第12卷 第5期　高能物理与核物理　Vol. 12, No. 5
1988年9月　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　Sept., 1988

快报

一个正规化方案及弦理论中的共形反常

陈　伟
(Center of Theoretical Physics CCAST(World Laboratory))
(中国科学院高能物理研究所，北京)

摘　要

本文建议一个改进的正规化方法;并讨论玻色弦以及超弦的共形反常.

在量子场论的反常研究中,需要处理发散的无限求和

$$A(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i^+(x)\varphi_i(x) \tag{1}$$

这里，$\{\varphi_i(x)\}$ 是实厄米算子 $R^\dagger R$ 的本征函数,满足:

$$R^\dagger R\varphi_i(x)=\lambda_i^2\varphi_i(x),\ \int d^Dx\varphi_i^+(x)\varphi_j(x)=\delta_{ij}$$

以及

$$\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i^+(x)\varphi_i(y)=\delta^D(x-y).$$

对此,人们采取的办法是做正规化,以控制发散并得到有意义的结果．一个广泛使用的正规化是插人一个正规化因子 $\exp(-\lambda_i^2/M^2)$，结果,正规化以后的无限求和可展开为参数 M^2 的幂级数

$$A_{\rm reg}(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i^+(x)e^{-\lambda_i^2/M^2}\varphi_i(x)=a(x)M^2+b(x)+O(1/M^2). \tag{2}$$

在这个方法中 M^2 的作用有些微妙：当(2)式中 M^2 趋于零时，第三项趋零，但第一项发散;而当 M^2 解释为一个大动量截断,第一项有限,不过第三项又有非零的贡献．实际上,预先放上一个参数M^2是没有必要的．本文试图改进对(1)做正规化的处理．这一改进大大简化了计算,并使控制发散的截断更自然更清楚．直接对(1)式做正规化的办法特别适于弦的共形反常的研究,因为在那里,指标定理不能直接应用(理由见后).

相对论性弦具有定域的 Weyl 重标度不变． 这个不变性导致经典弦的能量动量张量无迹．但是,量子化一般说来会破坏 Weyl 重标度不变性,这时将出现共形反常(亦称迹反常)．共形反常的存在使得理论不自洽． 一些作者研究了这一问题．Polyakov[2] 首

本文 1988 年 3 月 10 收到.

先指出，弦在其临界维数，共形反常消去. Fujikawa[3] 用泛函积分方法重新推算了玻色弦的临界维数；其它人[4]将此方法应用到其它弦模型. 此外，Alvarez[5] 试图了解共形反常的拓扑意义，他用族指标定理得到了同样的结果. 不过，为什么能用族指标定理，原因尚不清楚. 本文，给出正规化方法之后，将回到这个问题上来. 我们看到，尽管指标定理不能直接用于推导弦的共形反常，因为后者正比于 Eular 示性数，共形反常实际上也是一个拓扑不变量.

我们来做对(1)式的正规化，定义

$$A_{\text{reg}}(x) = \oint_c \frac{dz}{2\pi i} \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i^+(x) \frac{1}{z + R^+R} \varphi_i(x) \tag{3}$$

上式中，z 复平面上的积分沿含被积函数的极点的迴路 c 进行. 注意操作次序：先求和 $\sum_{i=1}^{\infty}$，然后积分 $\oint_c dz$. 如果将次序反过来，我们将回到(1). 求和定义好了，做(3)式中基从 $\{\varphi_i(x)\}$ 到 $\{e^{ik\cdot x}\}$ 的变换则是合法的. 在此基的变换下，

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i^+(x) \frac{1}{z + R^+R} \varphi_i(x) = \mathrm{Tr} \frac{1}{z + R^+R} = \mathrm{tr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{ik\cdot x} \frac{1}{z + R^+R} e^{-ik\cdot x}. \tag{4}$$

为具体起见，我们已取时空维数 $D = 2$，(这对应于弦的情形)但推广到任意 $D = 2n$ 是不困难的. (4)式右边的 tr 对(可能存在的) Dirac 指标和规范指标操作. 将(4)式中 $e^{-ik\cdot x}$ 对易到 $\frac{1}{z + R^+R}$ 的左边来，设算子 R 含微分 z_a 只到一阶，则有

$$R^+R = -k^2 - \hat{K} - \hat{Q}. \tag{5}$$

(5)式中，算子 $\hat{K} = k_a\hat{P}_a$，$\hat{P}_a$ 和 $\hat{Q}$ 是 k_a 无关的. 对于弦理论，(5)式右边还有一共形因子 $\rho^{-1}(x)$，这里暂时略去. 根据(5)式，可以将 $\frac{1}{z + R^+R}$ 做展开

$$\frac{1}{z + R^+R} = \frac{1}{z - k^2} + \frac{1}{z - k^2}(\hat{K} + \hat{Q})\frac{1}{z - k^2} + \frac{1}{z - k^2}(\hat{K} + \hat{Q})\frac{1}{z - k^2}(\hat{k} + \hat{Q})\frac{1}{z - k^2} + \cdots \tag{6}$$

注意到公式

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x^{m_1}}{(z - x)^{m_2}} = \frac{(-)^{m_1+1}}{z^{m_2-m_1-1}} B(m_2 - m_1 - 1、m_1 + 1)$$

和

$$\oint_c \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{zn} = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases},$$

可以证明，(6)式中只有前几项对(3)式有贡献，即有

$$A_{\text{reg}}(x) = \oint_c \frac{dz}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{dk^2}{4\pi} \left(\frac{1}{z - k^2} + \frac{1}{z - k^2} \hat{Q} \frac{1}{z - k^2} + \frac{1}{z - k^2} \hat{K} \frac{1}{z - k^2} \hat{K} \frac{1}{z - k^2} \right). \tag{7}$$

上式中，第一项对 $\int dk^2$ 的积分是对数发散的，这一发散可简单地用动量截断 μ^2 来控制

$$\oint_c \frac{dz}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{dk^2}{4\pi}\frac{1}{z-k^2} \to \oint_c \frac{dz}{2\pi i}\int_0^{\mu^2} \frac{dk^2}{4\pi}\frac{1}{z-k^2} = \frac{1}{4\pi}\mu^2. \tag{8}$$

(7)式中后两项的计算有赖于算子 $\hat{Q}$ 和 $\hat{R}$ 的形式，但这两项是有限的，对反常有非平庸的贡献．

至此，我们完成了正规化方案的形式表述．现在讨论具体问题，首先是玻色弦．

玻色弦协变作用量

$$S = -\frac{1}{2}\int d^2\sigma\sqrt{g}\, g^{ab}z_aX^\rho z_bX_\mu \tag{9}$$

具有定域重参数化不变性和 Weyl 重标度不变性．为了确切地定义（量子化）弦的泛函积分，我们将二维 Minckovski 空间 Wick 转动到 Euclidean 空间；同时引入 Faddeev-Popov 鬼 $\eta(\sigma)=\begin{pmatrix}\eta^1(\sigma)\\ \eta^2(\sigma)\end{pmatrix}$ 和 $\xi(\sigma)=\begin{pmatrix}\xi^1(\sigma)\\ \xi^2(\sigma)\end{pmatrix}$ 以固定规范到 $g_{12}(\sigma)=0$，$g_{11}(\sigma)-g_{22}(\sigma)=0$．亦即选取共形规范 $g_{ab}(\sigma)=\delta_{ab}\rho(\sigma)$，在此规范下，相应于(9)式的 BRST 不变的泛函积分[3]是

$$Z=\int\prod_\sigma [dc][d\tilde{X}^\mu][d\xi][d\tilde{\eta}]e^{-S'}=\int\prod_\sigma [dc]Z[\rho] \tag{10a}$$

$$S'=\frac{1}{2}\int d^2\sigma\partial_a\frac{\tilde{X}^\mu}{\sqrt{\rho}}\partial_a\frac{\tilde{X}^\mu}{\sqrt{\rho}}+\int d^2\sigma\xi\sqrt{\rho}\,\not{\partial}\,\frac{1}{\rho}\tilde{\eta} \tag{10b}$$

其中，$|c|=\sqrt{\rho}$，$\not{\partial}=\gamma'\partial_1+\gamma^3\partial_3$，$\gamma^i$ 是 Pauli 矩阵；$\tilde{X}^\mu=\sqrt{\rho}X^\mu$ 和 $\tilde{\eta}=\rho\eta$ 是独立变量．作用量（10b）在 Weyl 重标度变换

$$\begin{aligned}&\rho(\sigma)\to e^{\alpha(\sigma)}\rho(\sigma),\quad \tilde{X}^\mu(\sigma)\to e^{-\frac{1}{2}\alpha(\sigma)}\tilde{X}^\mu(\sigma)\\ &\xi(\sigma)\to e^{-\frac{1}{2}\alpha(\sigma)}\xi(\sigma),\tilde{\eta}(\sigma)\to e^{\alpha(\sigma)}\tilde{\eta}(\sigma)\end{aligned} \tag{11}$$

下不变．

定义真空泛函 $W[\rho]$，根据(10)式，我们有

$$W[\rho]=\ln Z[\rho]=-\frac{D}{2}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln(R_0^+R_0)+\mathrm{Tr}\ln R_1 \tag{12}$$

这里已经用了标记（n 取整数或半整数）

$$R_n=\rho(\sigma)^{\frac{n}{2}}\not{\partial}\rho(\sigma)^{-\frac{n+1}{2}} \tag{13}$$

算子 R_n 一般说来不是厄米的，因此 $\det R_n$（相应的 $\mathrm{Tr}\ln R_n$）应理解为

$$\det R_n=\sum_i\int d^2\sigma v_{ni}^+(\sigma)R_nu_{ni}(\sigma) \tag{14}$$

其中，两分量函数 $v_{ni}(\sigma)$ 和 $u_{ni}(\sigma)$ 满足

$$R_nu_{ni}=\lambda_{ni}v_{ni},\quad R_n^+v_{ni}=\lambda_{ni}u_{ni}, \tag{15a}$$

$$R_n^+R_nu_{ni}=\lambda_{ni}^2u_{ni},\quad R_nR_n^+v_{ni}=\lambda_{ni}^2v_{ni}, \tag{15b}$$

$\{u_{ni}\}$，$\{v_{ni}\}$ 分别形成一个完备集．

现在来看在标度变换(11)下，$W[\rho]$ 的变化．用到与变换(11)相应的算子的变换

$$\delta(R_0^+R_0) = \left\{-\frac{1}{2}\alpha(\sigma),\ R_0^+R_0\right\},\quad \delta R_1 = \frac{1}{2}\alpha(\sigma)R_1 - R_1\alpha(\sigma). \tag{16}$$

可以得到

$$\delta W[\rho] = \frac{D}{4}\int d^2\sigma\alpha(\sigma)\left[\sum_i u_{0i}^+(\sigma)u_{0i}(\sigma) + \frac{1}{2}\sum_i v_{1i}^+(\sigma)v_{1i}(\sigma) - \sum_i u_{1i}^+(\sigma)u_{1i}(\sigma)\right]. \tag{17}$$

注意上式方括号中第二项的系数因子 $\frac{1}{2}$，这是由于鬼场 $\tilde{\eta}$ 和 ξ 的差因子的 Weyl 变换(见(11)式，也见(16)式)．正是这个因子，使鬼场对反常的贡献不能由指标定理直接算出．我们直接计算(17)式．如前所述，(17)式方括号中的求和都是发散的，我们按前面引入的方法来做正规化．根据算子 R_n 的定义(13)式，则有

$$R_n^+R_n = -\rho^{-1}(\sigma)(\not{k}^2 + \hat{K} + \hat{Q}) \tag{18}$$

$$\hat{K} = i\left(\not{k}\not{\partial} + \not{\partial}\not{k} - \frac{n+1}{2}\not{k}(\not{\partial}\ln\rho) + \frac{n-1}{2}(\not{\partial}\ln\rho)\not{k}\right) \tag{19}$$

$$\hat{Q} = (\not{\partial}\ln\rho)\not{\partial} - \not{\partial}\not{\partial} + \frac{n+1}{2}\frac{n-1}{2}(\not{\partial}\ln\rho)^2 + \frac{n+1}{2}\partial^2\ln\rho \tag{20}$$

既已给定算子 $\hat{K}$ 和 $\hat{Q}$，$A_{n\mathrm{reg}}(\sigma)$ 的计算是直接的，结果是

$$A_{n\mathrm{reg}}(\sigma) = \oint_c \frac{dz}{2\pi i}\mathrm{Tr}\frac{1}{z + R_n^+R_m} = \frac{1}{4\pi}\rho(\sigma)\mu^2 + \frac{3n+1}{3}\frac{1}{4\pi}(-\partial^2\ln\rho(\sigma)) \tag{21}$$

让我们先来看一个副产品．容易证明算子关系 $R_n^+ = R_{-n-1}$．计算

$$\int_M d^2\sigma\left[\oint_c \frac{dz}{2\pi i}\mathrm{Tr}\frac{1}{z + R_n^+R_n} - \oint_c \frac{dz}{2\pi i}\mathrm{Tr}\frac{1}{z + R_nR_n^+}\right]$$

$$= \frac{2n+1}{4\pi}\int_M d^2\sigma(-\partial^2\ln\rho(\sigma)) = (2n+1)\chi(M) \tag{22}$$

在后一个等式中，我们用了$\sqrt{g}R = -\partial^2\ln\rho(\sigma)$ 和 Gauss-Bonnet 定理

$$\chi(M) = \frac{1}{4\pi}\int_M d^2\sigma\sqrt{g}R.$$

(23)式左边实际上是算子 $R_n^+R_n$ 和 $R_nR_n^+$ 的零模数目之差，因为两个算子的非零模贡献一一对应互相消去．另一方面，容易证明 $\mathrm{Ker}R_n^+R_n = \mathrm{Ker}R_n$，$\mathrm{Ker}R_nR_n^+ = \mathrm{Ker}R_n^+$，因此，(23)式给出关于算子 R_n 的 Riemann-Roch 定理的一个表述．

不过，在我们的问题中，Riemann-Roch 定理不能直接应用．这是因为由于前面提到的因子 $\frac{1}{2}$，使得不仅零模，算子 $R_n^+R_n$ 和 $R_nR_n^+$ 的高模对反常也有贡献． 用我们的办法，将(21)式取 $n = 0$，-2 和 1 代入(17)式，即有

$$\delta W[\rho] = \frac{D-26}{12}\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\alpha(\sigma)(-\partial^2\ln\rho) + \frac{D-2}{4}\frac{\mu^2}{4\pi}\int d^2\sigma\alpha(\sigma)\rho(\sigma) \tag{23}$$

因此，玻色弦的共形反常可表述为

$$\frac{\delta W[\rho]}{\delta\alpha}=\frac{D-26}{12}\frac{1}{4\pi}(-\partial^2\ln\rho)+\frac{D-2}{4}\frac{\mu^2}{4\pi}\rho(\sigma). \tag{24}$$

上式第二项能够吸收到一个可解释为二维面上的宇宙常数项的定域附加项中去．而第一项是非平庸的反常，对二维面积分以后，正比于 Eular 示性数，因此是一个拓扑不变量．反常相消条件当然是 $D=26$.

当 $D\neq 26$ 时，取一个无限小 Weyl 重标度以使 $\delta\rho=e^\alpha\rho-\rho=\alpha\rho$，(24)式可改写为(略去宇宙常数项)

$$\delta W[\rho]=\delta\left(\frac{D-26}{48\pi}\int d^2\sigma(\partial\ln\rho)^2\right). \tag{25}$$

这时，度规共形因子 $\rho(\sigma)$ 变成一个动力学自由度，(25)式定义了一个 Liouville 场论．

现在来讨论超弦[6]．文献[6]描写的超弦理论是一个二维超引力．定义泛函积分时，除了重参数化对称性外，定域超对称性也要做规范固定．取超共形规范，BRST 不变的 Lagrangian 是

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\partial_a\frac{\tilde{X}^\mu}{\sqrt{\rho}}\partial_a\frac{\tilde{X}_\mu}{\sqrt{\rho}}+\frac{1}{2}\bar{\tilde{\psi}}^\mu\frac{1}{\sqrt{\rho}}\not{\partial}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\tilde{\psi}_\mu-\xi\sqrt{\rho}\not{\partial}\frac{1}{\rho}\tilde{\eta}-\bar{\tilde{\lambda}}\rho^{1/4}\not{\partial}(\rho^{-3/4}\tilde{\zeta}) \tag{26}$$

和 $\tilde{X}^\mu$，$\tilde{\eta}$ 类似，费米坐标，相应于引力超子 (gravitino) 的玻色鬼和反鬼已经重新定义：

$$\tilde{\psi}^\mu=\sqrt{\rho}\,\psi^\mu,\ \tilde{\zeta}=\sqrt{\rho}\,\zeta,\tilde{\lambda}=\lambda,$$

以保证(26)式的泛函积分 BRST 不变．在 Weyl 重标度变换

$$\begin{aligned}&\rho\to e^\alpha\rho,\quad \tilde{X}^\mu\to e^{-\frac{1}{2}\alpha}\tilde{X}^\mu,\quad \tilde{\psi}^\mu\to e^{-\frac{1}{2}\alpha}\tilde{\psi}^\mu,\\&\tilde{\eta}\to e^\alpha\tilde{\eta},\quad \xi\to e^{-\frac{1}{2}\alpha}\xi,\tilde{\zeta}\to e^{3/4\alpha}\tilde{\zeta},\quad \tilde{\lambda}\to e^{-1/4\alpha}\tilde{\lambda},\end{aligned} \tag{27}$$

之下，Lagrangian (26) 是不变的．

类似(12)式，可定义(26)式的真空泛函 $W[\rho]$，在无限小变换下，我们有

$$\begin{aligned}\delta W[\rho]=\int d^2\sigma\alpha(\sigma)\Big[&\frac{D}{4}\sum_i u_{0i}^+u_{0i}-\frac{D}{4}\sum_i u_{-1/2i}^+u_{-1/2i}\\&+\frac{1}{2}\sum_i v_{1i}^+v_{1i}-\sum_i u_{1i}^+u_{1i}-\frac{1}{4}\sum_i v_{1/2i}^+v_{1/2i}\\&+\frac{3}{4}\sum_i u_{1/2i}^+u_{1/2i}\Big]\end{aligned} \tag{28}$$

将(21)式取 $n=0,-1/2,-2,1,-3/2$，和 $1/2$ 代入(28)式，得到

$$\frac{\delta W[\rho]}{\delta\alpha}=\frac{D-10}{8}\frac{1}{4\pi}(-\partial^2\ln\rho) \tag{29}$$

这给出超弦的临界维数 $D=10$. 如果希望研究偏离临界维数的超弦，和玻色弦情形类似，必须引入某个动力学场量以补偿反常．(29)式积分以后给出相应于超弦的 Liouville 场论．

我们将改进的正规化方案用于弦理论共形反常的研究，发现这是一个合适的工具．实

际上,将这一方法用于其它更广泛的问题,也没有原则的困难.

作者感谢郭汉英教授,倪光炯教授,宋行长教授和汪荣泰博士的十分有益的讨论.

参 考 文 献

[1] K. Fujikawa, *Phys. Rev. Lett.*, **42**(1979), 1195.
Phys. Rev., **D21**(1980), 2848.
[2] A. M. Polyakov, *Phys. Lett.*, **103B**(1981), 211, 214.
[3] K. Fujikawa, *Phys. Rev.*, **D25**(1982), 2584.
[4] P. Bouwknegt and P. Van Nierwenhuizen, *Class. Quant. Grav.*, **3**(1986), 207.
[5] O. Alvarez, *Nucl. Phys.*, **B286**(1987), 175.
[6] L. Brink, P. Di Vecchia, and P. Howe, *Nucl. Phys.*, **B118**(1977), 76.
S. Deser and B. Zumino, *Phys. Lett.*, **65B**(1977), 369.

ALTERNATIVE REGULARIZATION SCHEME AND CONFORMAL ANOMALY IN STRINGS

CHEN WEI

(Center of Theoretical Physics CCAST (World Laboratory))

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing)

ABSTRACT

An improved approach for regularizing ill-defined sum $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i^+(x)\varphi_i(x)$ is presented, and the conformal anomaly in strings is discussed.