第 12 卷 第 2 期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol. 12, No. 2
1988 年 3 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Mar., 1988

静轴对称 Einstein–Maxwell 引力场的新对称性*

侯伯宇　　李　卫

（西北大学现代物理所，西安）

摘　　要

我们把以前在真空 Ernst 场中得到的无穷小对称变换推广到带电磁场的 Ernst 场中，得到了一个更大的无限维对称群，这个群与不带中心项的 Virasoro 群同构．我们从中找到一个子群，即扩大 Cosgrove 群．最后，我们指出用这个新发现的无穷小变换，可以从已知带电磁场的 Ernst 场方程解，获得一个新解．

一、引　　言

我们已经在前几篇文章里指出[1]，在真空 Ernst 场方程中存在着一种无穷维对称群，它与不带中心项的 Virasoro 群同构． 这个对称群和已知 Geroch 群[2]共同构成一个更大的半直接积对称群．我们给出了这个对称群的无穷小变换形式，并且讨论了该变换的代数结构以及该变换与Cosgrove 变换的关系[3]．我们发现 Cosgrove 群是这个对称群的一个子群．

带电磁场的 Ernst 场与真空 Ernst 场具有许多相似之处：它们都有类似的自对偶关系式、Hauser-Ernst 线性方程组以及对应的辅助条件，而且后者只是前者的一种特殊情况．因此，我们希望把在真空中获得的结果推广到带电磁场情况中去，利用新发现的对称变换，找到一种求带电磁场的 Ernst 场方程解的新途径． 在做这种推广之前，我们先简单回顾一个带电磁场的 Ernst 场理论．

我们先说明几个常用的符号：

$$\Sigma(s)=\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}is\end{pmatrix}\qquad \varepsilon=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

和

$$\Sigma=\Sigma(0),\quad \Omega=i\Sigma(2)$$

这里 s 是参数．

利用微分形式，我们定义对偶变换

---

* 中国科学基金资助的课题

本文 1987 年 4 月 3 日收到．

$$^{*}dx^1 = dx^2, \quad ^{*}dx^2 = \pm\, dx^1$$

在柱对称 Einstein 空间里取＋号，这时 $(x^1, x^2) \equiv (t, \varphi)$；在静轴对称 Einstein 空间里取－号，这时 $(x^1, x^2) \equiv (\rho, z)$.

我们给出度规

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j + h_{ab}dx^a dx^b \tag{1}$$

这里 $i、j = 1、2$；$a、b = 3、4$；而 g_{ij} 和 h_{ab} 仅是 x^1, x^2 的函数．令 $h = (h_{ab})$是 2×2 矩阵，则有

$$\det h = \pm\, \alpha^2$$

Hauser 和 Ernst[4] 根据 Kinnersley 和 Chitre 的结果[2]，给出这样一个自对偶关系

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} - 2i[\Sigma F^{(1)}\Omega + \Omega F^{(1)\dagger}\Sigma]\right\} dF^{(1)}$$
$$= -4i\Sigma(\beta \pm \alpha^*)dF^{(1)} \tag{2}$$

这里 $F^{(1)}$ 是 x^1, x^2 的 3×3 矩阵函数，$F^{(1)\dagger}$ 是 $F^{(1)}$ 的 Hermitian 矩阵，

$$\beta = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F^{(1)}\Omega) \tag{3}$$

而且 α 与 β 满足关系式

$$^{*}d\beta = \pm\, d\alpha \tag{4}$$

方程(2)可以改写为与谱参数 s 有关的式子

$$\mathscr{H}(s)\Gamma(s) = is\Sigma dF^{(1)} \tag{5}$$

其中

$$\Gamma(s) = s[1 - 2s(\beta \pm \alpha^*)]^{-1}dF^{(1)}$$

$$\mathscr{H}(s) = i\Sigma(s) - is[\Sigma F^{(1)}\Omega + \Omega F^{(1)\dagger}\Sigma]$$

对(5)式两边微分，则有

$$d\mathscr{H}(s)\Gamma(s) + \mathscr{H}(s)d\Gamma(s) = 0$$

由于

$$dF^{(1)\dagger}\Omega dF^{(1)} = dF^{(1)\dagger}\Omega^* dF^{(1)} = 0$$

不难得到

$$d\mathscr{H}(s)\Gamma(s) = -\mathscr{H}(s)\Gamma(s)\Omega\Gamma(s)$$

于是，根据

$$d\Gamma(s) - \Gamma(s)\Omega\Gamma(s) = 0$$

我们马上可以得到一个 3×3 矩阵 $F(s)$ 满足的方程

$$dF(s) = \Gamma(s)\Omega F(s) \tag{6}$$

其中 $F(s)$ 也是 $x^1、x^2$ 的函数．这就是 Hauser-Ernst 线性化方程，它的可积性条件是方程(2)成立．

当 $\Gamma(s)$ 给定时，方程(6)并不能唯一的确定 $F(s)$．我们很容易证明[4]

$$dF(0) = 0, \quad d(\dot{F}(0) - F^{(1)}\Omega) = 0$$

$$d(F(s)^{\dagger}\mathscr{H}(s)F(s)) = 0$$
$$d(\lambda(s)\det F(s)) = 0$$

其中

$$\lambda(s) = [(1-2s\beta)^2 \mp (2s\alpha)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$\dot{F}(s) = \dfrac{d}{ds}F(s)$，$F(s)^{\dagger} = F^{\dagger}(\bar{s})$，这里 $\bar{s}$ 是 s 的共轭复数．因此，我们选择如下辅助条件

$$F(0) = I, \tag{7}$$
$$\dot{F}(0) = F^{(1)}\Omega. \tag{8}$$
$$F(s)^{\dagger}\mathscr{H}(s)F(s) = i\Sigma(s) \tag{9}$$
$$\det F(s) = \lambda^{-1}(s) = [(1-2s\beta)^2 - (2sd)]^{-\frac{1}{2}} \tag{10}$$

显然，带电磁场的 Ernst 场与真空中 Ernst 场在形式上有相似之处，如果当电磁场为零时，则

$$F^{(1)} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F(s) = \begin{pmatrix} F_v(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

这里 E 是真空 Ernst 势，它代表一个 2×2 矩阵，$F_v(s)$ 是真空中产生函数．将(11)式代入(2)—(10)式，它们都约化为真空时的情况．

二、无穷维对称性

与真空时讨论的情况一样[1]，我们在带电磁场的情况下给出如下无穷小变换

$$\delta F^{(1)} = \dot{F}(s)F^{-1}(s)\Omega\varepsilon_0 \tag{12}$$

这里 $F(s)$ 满足 Hauser-Ernst 线性化方程，ε_0 是无穷小参量．将(12)式代入(3)式，我们得到

$$\delta\beta = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{\dot{F}(s)F^{-1}(s)\} = \frac{1}{2}\lambda\frac{d\lambda^{-1}}{ds}$$
$$= \frac{\beta(1-2s\beta)\pm 2s\alpha^2}{(1-2s\beta)^2\mp(2s\alpha)^2}$$

同样，由(4)式得

$$\delta\alpha = \frac{\alpha}{(1-2s\beta)^2\mp(2s\alpha)^2}$$

我们不难证明，在变换(12)的一阶无穷小变换下，方程(2)将发生改变，即

$$\begin{aligned} &2\delta\dot{\mathscr{H}}(s)dF^{(1)} + 2\dot{\mathscr{H}}(s)d(\delta F^{(1)}) + \frac{2i}{s}F^{-1}(s)^{\dagger}\dot{\Sigma}(s)F^{-1}(s)\Gamma(s)\varepsilon_0 \\ &= -4i\Sigma(\beta\pm\alpha^*)d(\delta F^{(1)}) - 4i\Sigma(\delta\beta\pm\delta\alpha^*)dF^{(1)} \end{aligned} \tag{13}$$

证明：对(12)式两边微分，利用 Hauser-Ernst 线性化方程，有

$$d(\delta F^{(1)}) = \dot{\Gamma}(s)\varepsilon_0 + [\Gamma(s)\Omega,\ -\dot{F}(s)F^{-1}(s)]\Omega\varepsilon_0$$

然后代入

$$
\begin{aligned}
&-4i\Sigma(\beta\pm\alpha^*)d(\delta F^{(1)})\\
&\quad=-4i\Sigma(\beta\pm\alpha^*)\dot{\Gamma}(s)\varepsilon_0-4i\Sigma(\beta\pm\alpha^*)[\Gamma(s)\Omega,\dot{F}(s)F^{-1}(s)]\Omega\varepsilon_0\\
&\quad=2\dot{\mathscr{H}}(s)\dot{\Gamma}(s)\varepsilon_0+[2\dot{\mathscr{H}}(s)\Gamma(s)\Omega,\ \dot{F}(s)F^{-1}(s)]\Omega\varepsilon_0\\
&\qquad+[4i\Sigma(\beta\pm\alpha^*),\ \dot{F}(s)F^{-1}(s)]\Gamma(s)\varepsilon_0\\
&\quad=2\dot{\mathscr{H}}(s)d(\delta F)^{(1)}+(2\dot{\mathscr{H}}(s)+4i\Sigma(\beta\pm\alpha^*))\dot{F}(s)F^{-1}(s)\Gamma(s)\varepsilon_0
\end{aligned}\tag{14}
$$

我们利用了方程(2)以及$[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B$，其中$[A,B]=AB-BA$.

同样，

$$
\begin{aligned}
&2\delta\dot{\mathscr{H}}(s)dF^{(1)}\\
&\quad=-2i\Sigma\dot{F}(s)F^{-1}(s)dF^{(1)}\varepsilon_0+2i\dot{F}^{-1}(s)^\dagger F(s)^\dagger\Sigma dF^{(1)}\varepsilon_0\\
&\quad=-2i\Sigma\dot{F}(s)F^{-1}(s)dF^{(1)}\varepsilon_0+2i\dot{F}^{-1}(s)^\dagger F(s)^\dagger\frac{1}{is}\mathscr{H}(s)\Gamma(s)\varepsilon_0\\
&\quad=-2i\Sigma\dot{F}(s)F^{-1}(s)dF^{(1)}\varepsilon_0+\frac{2i}{s}\dot{F}^{-1}(s)^\dagger\Sigma(s)F^{-1}(s)\Gamma(s)\varepsilon_0\\
&\quad=-2i\Sigma\dot{F}(s)F^{-1}(s)dF^{(1)}\varepsilon_0+\frac{2}{s}\{\mathscr{H}(s)\dot{F}(s)+\dot{\mathscr{H}}(S)F(s)-iF^{-1}(s)^\dagger\dot{\Sigma}(s)\}\\
&\qquad\times F^{-1}(s)\Gamma(s)\varepsilon_0\\
&\quad=(2\dot{\mathscr{H}}(s)+4i\Sigma(\beta\pm\alpha^*))\dot{F}(s)F^{-1}(s)\Gamma(s)\varepsilon_0+\frac{2}{s}\dot{\mathscr{H}}(s)\Gamma(s)\varepsilon_0\\
&\qquad-\frac{2i}{s}F^{-1}(s)^\dagger\dot{\Sigma}(s)F(s)\Gamma(s)\varepsilon_0
\end{aligned}\tag{15}
$$

在第二步中我们利用了(5)式；第三步中利用了两次(9)式；最后化简合并就得到最后结果.

然后，我们根据$\delta\beta$、$\delta\alpha$的变换以及方程(2)，得到

$$-4i\Sigma(\delta\beta\pm\delta\alpha^*)dF^{(1)}=\frac{2}{s}\dot{\mathscr{H}}(s)\Gamma(s)\varepsilon_0\tag{16}$$

将(14)—(16)式合并，我们就证明了(13)式

由于(13)式左边多出一项，因此，变换(12)不能使方程(2)保持不变．为了消除这个多余项，我们考虑变换

$$\gamma F^{(1)}=\frac{1}{s}\{F(s)TF^{-1}(s)-T\}\Omega\varepsilon_0\tag{17}$$

其中$F(s)$满足 Hauser-Ernst 线性化方程，T是一个与x^1、x^2、s无关的常数矩阵，它满足条件

$$T^\dagger\Sigma(s)+\Sigma(s)T^\dagger-s\dot{\Sigma}(s)=0\tag{18}$$

用前面类似的方法，我们不难证明

$$
\begin{aligned}
&2\gamma\dot{\mathscr{H}}(s)dF^{(1)}+2\dot{\mathscr{H}}(s)d(\gamma F^{(1)})-\frac{2i}{s}F^{-1}(s)^\dagger\dot{\Sigma}(s)F^{-1}(s)\Gamma(s)\varepsilon_0\\
&\quad=-4i\Sigma(\beta\pm\alpha^*)d(\gamma F^{(1)})-4i\Sigma(\gamma\beta\pm\gamma\alpha^*)dF^{(1)}
\end{aligned}\tag{19}
$$

这里

$$r\beta=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{F(s)TF^{-1}(s)-T\}\varepsilon_0=0$$

$$r\alpha=0.$$

我们令

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}F^{(1)}&=\delta F^{(1)}-rF^{(1)}\\&=\dot{F}(s)F^{-1}(s)\Omega\varepsilon_0-\frac{1}{s}\{F(s)TF^{-1}(s)-T\}\Omega\varepsilon_0\end{aligned}\tag{20}$$

在变换(20)作用下,方程(2)将保持不变,即

$$\begin{aligned}&2\tilde{\delta}\mathscr{H}(s)dF^{(1)}+2\mathscr{H}(s)d(\tilde{\delta}F^{(1)})\\&=-4i\Sigma(\beta\pm\alpha^*)d(\tilde{\delta}F^{(1)})-4i\Sigma(\tilde{\delta}\beta\pm\tilde{\delta}\alpha^*)dF^{(1)}\end{aligned}\tag{21}$$

并且

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}\beta&=\delta\beta=\frac{\beta(1-2s\beta)\pm(2s\alpha^2)}{(1-2s\beta)^2\mp(2s\alpha)^2}\\\tilde{\delta}\alpha&=\delta\alpha=\frac{\alpha}{(1-2s\beta)^2\mp(2s\alpha)^2}\end{aligned}\tag{22}$$

同样,我们用类似于在真空中的方法[1],证明在变换

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}F(t)=&\frac{t}{t-s}\{t\dot{F}(t)F^{-1}(t)-s\dot{F}(s)F^{-1}(s)\}F(t)\varepsilon_0\\&-\frac{t}{t-s}\{F(t)TF^{-1}(t)-sF(s)TF^{-1}(s)\}F(t)\varepsilon_0\end{aligned}\tag{23}$$

下,方程(6)—(10)式都保持不变,这里 t 是谱参数. 如果按 s 展开幂级数,则

$$\tilde{\delta}(s)=-\Sigma\tilde{\delta}^{(n)}s^n$$

于是(23)式可表示为积分形式[5]

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}^{(k)}F(t)=&-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0,t}}\frac{s^{k-1}\dot{F}(s)F^{-1}(s)}{s(s-t)}dsF(t)\varepsilon_0\\&+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0,t}}\frac{s^kF(s)TF^{-1}(s)}{s(s-t)}dsF(s)\varepsilon_0\end{aligned}\tag{24}$$

三、讨 论

(1) 首先,我们考虑如何选择满足条件(18)的矩阵 T. 设

$$T=\begin{pmatrix}t_{11}&t_{12}&t_{13}\\t_{21}&t_{22}&t_{23}\\t_{31}&t_{32}&t_{33}\end{pmatrix}$$

代入(18)式,则有

$$t_{13}=t_{23}=t_{31}=t_{32}=0$$

$$t_{12}=\bar{t}_{12},\quad t_{21}=\bar{t}_{21}$$

$$t_{11}+\bar{t}_{22}=0,\quad t_{33}+\bar{t}_{33}=1$$

因此,满足条件(18)的矩阵 T 是存在的,并且有许多个. 我们进一步要求变换(24)式

在电磁场为零的情况下，能给出在真空时的变换[1]：

$$\tilde{\delta} E_v = \dot{F}_v(s) F_v^{-1}(s) i\varepsilon\varepsilon_0$$

这时，T 有两种选择

$$T_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad T_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & & \\ & i & \\ & & 1-2i \end{pmatrix} \tag{25}$$

其它 T 都可视为 T_1、T_2 的实线性组合.

(2) 设

$$\delta(s) = -\Sigma\delta^{(n)}s^n, \quad \gamma(s) = -\Sigma\gamma^{(n)}s^n$$

类似于我们在真空中的计算[1,5]，我们不难得到如下对易关系

$$[\delta^{(m)}, \delta^{(n)}] = (m-n)\delta^{(m+n)}$$
$$[\delta^{(m)}, \gamma^{(n)}] = -n\gamma^{(m+n)}$$
$$[\gamma^{(m)}, \gamma^{(n)}] = 0$$

由于 $\tilde{\delta}^{(m)} = \delta^{(n)} - \gamma^{(n)}$，则根据以上对易关系，不难证明

$$[\tilde{\delta}^{(m)}, \tilde{\delta}^{(n)}] = (m-n)\tilde{\delta}^{(m+n)} \tag{26}$$

这说明，在带电磁场的 Ernst 场方程里，也存在 Virasoro 代数结构，真空中的 Virasoro 代数是它的子代数.

以上算子均作用在 $F^{(1)}$ 或 $F(t)$ 上.

(3) Cosgrove[6] 在讨论带电磁场的 Ernst 场方程的 Backlünd 变换时认为，应该存在一个与 $SL(2,R)$ 群同构的扩大 Cosgrove 群. 在没有电磁场的情况下，扩大 Cosgrove 群会约化为 Cosrgove 群[2]. 但是，他未能给出它的无穷小变换形式. 现在，我们利用变换(23)，证明 Cosgrove 的假设.

我们令

$$F(t) = \Sigma H^{(n)}t^n$$

$$G(s,t) = \Sigma N^{(m,n)}s^n t^n = \frac{s}{t-s} - \frac{t}{t-s}F^{-1}(s)F(t)$$

这里

$$H^{(0)} = I, \quad H^{(1)} = F^{(1)}\Omega$$
$$N^{(0,0)} = -I, \quad N^{(0,n)} = -H^{(n)}$$

注意，我们这里引进 $H^{(n)}$, $N^{(m,n)}$ 都是 3×3 矩阵，与 Kinnersley 和 Chitre 文章中的 $H_{kc}^{(n)}$, $N_{kc}^{(m,n)}$ 不是相同的，后者只是 2×2 矩阵.

我们将 $\tilde{\delta}^{(k)}$ 作用在双线性势 $N^{(m,n)}$ 上，得

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}^{(k)}N^{(m,n)} = & -\frac{1}{2}\left\{(2m+k)N^{(m+k,n)} + (2n+k)N^{(m,n+k)} + \sum_{l=1}^{k}(2l-k)N^{(m,l)}N^{(k-l,n)}\right\} \\ & + \left\{-TN^{(m+k,n)} + N^{(m,n+k)}T + \sum_{l=1}^{k}N^{(m,l)}TN^{(k-l,n)}\right\} \end{aligned} \tag{27}$$

$$m \geqslant 0, n > 0 \quad k = -1, 0, 1, 2, \cdots\cdots$$

这里当 $N^{(n,0)}=0\quad(n\neq 0)$, $N^{(m,n)}=0$($m<0$ 或 $n<0$).

讨论 $k=0,\pm 1$ 时,有

$$[\delta^{(a)},\delta^{(b)}]=f^{abc}\delta^{(c)}\quad a,b=0,\pm 1$$

其中 f^{abc} 正好是 $SL(2,R)$ 代数的结构常数. 在没有电磁场情况下，这三个算子正好构成 Cosgrove 群. 因此,我们得到了由 $\delta^{(k)}(k=0,\pm 1)$ 构成的扩大 Cosgrove 群.

作者之一李卫感谢王佩教授同他进行了有益的讨论.

参 考 文 献

[1] 侯伯宇和李卫，高能物理与核物理，**11**(1987), 137.
Bo-yo Hou and W. Li, *Lett. Math. Phys.*, **13**(1987) 1; NWU-IMP-86-7(1986).
[2] W. Kinnersley and D. M. Chitre, *J. Math. Phys.*, 18(1977), 1538; 19(1978), 1926.
[3] C. M. Cosgrove, *J. Math. Phys.*, **21**(1980), 2417.
[4] I. Hauser and F. J. Ernst, *Phys. Rev.*, **D20**(1979), 1783; *J. Math. Phys.*, **21**(1980), 1418.
[5] B. Y. Hou and W. Li, J. Phys. A, (1987), to be published.
[6] C. M. Cosgrove, *J. Math. Phys.*, **22**(1981), 2624.

NEW INFINITE SYMMETRIES IN THE STATIONARY, AXIALLY SYMMETRIC EINSTEIN-MAXWELL FIELDS

HOU BOYU LI WEI

(Institute of Modern Physics, Northweest University, Xian)

ABSTRACT

We generalize the infinitesimal transformations obtained in the Ernst fields of vacuum previously to the case including electromagnetic fields to form a larger infinite symmetric group which is isomorphic to the Virasoro group without a central term. Wherein we find a subgroup, the enlarged Cosgrove group. It is pointed out that new solutions of the electronic fields can be genereated from old ones by means of our new transformations.