

# 规范不变性在 $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ 过程中的 一个物理推论

黄涛 谢谔成  
(中国科学院高能物理研究所)

## 摘 要

本文分析了  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  过程中强子波函数的价夸克态和高福克组态的贡献。利用规范不变的轴矢流散度等式证明了一个重要的推论,即在  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  过程中价夸克福克态对振幅的贡献占总振幅的一半。由此推论所导出对价夸克波函数的约束条件在遍举过程的 QCD 唯象分析中是十分有用的。

众所周知,  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  过程可以通过轴矢流反常和 PCAC 假设给出。由于 Adler 三角反常贡献存在, PCAC 假设应修改为<sup>[1]</sup>

$$\frac{f_\pi}{\sqrt{2}} \phi_\pi(x) = \partial_\mu J_5^\mu(x) - \frac{\alpha}{4\pi} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\alpha\beta} F^{\gamma\delta}, \quad (1)$$

由此而导出衰变宽度为

$$\Gamma_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{\pi\alpha^2}{2} m_\pi^3 F_{\pi\gamma}(0), \quad (2)$$

其中  $F_{\pi\gamma}(0)$  为

$$F_{\pi\gamma}(0) = \frac{1}{4\pi^2} n_c (e_u^2 - e_d^2) \frac{1}{f_\pi}. \quad (3)$$

当  $n_c = 3$  时, 式(2)给出  $\Gamma_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma} = 7.63\text{eV}$ , 此值与实验结果符合得相当好。在式(1)和(3)中的  $f_\pi$  是  $\pi$  介子的衰变常数,  $f_\pi = 93\text{MeV}$ 。

在式(2)和(3)中的  $F_{\pi\gamma}(0)$  是  $\pi^0$ - $\gamma$  跃迁形状因子  $F_{\pi\gamma}(Q^2)$  在  $Q^2 = 0$  的值。(3)式是由 PCAC 假定(1)给出的。一般地讲如果不用 PCAC 假定, 利用  $\pi$  介子是由夸克和反夸克组成的束缚态,  $F_{\pi\gamma}(Q^2)$  可以通过  $\gamma^*\pi \rightarrow \gamma$  顶角来定义(见图1), 即

$$\Gamma_\mu = -ie^2 F_{\pi\gamma}(Q^2) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \rho_\nu^* e^\rho q^\sigma, \quad (4)$$

其中  $Q^2 = -q^2 \neq 0$ 。  $\pi$  介子的所有福克组态波函数  $\phi_{n/\pi}(x_i, \mathbf{k}_{\perp i}, \lambda_i)$  都应对此顶角有贡献, 仅当  $Q^2 \rightarrow \infty$  时, 价夸克态 ( $\langle n=2, |q\bar{q}\rangle \phi^{(V)}(x, \mathbf{k}_\perp)$ ) 对  $F_{\pi\gamma}(Q^2)$  的贡献是主要的。

$\phi_{n/\pi}(x_i, \mathbf{k}_{\perp i}, \lambda_i)$  是  $\pi$  介子的福克组态波函数, 它定义为<sup>[2]</sup>

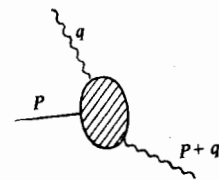


图1  $\gamma^*\pi \rightarrow \gamma$  跃迁形状因子  $F_{\pi\gamma}(Q^2)$

$$|\pi; \mathbf{p}\rangle = \sum_{n, \lambda_i} \left\{ \prod_i \frac{dx_i d^2 \mathbf{k}_{\perp i}}{\sqrt{x_i} 16\pi^3} \phi_{n/\pi}(x_i, \mathbf{k}_{\perp i}, \lambda_i) |n; x_i, \mathbf{k}_{\perp i}, \lambda_i\rangle \right\}, \quad (5)$$

其中  $|n; x_i, \mathbf{k}_{\perp i}, \lambda_i\rangle$  是给定光锥时刻 ( $\tau = t + z$ ) 下定义的一组基, 求和指标  $n, \lambda_i$  是指对所有福克态和螺旋度求和, 以及

$$\prod_i dx_i \equiv \prod_i dx_i \delta(1 - \sum x_i), \quad (6)$$

和

$$\prod_i d^2 \mathbf{k}_{\perp i} \equiv \prod_i d^2 \mathbf{k}_{\perp i} 16\pi^3 \delta^2\left(\sum_i \mathbf{k}_i\right).$$

由(5)式所定义的波函数  $\phi_{n/\pi}(x_i, \mathbf{k}_{\perp i}, \lambda_i)$  是  $\pi$  介子内发现组态  $n$ , 动量为  $x_i, \mathbf{k}_{\perp i}$  的部分子的几率, 其中  $x_i$  是部分子所携带的纵向动量比. 此波函数与  $\pi$  介子的动量  $P$  无关, 这是因为  $x_i$  与  $\mathbf{k}_{\perp i}$  是参考系无关的量.

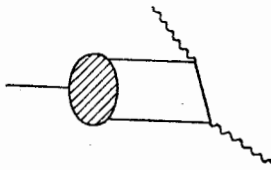


图2 价夸克态对跃迁形状因子的贡献.

一般地讲, 计算所有  $\pi$  介子福克组态的贡献是很困难的, 仅是价夸克态  $\phi^{(V)}(x_i, \mathbf{k}_{\perp i})$  的贡献是容易得到的, 当取夸克质量  $m = 0$  时, 价夸克态对跃迁形状因子的贡献,

$F_{\pi\gamma}^{(V)}(Q^2)$  (见图2) 的明显表达式为<sup>[3]</sup>

$$F_{\pi\gamma}^{(V)}(Q^2) = 2\sqrt{n_c} (e_u^2 - e_d^2) \int dx \left\{ \frac{d^2 \mathbf{k}_{\perp}}{16\pi^3} \phi^{(V)}(x, \mathbf{k}_{\perp}) \cdot \left\{ \frac{\boldsymbol{\epsilon}_{\perp} \times (\mathbf{q}_{\perp}(1-x) + \mathbf{k}_{\perp})}{(\boldsymbol{\epsilon}_{\perp} \times \mathbf{q}_{\perp})(\mathbf{q}_{\perp}(1-x) + \mathbf{k}_{\perp})^2} + (x \leftrightarrow (1-x), \mathbf{k}_{\perp} \leftrightarrow -\mathbf{k}_{\perp}) \right\} \right\}. \quad (7)$$

我们无法计算出所有高福克组态对  $F_{\pi\gamma}(Q^2)$  的贡献. 在文献[4]中曾指出有可能利用规范不变性来估计高福克组态贡献的大小, 特别是当  $Q^2 \rightarrow 0$  时, 价夸克态的贡献应是总振幅的一半, 即存在等式,

$$\frac{F_{\pi\gamma}^{(V)}(0)}{F_{\pi\gamma}(0)} = 1/2. \quad (8)$$

这一等式曾在文献[5]中利用外场下对费米子传播子的修正给过证明. 本文将直接地利用规范不变的轴矢流散度等式证明关系式(8).

轴矢流算符  $J_5^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x)$  是奇异的, 为了定义它, 传统的方法是引入一无穷小量  $\xi$ , 定义算符  $\bar{\psi}\left(x + \frac{\xi}{2}\right) \gamma^\mu \gamma_5 \psi\left(x - \frac{\xi}{2}\right)$ , 然而当  $\xi \rightarrow 0$  时仍是发散的, Brandt 引入补偿项消除奇异性<sup>[6]</sup>, 即

$$J_\mu^\nu(x, \xi) = T(\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x + \xi)) + E_1(\xi) \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \xi_\alpha \partial_\beta A_\gamma(x) + E_2(\xi) \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} A_\alpha(x) \partial_\beta A_\gamma(x + \xi) + E_3(\xi) J_\mu^\nu(x), \quad (8')$$

使得下述极限存在

$$J_\mu^\nu(x) = \lim_{\xi \rightarrow 0} J_\mu^\nu(x, \xi). \quad (9)$$

当  $\xi \rightarrow 0$  时,  $E_i(\xi)$  是奇异的, 且补偿了第一项定域乘积的奇异性使得(9)式存在. 再由规范不变性要求可获得<sup>[6]</sup>

$$J_\mu^5(x) = E_0 \left[ \bar{\psi}_{(0)} \gamma_\mu \gamma_5 \psi_{(0)+} + \frac{ie_0}{2\pi^2} \frac{1}{\xi^2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \xi^\alpha \partial^\beta A_{(0)}^\gamma + \frac{e_0^2}{8\pi^2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} A_{(0)}^\alpha \partial^\beta A_{(0)+}^\gamma \right], \quad (10)$$

其中  $\psi_+ = \psi(x + \xi)$ ,  $A_+ = A(x + \xi)$ .  $\psi_{(0)}$  和  $A_{(0)}$  都是未重整化的裸量,  $E_0$  是对数发散的函数. 由(10)式可以讨论轴矢流  $J_\mu^5(x)$  的散度.

对于  $\pi^0$  介子衰变为两个光子的过程, 由于  $\frac{1}{m_\pi} \gg R_\pi$ , 这意味着从  $\pi$  介子中衰变出来的光子的波长要比  $\pi$  介子的半径大得多, 因此电磁场可以近似地处理为外场. 在  $A_\mu(x)$  是外场的情况下, 式(10)中的  $m = m_0$ ,  $e = e_0$ ,  $E_0 = 1$ . 而且(10)式可以从规范不变的轴矢流<sup>[7]</sup>

$$J_\mu^5(x, \xi) = \bar{\psi}\left(x + \frac{\xi}{2}\right) \gamma_\mu \gamma_5 \psi\left(x - \frac{\xi}{2}\right) \exp\left[-ie \int_{x-\frac{\xi}{2}}^{x+\frac{\xi}{2}} A_\rho(z) dz^\rho\right] \quad (11)$$

导出<sup>[6]</sup>. 为了明显地看出规范不变性的意义, 将(11)式修改为<sup>[8]</sup>

$$J_\mu^5(x, \xi, a) = \bar{\psi}\left(x + \frac{\xi}{2}\right) \gamma_\mu \gamma_5 \psi\left(x - \frac{\xi}{2}\right) \exp\left[-iea \int_{x-\frac{\xi}{2}}^{x+\frac{\xi}{2}} A_\rho(z) dz^\rho\right], \quad (12)$$

当(12)式中的  $a = 0$  时就是在  $\xi \rightarrow 0$  时奇异的轴矢流  $\bar{\psi}\left(x + \frac{\xi}{2}\right) \gamma_\mu \gamma_5 \psi\left(x - \frac{\xi}{2}\right)$ , 当  $a = 1$  时就是规范不变的轴矢流(11)式.

直接对(12)式微分就可以得到 ( $\xi \rightarrow 0$ )

$$\partial_\mu J_\mu^5(x, \xi, a) = \partial_\mu \left( \bar{\psi}\left(x + \frac{\xi}{2}\right) \gamma^\mu \gamma_5 \psi\left(x - \frac{\xi}{2}\right) \right) + iea J_\mu^5(x, \xi, a) \int_{-\frac{\xi}{2}}^{\frac{\xi}{2}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\nu(z+x) dz^\nu, \quad (13)$$

当  $\xi \rightarrow 0$  时, (13)式右边两项分别是有限的. 当  $\xi \approx 0$  时, 第一项是纯粹的夸克场所定义的非定域的轴矢流的微分, 第二项则描写夸克场非定域轴矢流与外电磁场的相互作用. 显

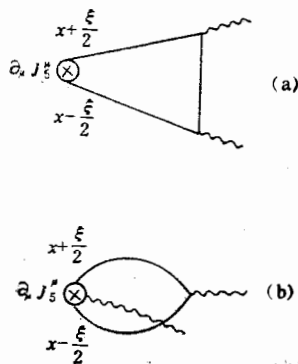


图 3 规范不变的非定域轴矢流与外电磁场的耦合

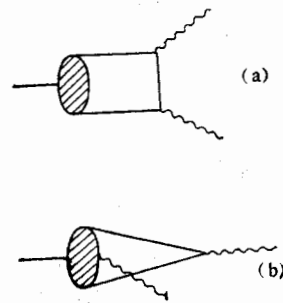


图 4  $\pi$  介子波函数中价夸克态和高福克组态的贡献

然在光锥微扰论下这两项分别给出不同机制的贡献,以图形来表示(见图 3(a)和 3(b))第一项是轴矢流的两个夸克线与两个光子相接;而第二项则代表有一个光子是从非定域的轴矢流中发射出来的,而另一个光子则为轴矢流的两正、反夸克湮灭而成。

前面已指出如果不依赖于(1)式的 PCAC 假定,而在强子波函数的框架内计算  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  过程,原则上除了考虑价夸克态的贡献(7)式外,还必须考虑来自高福克组态的贡献。图 3(a)和图 3(b)给出的不同机制对应到  $\pi$  介子波函数的贡献也相应于不同的图形(见图 4(a)和 4(b)),图 4(a)是两个光子在波函数的外部,这正相应于价夸克态的贡献(见图 2),  $F_{\pi\gamma}^{(V)}(Q^2)$ , 而图 4(b)则是完全不同的情况,一个光子直接从波函数内部辐射出来,显然不是价夸克态的贡献,而相应于高福克组态的贡献,因为它表明来自波函数内部的这一光子无法和参与强相互作用的夸克和胶子分开,包含了所有可能的高福克组态的贡献。

方程(13)告诉我们如何计算这两个图形的贡献。方程(13)中的第一项对应于图 4(a), 因此从坐标空间的  $\partial_\mu \bar{\psi}\left(x + \frac{\xi}{2}\right) \gamma^\mu \gamma_5 \psi\left(x - \frac{\xi}{2}\right)$  对应到动量空间中的  $\frac{\not{p}\gamma_5}{\sqrt{2}} \psi_{q\bar{q}}(x, \mathbf{k}_\perp)$ , 其贡献正是式(7)所给出的结果。而方程(13)中的第二项

$$\begin{aligned} & ieaJ_5^\mu(x, \xi, a) \int_{-\frac{\xi}{2}}^{\frac{\xi}{2}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\nu(z+x) dz^\nu \\ & = ieaJ_5^\mu(x, \xi, a) \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\nu(x) \xi^\nu (\xi \rightarrow 0). \end{aligned}$$

在坐标空间中相应于价夸克波函数倍乘以一因子  $-iea\xi_\nu A^\nu$ , 变换到动量空间则有一  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cdot \not{p}\gamma_5 \cdot \varepsilon_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \psi_{q\bar{q}}(x, \mathbf{k}_\perp)$ , 因而图 4(b) 的贡献为

$$\begin{aligned} F_{\pi\gamma}^{(NV)}(Q^2) & \simeq 2\sqrt{n_c} a(c_u^2 - c_d^2) \int_0^1 dx \int \frac{d^2k_\perp}{16\pi^3} \varepsilon_\perp \cdot \frac{\partial}{\partial k_\perp} \phi^{(V)}(x, k_\perp) \\ & \cdot \left\{ \frac{\varepsilon_\perp \times (\mathbf{q}(1-x) + \mathbf{k}_\perp)}{(\varepsilon_\perp \times \mathbf{q}_\perp)(\mathbf{q}_\perp(1-x) + \mathbf{k}_\perp)^2} + (x \leftrightarrow (1-x), \mathbf{k}_\perp \leftrightarrow -\mathbf{k}_\perp) \right\}. \quad (14) \end{aligned}$$

利用文献[5]的证明方法可以得到等式

$$F_{\pi\gamma}^{(NV)}(0) = aF_{\pi\gamma}^{(V)}(0). \quad (15)$$

事实上,这一结果已在轴矢流反常等式(13)中所包含,因为从方程(13)直接计算轴矢流散度的真空平均值,(13)式右边两个有限项的贡献为<sup>[8]</sup>

$$\begin{aligned} & \langle 0 | i\partial_\mu J_5^\mu(x, a) | 0 \rangle \\ & = \frac{\alpha}{8\pi} \tilde{F}^{\mu\alpha} F_{\mu\alpha} + \frac{a\alpha}{8\pi} \tilde{F}^{\mu\alpha} F_{\mu\alpha}, \quad (16) \end{aligned}$$

其中  $\tilde{F}^{\mu\alpha} = \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma}$ . 第二项的贡献正好是第一项贡献的  $a$  倍. 由规范不变性的要求可知  $a = 1$ , 因此从(15)式就证明了(8)式成立. 即证明了当  $Q^2 = 0$  时价夸克态对  $F_{\pi\gamma}(0)$  的贡献正好是总振幅的一半。

本文所采用的证明方法明显地显示了规范不变性的作用. 正是规范不变性的轴矢流算符要求  $a \simeq 0$ , 从而将难以计算的高福克组态的贡献归结为从计算价夸克态的贡献得到,并给出价夸克态对  $F_{\pi\gamma}(0)$  的贡献是总振幅一半的物理推论. 进一步如果将(7)式代

入到(8)式并与(3)式相比较就得到一个对价夸克波函数的约束条件:

$$\int_0^1 dx \int \frac{d^2 k_{\perp}}{16\pi^3} \phi_{q\bar{q}/\pi}(x, \mathbf{k}_{\perp} = 0) = \frac{\sqrt{n_c}}{f_{\pi}} = \frac{\sqrt{3}}{f_{\pi}}. \quad (17)$$

这一约束条件在遍举过程的 QCD 唯象分析中是十分有用的.

### 参 考 文 献

- [ 1 ] R. Jackiw, D. Gross, Lectures on Current Algebra and its Applications, Princeton University Press (Princeton, 1972).
- [ 2 ] S. J. Brodsky, Tao Huang and G. P. Lepage, Published in Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 100, "Quarks and Nuclear Forces" ed. by D. Fries and B. Zeitnitz, (1982).
- [ 3 ] G. P. Lepage and S. J. Brodsky, *Phys. Rev.*, D22(1980), 2157.
- [ 4 ] Tao Huang, Published in the Proceedings of the XXth Int. Conf. on High Energy Physics, Madison, Wisc. (1980), S. J. Brodsky, Tao Huang, and G. P. Lepage, SLAC-PUB-2540, 2580.
- [ 5 ] G. P. Lepage, S. J. Brodsky, Tao Huang and P. B. Mackenzie, in Particles and Fields 2, ed. by A. Z. Capri and A. N. Kamal (Plenum, New York, 1983).
- [ 6 ] R. A. Brandt, *Phys. Rev.*, 180 (1969), 1490.
- [ 7 ] J. Schwinger, *Phys. Rev.*, 82 (1951), 664; C. R. Hagen, *Phys. Rev.*, 177(1969), 2622.
- [ 8 ] R. Jackiw, K. Johnson, *Phys. Rev.*, 182 (1969), 1459.

## A PHYSICAL CONSEQUENCE OF THE GAUGE INVARIANCE IN THE PROCESS $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$

HUANG TAO XIE YI-CHENG

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

### ABSTRACT

The contributions from the valence quark state and the higher Fock states of hadronic wavefunctions in the process  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  are analyzed in this paper. An important result, the contribution to the amplitude of the process  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  from the valence Fock state is one half of the total amplitude, is proved by using a gauge invariant identity of the divergence of the axial vector current. From this inference we obtain a constraint on the valence Fock state wavefunction, which is very useful for phenomenological analysis in exclusive processes.