第12卷 第2期　　高能物理与核物理　　Vol. 12, No. 2
1988年3月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Mar., 1988

快报

Skyrme 模型中的 Goldberger-Treiman 关系和核子的强作用半径*

李 炳 安

（中国科学院高能物理研究所，中国科学技术大学基础物理中心）

摘 要

在这篇文章中证明，即使在 $m_\pi \neq 0$ 的情况下，在 Skyrme 模型中仍可得到 Goldberger-Treiman 关系，核子的强作用半径 $\langle r^2\rangle_s^{1/2}$ 被计算出来为 0.8fm.

非线性 σ 模型给出了用流代数得到的软 π 定理. 在六十年代初 Skyrme 在非线性 σ 模型的拉氏量中引入称之为 Skyrme 项的新作用，由此得到稳定的孤立子解. Skyrme 指出，在这个新拉氏量中存在一个守恒的拓扑流，并把拓扑荷解释为重子数[1]. 而重子数为 1 的孤立子在量子化后为费米子-核子和 Δ[2]. 在文献[3]中作者们用这个模型计算了核子和 Δ 的静止性质，得到与实验较符合的结果.

在文献[3]中，作者们发现在 $m_\pi = 0$ 的情况在 Skyrme 模型中可得到 Goldberger-Treiman 关系，可是在 $m_\pi \neq 0$ 时，得不到这一关系[4]. 在这篇短文中证明后者是不正确的，Goldberger-Treiman 关系在 $m_\pi = 0$ 和 $m_\pi \neq 0$ 两种情形中都可以得到. 此外，对核子的强作用物质的分布及半径也进行了计算.

按照文献 [4]，Skyrme 模型的拉氏量为

$$\mathscr{L} = \frac{F_\pi^2}{16}\operatorname{Tr}\partial_\mu U\partial^\mu U^+ + \frac{1}{32e^2}\operatorname{Tr}[\partial_\mu UU^+, \partial_\nu UU^+]^2 + \frac{1}{8}m_\pi^2 F_\pi^2(\operatorname{Tr}U - 2) \tag{1}$$

（在这篇短文中，除非特别声明，都采用文献 [4] 中的符号），在 (1) 中

$$\begin{aligned} U &= A(t)U_0A^+(t) \\ A(t) &= a_0(t) + i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{a}(t),\ a_0^2 + \boldsymbol{a}^2 = 1 \\ U_0 &= \exp\{iF(r)\hat{r}\cdot\boldsymbol{\tau}\} \end{aligned} \tag{2}$$

由文献[3]，轴矢量流的空间分量可以写为

$$A_i^a(x) = \left\{\hat{x}_i\hat{x}_l F'\left(\frac{F_\pi^2}{4} + \frac{2}{e^2r^2}\sin^2 F\right) + (\delta_{il} - \hat{x}_i\hat{x}_l)\frac{1}{2r}\sin 2F\left[\frac{F_\pi^2}{4} + \frac{1}{e^2}\left(F'^2 + \frac{1}{r^2}\sin^2 F\right)\right]\right\}$$

* 编者按：本文曾在本刊 1987 年第 3 期第 426—429 页上刊出，刊出后作者指出该文中出版、印刷错误较多。为了保证论文的科学性，现重新刊载，并向作者、读者致歉.

本文 1986 年 11 月 4 日收到.

$$\cdot \mathrm{Tr}\, \tau_l A^{-1}\tau^a A \tag{3}$$

利用 $F(r)$ 所满足的运动方程[4]由(3)式得

$$\partial_i A_i^a = \frac{1}{4} m_\pi^2 F_\pi^2 \hat{x}_l \mathrm{Tr}\, \tau_l A^{-1}\tau^a A \tag{4}$$

按照 PCAC 有，

$$\partial_i A_i^a = m_\pi^2 F_\pi \pi^a(x) \tag{5}$$

$\pi^a(x)$ 是 π 介子场，与(4)式比较得

$$\pi^a(x) = \frac{1}{4} F_\pi \sin F \hat{x}_l \mathrm{Tr}\, \tau_l A^{-1}\tau^a A \tag{6}$$

实际上将 U 写为

$$U = \exp\left\{\frac{2i}{F_\pi} \boldsymbol{\pi}(x)\cdot \boldsymbol{\tau}\right\} \tag{7}$$

与(2)式比较即可得(6)式，说明从拉氏量(1)可自动得到 PCAC.

在 Skyrme 模型中，π-N 相互作用的形状因子定义为

$$\langle N'|(\nabla^2 - m_\pi^2)\pi^a|\mathrm{N}\rangle = i g_{\pi\mathrm{NN}}(q^2)\bar{u}(p')\tau^a\gamma_5 u(p) \tag{8}$$

这里 $q^2 = (\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})^2$，$u(p)$ 是核子的 Dirac 波函数和同位旋波函数的积. (8) 式中左边的矩阵元定义为

$$\langle N'|(\nabla^2 - m_\pi^2)\pi^a|N\rangle = \int d^3x e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}(\nabla^2 - m_\pi^2)\frac{F_\pi}{4}\sin F(r)\hat{x}_l \cdot \langle \mathrm{Tr}\, \tau_l A^{-1}\tau^a A\rangle \tag{9}$$

(9) 式中 $\langle \mathrm{Tr}\, \tau_l A^{-1}\tau^a A\rangle$ 是 $\mathrm{Tr}\, \tau_l A^{-1}\tau^a A$ 在初末态核子集体坐标中的矩阵元. 经过计算，(9) 式可写为

$$\langle N'|(\nabla^2 - m_\pi^2)\pi^a|N\rangle = -\frac{i}{3} F_\pi \partial/\partial q^2 F(q^2) q_i \langle \sigma_i \tau^a\rangle \tag{10}$$

其中

$$F(q^2) = \int d^3x e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) - \frac{2}{r^2} - m_\pi^2\right\}\sin F(r) \tag{11}$$

比较(8)式和(10)式得

$$g_{\pi\mathrm{NN}}(q^2) = \frac{2m_\mathrm{N}}{3} F_\pi F'(q^2) \tag{12}$$

将(11)式代入(12)式中，得 π-N 耦合常数为

$$g_{\pi\mathrm{NN}}(0) = -\frac{4\pi}{9} m_\mathrm{N} F_\pi \left\{r^3 F'(r)|_{r\to\infty} - r^2 F(r)|_{r\to\infty} - m_\pi^2 \int_0^\infty r^3 \sin F(r) dr\right\} \tag{13}$$

在 $m_\pi = 0$ 时，$F(r)|_{r\to\infty} \to \frac{B}{r^2}$[3]，由 (13) 式得

$$g_{\pi\mathrm{NN}} = g_{\pi\mathrm{NN}}(0) = \frac{4\pi}{3} m_\mathrm{N} F_\pi B \tag{14}$$

这就是文献 [3] 中用 $\pi^a(x)$ 的渐近条件所得到的结果. 在 $m_\pi \neq 0$ 时，$F(r)|_{r\to\infty} \to \frac{e^{-m_\pi r}}{r}$[4]，由 (13) 式得

$$g_{\pi\mathrm{NN}} = \frac{4\pi}{9} m_\pi^2 m_\mathrm{N} F_\pi \int_0^\infty r^3 \sin F(r) dr \tag{15}$$

这个表达式与 [4] 中的结果是不同的. 下面的讨论将指出为什么在 $m_\pi \neq 0$ 时不能像文献[4] 那样用 $\langle \pi^a(x) \rangle$ 的渐近行为去确定 $g_{\pi NN}$. 由 (10) 式得

$$\langle \pi^a(x) \rangle = \frac{i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2m_N} \int d^3 q e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} \frac{1}{q^2 + m_\pi^2} g_{\pi NN}(q^2) q_i \langle \sigma_i \tau^a \rangle \tag{16}$$

(16) 式中 $\langle \pi^a(x) \rangle$ 初末态核子取集体坐标波函数，而 $\langle \sigma_i \tau^a \rangle$ 中则取核子的自旋及同位旋波函数. 由 (16) 式得

$$\langle \pi^a(x) \rangle_{r\to\infty} = -\frac{m_\pi}{8\pi m_N} \langle \sigma_i \tau^a \rangle \frac{x_i}{r^2} e^{-m_\pi r} \int d^3 x' e^{m_\pi \hat{n}\cdot x'} \tilde{g}_{\pi NN}(x') \tag{17}$$

其中

$$\hat{n} = \frac{\boldsymbol{x}}{r}, \quad \tilde{g}_{\pi NN}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} g_{\pi NN}(q^2) d^3 q \tag{18}$$

注意,我们有下面的表达式

$$g_{\pi NN} = \int d^3 x \tilde{g}_{\pi NN}(x) \tag{19}$$

在文献[4]中, (17) 式积分中的指数因子 $e^{m_\pi \hat{n}\cdot x}$ 被丢掉了,因而导致了不正确的结果.

按照文献 [5] 中的结果,在 $m_\pi \neq 0$ 时有

$$g_A = \frac{2\pi}{9} m_\pi^2 F_\pi^2 \int_0^\infty r^3 \sin F(r) dr \tag{20}$$

比较 (15) 和 (20) 式得 Goldberger-Treiman 关系

$$g_A = \frac{F_\pi g_{\pi NN}}{2m_N} \tag{21}$$

与[4]的结论不同,在 $m_\pi \neq 0$ 时,在 Skyrme 模型中仍可得到 Goldberger-Treiman 关系. 原因上面已经指出.

核子的强作用半径平方的平均值 $\langle r^2 \rangle_s$ 定义为

$$g_{\pi NN}(q^2) = g_{\pi NN} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_s q^2 + \cdots \right\} \tag{22}$$

用(11)和(12)式得

$$\langle r^2 \rangle_s = \frac{3}{5} \frac{1}{\beta^2 e^2 F_\pi^2} \left\{ \beta^2 \frac{\int_0^\infty \tilde{r}^5 \sin F d\tilde{r}}{\int_0^\infty \tilde{r}^3 \sin F d\tilde{r}} - 10 \right\} \tag{23}$$

用[4]定出的 e、F_π 和 β 值算出

$$\langle r^2 \rangle_s^{1/2} = 0.8 \text{ fm} \tag{24}$$

将(12)式代入(18)式中经过推导得

$$\tilde{g}(r) = \frac{1}{3} m_N F_\pi^2 e \left\{ \cos F(\tilde{r}) \frac{dF(\tilde{r})}{d\tilde{r}} + \frac{2}{\tilde{r}} \sin F(\tilde{r}) \right\} \qquad m_\pi = 0$$

$$\tilde{g}(r) = \frac{1}{3} m_N F_\pi^2 e \left\{ \cos F(\tilde{r}) \frac{dF(\tilde{r})}{d\tilde{r}} + \frac{2}{\tilde{r}} \sin F(\tilde{r}) + \beta^2 \int_{\tilde{r}}^\infty \sin F(\tilde{r}') d\tilde{r}' \right\} \qquad m_\pi \neq 0 \tag{25}$$

定义 $G(r) = \frac{3}{m_N F_\pi^2 e} \tilde{g}(r)$, 将 $m_\pi = 0$ 和 $m_\pi \neq 0$ 两种情形中的 $G(r)$ 画在图 1 中.

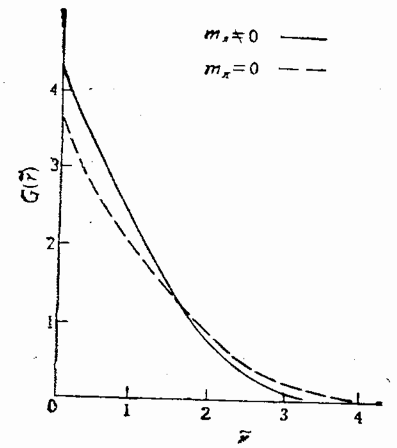

图 1

在这篇文章中我们证明在 $m_\pi \neq 0$ 时仍可从 Skyrme 模型中得到 Goldberger-Treiman 关系．核子的强作用半径也可以从 $m_\pi \neq 0$ 的 Skyrme 模型中算出（$m_\pi = 0$ 时，$\langle r^2\rangle_s$ 是发散的），并得到核子的强作用分布．

本工作由国家自然科学基金支持，项目编号 1860170．

参 考 文 献

[1] T. H. R. Skyrme, *Proc. Roy. Soc.*, **A260**(1961), 127.
N. K. Pak and H. C. Tze, *Ann. Phys.*, **117**(1979), 164.
A. P. Balachandran, V. P. Nair, A. G. Rajeev, and A. Stern, *Phys. Rev.*, **D27**(1983), 1153.
[2] E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B223**(1983), 433.
[3] G. Adkins, C. Nappi, and E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B228** (1983), 552.
[4] G. Adkins and C. Nappi, *Nucl. Phys.*, **B233**(1984), 109.
[5] Bing-an Li and Qi-xing Shen, *Commun. in Theor. Phys.*, **6**(1986), 65.

GOLDBERGER-TREIMAN RELATION AND NUCLEON'S MEAN SQUARE RADIUS OF STRONG INTERACTION IN THE SKYRME MODEL

LI BINGAN

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing, China and Fundamental Physics Center, Univ. of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, China)

ABSTRACT

In this letter it is shown that even in $m_\pi \neq 0$ case the Goldberger-Treiman relation is still hold in the Skyrme model. The mean square radius of strong interaction of nucleon $\langle r^2\rangle_s^{\frac{1}{2}}$ is computed in the Skyrme model.