (\hat{m}^{\alpha})^2} - (\hat{m}^{\alpha})^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 + (\hat{m}^{\alpha})^2}}{\hat{\alpha} + \sqrt{\hat{\alpha}^2 - (\hat{m}^{\alpha})^2}} \right]. \quad (3.6)$$

由(3.5a)我们得到手征相变的判据是: 如果在某一温度 $\hat{\beta}$ 和化学势 $\hat{\alpha}$, 方程

$$F(\hat{m}^{\alpha\beta}) = 0 \quad (3.7)$$

存在非零的实根, 即 $\hat{m}^{\alpha\beta} \neq 0$, 则费米子处于手征对称性自发破缺的破缺相, 由(3.7)和(3.4)我们得到费米子的凝聚和费米子的质量满足关系

$$\frac{\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle^{\alpha\beta}}{\Lambda^3} = \frac{\hat{\mu}^2 \hat{m}^{\alpha\beta}}{g^2}. \quad (3.8)$$

反之, 若方程(3.7)只有零根或无实根, 由自洽方程(3.5a), 此时唯一可能的解是 $\hat{m}^{\alpha\beta} = 0$, 因而费米子处于无手征对称性自发破缺的正常相, 此时(3.8)式仍然成立. 因此, 作为描写手征相变的序参数, 选费米子的凝聚 $\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle^{\alpha\beta}$ 或费米子的质量 $\hat{m}^{\alpha\beta}$ 是等价的.

图 1(a), (b), (c) 分别给出了在零化学势有限温度, 零温有限密度及有限温度和密度情况下的费米子凝聚和有效质量随温度或化学势(密度)的变化关系.

对于零化学势有限温度情况, 图 1(a) 表明随着温度的升高, $\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle^{\beta} / \Lambda^3$ 和 m^{β} / Λ 逐渐减小, 并在临界温度 T_c , 连续地趋于零, 故此时手征对称性恢复相变是二级相变.

在零温有限密度情况, 从图 1(b) 可清楚地看出存在两个转变密度, 它们对应的化学势分别为 $\alpha_{c_1} = 0.72\Lambda$ 和 $\alpha_{c_2} = 1.17\Lambda$. 由于方程(3.7)是一个超越方程, 在有限温度和密度情况, 对于某一确定的化学势 α , 结果表明存在两个转变温度 T_{c_1} 和 T_{c_2} , 当 $T_{c_1} < T < T_{c_2}$ 时, 超越方程(3.7)存在两个非零的实根, 图 1(c) 给出了当 $\alpha = 0.6\Lambda$ 时的情况, 此时 $T_{c_1} \approx 0.20\Lambda$, $T_{c_2} \approx 0.26\Lambda$. 因此对于这两种情况, 手征相变的转变密度或转变温度与费米子所处的初始相有关. 若费米子的初始相处于零化学势或零温的破缺相, 随着密度或温度的增加并达到转变密度(对应的化学势为 α_{c_2}) 或转变温度 T_{c_2} , 费米子的凝聚和质量突然消失, 发生如图 1 箭头 A 所示的不连续的一级相变. 反之, 若费米子的初始相处于密度很高或温度很高的正常相, 只有当密度或温度降至另一更低的转变密度(对应的化学势为 α_{c_1}) 或温度 T_{c_1} 时, 费米子的凝聚突然发生, 同时费米子也获得质量, 此过程也是一级相变, 如图 1 箭头 B 所示.

在有限温度和密度情况, 给定不同的化学势 α , 可求出相应的转变温度 T_{c_1} 和 T_{c_2} , 由此我们得到模型的手征相变相图如图 2 所示. 在图 2 中出现两条相曲线, 由前面的讨论这是不难理解的. 曲线 1 和曲线 2 分别对应费米子的初始相处于破缺相和正常相的相曲

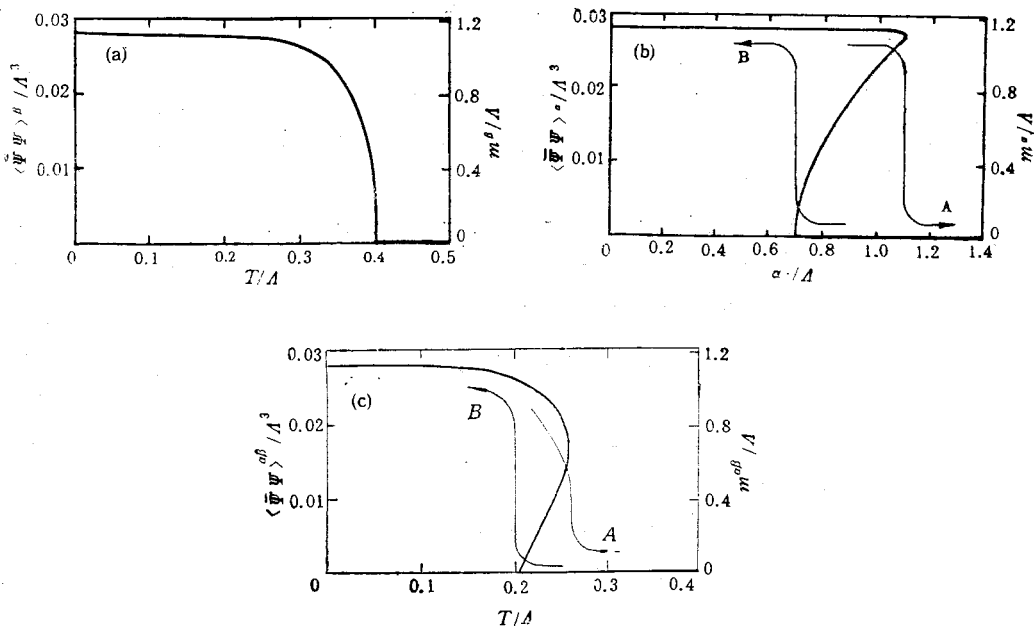


图 1 费米子的凝聚和质量随温度或密度的变化关系
 (a) 零化学势有限温度, (b) 零温有限密度, (c) 有限温度和密度

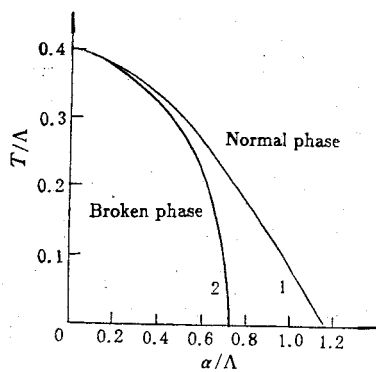


图 2 模型的手征相变相图

线.

四、有限温度和密度下系统的能量密度和比热

考虑具有拉氏量 (2.1) 的热平衡系统, 要精确地求出系统的能量密度是相当困难的, 我们采用 Linde 所提供的技巧^[7], 可近似地确定系统的能量密度。首先, 把玻色场相对于它的 Gibbs 平均值作平移, 由于宇称守恒要求赝标量场的 Gibbs 平均值为零, 即

$$\sigma_p^{ab} = \langle \phi_p \rangle^{ab} = 0. \tag{4.1}$$

因此, 只需平移标量场 $\phi_i(x)$, 即

$$\phi_i(x) \rightarrow \phi_i(x) + \sigma_i^{\alpha\beta}, \quad (4.2)$$

显然, 平移后的标量场 $\phi_i(x)$ 满足

$$\langle \phi_i(x) \rangle^{\alpha\beta} = 0. \quad (4.3)$$

为了清楚地看出费米子凝聚对能量密度的影响, 引入背景场后, 由有效拉氏量 (2.8), 平移后的哈密顿量可写为

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_c + \mathcal{H}_\eta + \mathcal{H}_{\phi_s} + \mathcal{H}_{\phi_p} + \mathcal{H}_I, \quad (4.4a)$$

$$\mathcal{H}_c = \bar{\Psi}_c(\gamma \cdot \nabla - m^{\alpha\beta})\Psi_c, \quad (4.4b)$$

$$\mathcal{H}_\eta = \bar{\eta}(\gamma \cdot \nabla - m^{\alpha\beta})\eta, \quad (4.4c)$$

$$\mathcal{H}_{\phi_s} = \frac{1}{2} [\dot{\phi}_s^2 + (\nabla\phi_s)^2 + \mu^2\phi_s^2], \quad (4.4d)$$

$$\mathcal{H}_{\phi_p} = \frac{1}{2} [\dot{\phi}_p^2 + (\nabla\phi_p)^2 + \mu^2\phi_p^2], \quad (4.4e)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I = & \frac{\mu^2}{2} (\sigma_i^{\alpha\beta})^2 + \mu^2\phi_s\sigma_i^{\alpha\beta} - g\bar{\eta}\eta\phi_s - ig\bar{\eta}\gamma_5\eta\phi_p \\ & - g\bar{\Psi}_c\Psi_c\phi_s - ig\bar{\Psi}_c\gamma_5\Psi_c\phi_p. \end{aligned} \quad (4.4f)$$

Linde 技巧的关键之处在于对平移到真空态的各个玻色场看作在真空态附近的涨落场, 可近似地作为自由场而作如下的展开

$$\phi_s(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (a_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}), \quad (4.5a)$$

$$\phi_p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (b_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}), \quad (4.5b)$$

其中 $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}$, $a_{\mathbf{k}}$, $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ 和 $b_{\mathbf{k}}$, $b_{\mathbf{k}}^\dagger$ 分别为标量粒子和赝标量粒子的消灭和产生算子. 且近似地认为各个不同的涨落场之间无关联, 而作如下处理

$$\langle \bar{\eta}\eta\phi_s \rangle^{\alpha\beta} = \langle \bar{\eta}\eta \rangle^{\alpha\beta} \langle \phi_s \rangle^{\alpha\beta} = 0, \quad (4.6a)$$

$$\langle \bar{\eta}\gamma_5\eta\phi_p \rangle^{\alpha\beta} = \langle \bar{\eta}\gamma_5\eta \rangle^{\alpha\beta} \langle \phi_p \rangle^{\alpha\beta} = 0. \quad (4.6b)$$

上式变为零, 是由于(4.1)和(4.3)式的结果. 由哈密顿量(4.4)并利用上述近似, 可导出系统的能量密度

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_c^{\alpha\beta} + \frac{1}{V} \left\langle d^3x (: \mathcal{H}_\eta : + : \mathcal{H}_{\phi_s} : + : \mathcal{H}_{\phi_p} : + : \mathcal{H}_I :) \right\rangle^{\alpha\beta} \\ &= \varepsilon_c^{\alpha\beta} + \frac{\Lambda^4}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d^3\hat{k} \sqrt{\hat{k}^2 + \hat{\mu}^2} (\langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle^\beta + \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \rangle^\beta) \\ &\quad + \frac{2\Lambda^4}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d^3\hat{k} \sqrt{\hat{k}^2 + (\hat{m}^{\alpha\beta})^2} (\langle c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} \rangle^{\alpha\beta} + \langle d_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger d_{\mathbf{k}\sigma} \rangle^{\alpha\beta}) + \frac{\Lambda^4 \hat{\mu}^2 (\hat{m}^{\alpha\beta})^2}{2g^2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

其中 $\varepsilon_c^{\alpha\beta}$ 是费米子凝聚对应的能量密度, 将(2.13)式中的 \hat{m} 用 $\hat{m}^{\alpha\beta}$ 代替, 就得

$$\begin{aligned} \varepsilon_c^{\alpha\beta} = & -\frac{\Lambda^4}{4\pi^2} \left[(\sqrt{1 + (\hat{m}^{\alpha\beta})^2})^3 - \frac{(\hat{m}^{\alpha\beta})^2}{2} (\sqrt{1 + (\hat{m}^{\alpha\beta})^2}) \right. \\ & \left. + (\hat{m}^{\alpha\beta})^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 + (\hat{m}^{\alpha\beta})^2}}{\hat{m}^{\alpha\beta}} \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

(4.7) 式中的第二, 三项分别对应热激发的玻色子和费米子对能量密度的贡献, 第四项是由于平移标量场对能量密度的影响. 注意到(4.7)和费米子的有效质量 $\hat{m}^{\alpha\beta}$ 直接相关, 而 $\hat{m}^{\alpha\beta}$ 由费米子的凝聚所决定并依赖于系统的温度和密度. 因此费米子的凝聚对系统的能量密度随温度或密度变化的特征起着重要的作用. 我们假设玻色子的化学势为零, 因此

$$\langle a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} \rangle^{\beta} = \langle b_{\mathbf{k}}^{\dagger} b_{\mathbf{k}} \rangle^{\beta} = \frac{1}{\exp(\beta\sqrt{k^2 + \hat{\mu}^2}) - 1}. \quad (4.9)$$

由(4.7)可求出系统的比热

$$c = \frac{d\varepsilon}{dT} = \begin{cases} \frac{\partial\varepsilon}{\partial T} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial m^{\alpha\beta}} \frac{\partial m^{\alpha\beta}}{\partial T}, & (\text{破缺相}) \\ \frac{\partial\varepsilon}{\partial T} \Big|_{m^{\alpha\beta}=0}, & (\text{正常相}) \end{cases} \quad (4.10)$$

其中 $\partial\varepsilon/\partial T$, $\partial\varepsilon/\partial m^{\alpha\beta}$ 很容易由(4.7)求出. 由上节的讨论我们知道对于破缺相, 方程 $F(\hat{m}^{\alpha\beta}) = 0$ 有非零实根, 显然此时必定有

$$\frac{dF}{dT} = \frac{\partial F}{\partial T} + \frac{\partial F}{\partial m^{\alpha\beta}} \frac{\partial m^{\alpha\beta}}{\partial T} = 0, \quad (4.11)$$

因此

$$\frac{\partial m^{\alpha\beta}}{\partial T} = - \frac{\partial F/\partial T}{\partial F/\partial m^{\alpha\beta}}. \quad (4.12)$$

由(3.5b)很容易求出 $\partial F/\partial T$ 和 $\partial F/\partial m^{\alpha\beta}$.

图 3(a), (b) 分别给出了在零化学势有限温度情况费米子的初始相为破缺相时系统的能量密度和比热随温度的变化关系. 结果表明能量密度随温度的变化是连续的, 而比热在临界点形成一个 λ 点, 呈现二级相变的特征.

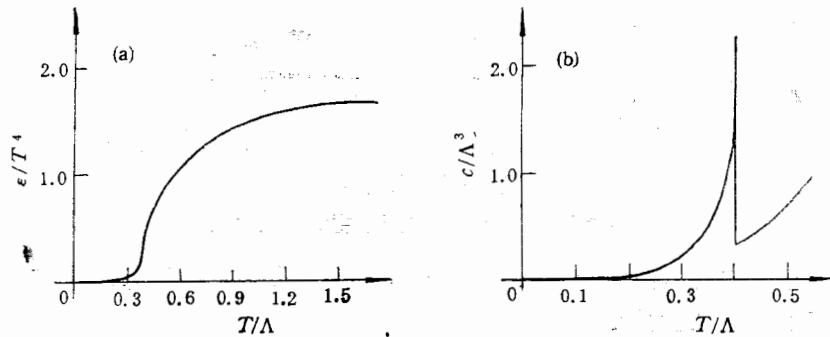


图 3 在零化学势有限温度情况

(a) 能量密度, (b) 比热随温度的变化关系

在零温有限密度情况, 能量密度(4.7)化为

$$\varepsilon = \frac{\Lambda^4 \hat{\mu}^2 (\hat{m}^\alpha)^2}{2g^2} - \frac{\Lambda^4}{4\pi^2} \left[(\sqrt{1 + (\hat{m}^\alpha)^2})^3 - \hat{\alpha}^3 \sqrt{\hat{\alpha}^2 - (\hat{m}^\alpha)^2} - \frac{(\hat{m}^\alpha)^2}{2} (\sqrt{1 + (\hat{m}^\alpha)^2} - \hat{\alpha} \sqrt{\hat{\alpha}^2 - (\hat{m}^\alpha)^2} + (\hat{m}^\alpha)^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 + (\hat{m}^\alpha)^2}}{\hat{\alpha} + \sqrt{\hat{\alpha}^2 - (\hat{m}^\alpha)^2}} \right)]. \quad (4.13)$$

若费米子的初始相为破缺相,系统的能量密度随化学势的变化关系如图4所示.可清楚地看出当费米子的密度达到转变密度(对应的化学势 $\alpha_{c_2} = 1.17\Lambda$)时,能量密度呈现一级相变的不连续的有限跳跃.

在有限温度和密度情况,若费米子的初始相为破缺相,对于给定的化学势 α ,结果表明:在转变温度 $T = T_{c_2}$,能量密度有一个有限的不连续跳跃,而比热呈现一个无穷大的不连续跳跃,呈现一级相变的特征,图5(a),(b)分别给出了当 $\alpha = 0.6\Lambda$ 时的计算结果.

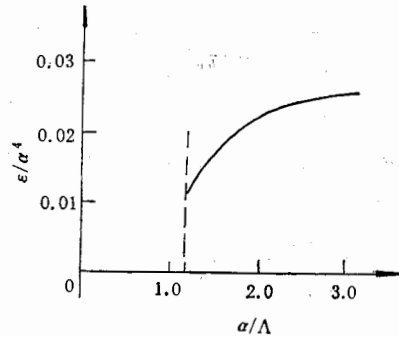


图4 零温有限密度情况,能量密度随化学势的变化关系

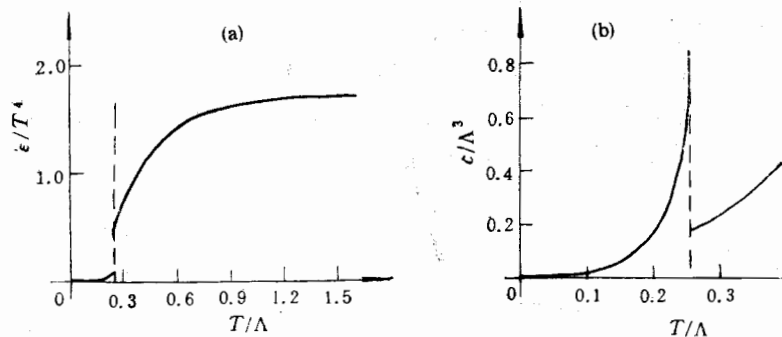


图5 在有限温度和密度情况

(a) 能量密度, (b) 比热随温度的变化关系

当计及费米子密度后,系统发生一级相变,可以通过该模型在有限温度和密度下的有效势来验证,我们将另文讨论.

感谢刘连寿教授,裘忠平副教授,庄鹏飞和沈坤同志的有益建议.感谢在 CCAST-WL 相对论性重离子碰撞及强子结构和原子核性质两个专题工作月中进行的有益讨论.

附 录

在 Dirac 方程(2.9)和(2.14)中,质量项出现一负号,它实质上是通常的 Dirac 方程的一种等价描述形式. 我们知道费米场 ψ 的所有四个分量都满足 Klein-Gordon 方程,而 Klein-Gordon 方程可采取如下两种方式因子化,

$$\begin{aligned}
 (\partial^2 - m^2)\Psi &= (\gamma_1 \partial_1 - m)(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi \\
 &= (\gamma_1 \partial_1 + m)(\gamma_\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0.
 \end{aligned}
 \tag{A1}$$

因此 Dirac 方程可取为

$$(\gamma_\mu \partial_\mu \pm m)\Psi = 0, \tag{A2}$$

“+”号是人们通常所采用的形式,“-”号就是在(2.9)和(2.14)中出现的形式。虽然这两个方程等价,但它们平面波解的形式不同。对于取“-”号情况,容易求出场算符的平面波解为

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \sqrt{\frac{m}{E_k}} \sum_{\sigma=1}^2 (u_{k\sigma} c_{k\sigma} e^{ik \cdot x} + v_{k\sigma} d_{k\sigma}^+ e^{-ik \cdot x}), \tag{A3a}$$

$$u_{k\sigma} = \left(\frac{E_k + m}{2m} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{\sigma \cdot k}{E_k + m} \xi_\sigma \\ \xi_\sigma \end{pmatrix}, \tag{A3b}$$

$$v_{k\sigma} = \left(\frac{E_k + m}{2m} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \xi_\sigma \\ \frac{\sigma \cdot k}{E_k + m} \xi_\sigma \end{pmatrix}. \tag{A3c}$$

其中 $\sigma = 1, 2$, $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_k = \sqrt{k^2 + m^2}$, (A3b), (A3c) 中引进的因子是为了保证归一化条件

$$\bar{u}_{k\sigma} u_{k\sigma'} = -\delta_{\sigma\sigma'}, \tag{A4a}$$

$$\bar{v}_{k\sigma} v_{k\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}. \tag{A4b}$$

(A3b), (A3c), (A4a), (A4b) 和通常采用的 Dirac 方程导出的结果不同。

容易求得

$$\frac{1}{V} \int d^3x : \bar{\Psi}(x, 0) \Psi(x, 0) : = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{m}{E_k} \sum_{\sigma=1}^2 (c_{k\sigma}^+ c_{k\sigma} + d_{k\sigma}^+ d_{k\sigma}). \tag{A5}$$

及哈密顿量

$$\begin{aligned}
 H_\Psi &= \int d^3x : \bar{\Psi}(\gamma \cdot \nabla - m)\Psi : \\
 &= \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \sqrt{k^2 + m^2} \sum_{\sigma=1}^2 (c_{k\sigma}^+ c_{k\sigma} + d_{k\sigma}^+ d_{k\sigma}).
 \end{aligned}
 \tag{A6}$$

参 考 文 献

- [1] For a review, see, J. Cleymans, R. V. Gavai and E. Suhonen, *Phys. Rep.*, **130**(1986), 217; Also see, F. Karsch, in Proc. Vith Intern. Conf. on Ultrarelativistic Heavy Ion Collision-Quark Matter 1987, *Z. Phys.*, **C38**(1988), 147; A. Ukawa, in Proc. 7th Intern. Conf. on Ultra-relativistic Nucleus-Nucleus Collision 1988, *Nucl. Phys.*, **A489**(1989), 227c.
- [2] J. D. Anand, R. Basu, S. N. Biswas, A. Goyal and S. K. Soni, *Phys. Rev.*, **D34**(1986), 2133; H. Forkel, A. D. Jackson, M. Rho, C. Weiss, A. Wirzba and H. Bang, *Nucl. Phys.*, **A504**(1989), 818.
- [3] S. Kawati and H. Miyata, *Phys. Rev.*, **D23**(1981), 3010; T. Hatsuda and T. Kunihiro, *Phys. Rev. Lett.*, **55**(1985), 158; H. Reinhardt and B. V. Dang, *J. Phys.*, **G13**(1987), 1179; M. Asakawa and K. Yazaki, *Nucl. Phys.*, **A504**(1989), 668.
- [4] H. B. Nielsen and M. Nimomiya, *Nucl. Phys.* **B185**(1981), 20; *Phys. Lett.*, **B105**(1981), 219.
- [5] Liu Baohua and Li Jiarong, *Phys. Rev.*, **D37**(1988), 190.
- [6] J. D. Walecka, *Ann. Phys.*, (N. Y.) **83**(1974), 491; *Phys. Lett.*, **B59**(1975), 109.
- [7] For a review, see, A. D. Linde, *Rep. Prog. Phys.*, **42**(1979), 389.
- [8] See, for example, Tao Huang and Zheng Huang, *Phys. Rev.*, **D39**(1989), 1213.
- [9] D. Lurie, *Particle and Field* (Interscience, New York) (1968) p. 453; D. Lurie and A. J. Macfarlane,

Phys. Rev., **136B**(1964), 816.

[10] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.*, **122**(1961), 345; **124**(1961), 246.

CHIRAL PHASE TRANSITION IN A MODEL WITH DYNAMICAL SPONTANEOUS-SYMMETRY- BREAKING AT FINITE TEMPERATURE AND DENSITY

WANG ENKE LI JIARONG

(*Institute of Particle Physics, Hua-Zhong Normal University, Wuhan*)

ABSTRACT

The chiral-symmetry-restoring phase transition in a model with dynamical spontaneous-symmetry-breaking is discussed qualitatively, making use of an approximation method. The self-consistency equation of the model is established. The condensation and mass of fermions as well as the temperature or density dependence of energy density and specific heat are obtained. It turns out that, in this approximation, the chiral-phase-transition is second order at zero chemical potential and finite temperature; and the transition is first order for both cases at finite temperature and density and at zero temperature and finite density, this moment. the transition temperature or density from broken phase to normal phase differs from that from normal phase to broken phase.