第 9 卷 第 1 期　高 能 物 理 与 核 物 理　Vol. 9, No. 1
1985 年 1 月　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　Jan., 1985

研究简报

电子直线加速器中横向运动方程的讨论

罗应雄　吴文泰
（中国科学院高能物理研究所）

摘　要

本文讨论了电子直线加速器中更一般的横向运动方程并得到它的解. 指出了如今沿用的运动方程在初始动量矩不为 0 的情况下过高估计了磁场的聚焦作用.

在电子直线加速器中，大家一直沿用如下方程来描述电子的横向运动[1]:

$$\frac{dp_r}{dz}=\frac{k\varepsilon r}{2}\left(\frac{1}{\beta_p\beta}-1\right)\cos\theta+\frac{r}{2\beta}\frac{d\varepsilon}{dz}\sin\theta-\frac{\mathscr{B}_z^2 r}{4\beta\gamma}. \tag{1}$$

其中，$\varepsilon=\frac{eE_z}{m_0c^2}$，$\mathscr{B}_z=\frac{eB_z}{m_0c}$，$E_z$ 是轴向电场强度，B_z 是轴向磁感应强度，m_0 是电子静止质量，c 是光速，p_r 是电子横向动量(以 m_0c 为单位)，β_p 是高频波的相速与光速之比，β 是电子速度与光速之比，γ 是以 m_0c^2 为单位的电子的总能量，$k=2\pi/\lambda$，λ 是高频波长，θ 是电子相对于高频场的相位.

对电场没什么可说的，本文主要是讨论轴对称磁场对电子的作用. 为方便讨论起见，先假定不存在电场，(1)式变成

$$\frac{dp_r}{dz}=-\frac{1}{4\beta\gamma}\left(\frac{eB_z}{m_0c}\right)^2 r. \tag{2}$$

这个方程的成立是有条件的. 为了看清这些条件，我们从头来推导运动方程. 在轴对称场中，用圆柱坐标来描述电子的运动最方便. 电子在圆柱坐标中的运动方程为:

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma\dot{z})=er\dot{\varphi}\frac{\partial A}{\partial z}, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma\dot{r})-m_0\gamma r\dot{\varphi}^2=e\dot{\varphi}\frac{\partial(rA)}{\partial r}, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma r^2\dot{\varphi})=-e\frac{d(rA)}{dt}. \tag{5}$$

‘·’表示对时间的微商，A 是矢势的 φ 向分量，由于是轴对称场，矢势的其它两个分量为零. 在近轴区内，有

$$A=\frac{rB_z}{2}, \tag{6}$$

本文 1984 年 1 月 10 日收到.

由(5)式得到

$$\gamma r^2\dot{\varphi} = -\frac{eB_z}{2m_0}r^2 + Q_1, \tag{7}$$

Q_1 是积分常数，由初始条件决定，

$$Q_1 = \gamma_0 r_0^2\dot{\varphi}_0 + e\frac{B_{z0}}{2m_0}r_0^2 \tag{8}$$

把(7)式代入(4)式，改用 z 作自变量，并把 $t=0$ 对应于坐标原点，得到

$$r'' = \frac{d^2r}{dz^2} = -K^2r + \frac{Q_1^2}{c^2\beta^2\gamma^2r^3}, \tag{9}$$

或者写成

$$p_r' = \frac{dp_r}{dz} = -\beta\gamma K^2 r + \frac{Q_1^2}{c^2\beta\gamma r^3}, \tag{10}$$

其中，

$$K = \frac{eB_z}{2\beta\gamma m_0 c}.$$

可见，(2)式是假定 $Q_1 = 0$ 的结果．这等于下列三个条件之一成立：

1) $r_0 = 0$（电子都从轴上发出），

2) $\dot{\varphi}_0 = 0$，$B_{z0} = 0$（电子出射方向在子午平面内，且起始点磁场为零），

3) $\dot{\varphi}_0 + \dfrac{eB_{z0}}{2m_0\gamma_0} = 0$．（巧合）

事实上，这三个条件可能都不满足．所以，更一般的，应该用方程(10)来代替方程(2)．如果把(10)式改写成

$$p_r' = \left(-\beta\gamma K^2 + \frac{Q_1^2}{c^2\beta\gamma r^4}\right)r,$$

可以看出，在 $Q_1 \neq 0$ 的情况下，用方程(2)以及由它导出的包络方程[2]来计算电子的横向尺度，是过高估计了 B_z 的聚焦作用，得出的电子径向坐标或包络值比实际的偏小．

下面我们来求方程(9)的解．值得注意的是，由于 B_z 往往随 z 变化，故 K 往往不是常数（在使用方程 (2) 的情形，K 一定不是常数，因为 B_z 从 0 变到某一定值有一个过渡阶段）．这不要紧，我们可以把实际的场化成一阶梯曲线，从而变成分段常数，然后逐段求解．各个物理量在每段的末值就作为下一段的初值．(9)式两边乘以 r'，积分之，得到

$$r'^2 + K^2r^2 + \frac{Q_1^2}{c^2\beta^2\gamma^2r^2} = Q_2, \tag{11}$$

Q_2 是另一个积分常数，

$$Q_2 = r_0'^2 + K^2r_0^2 + \frac{Q_1^2}{c^2\beta_0^2\gamma_0^2r_0^2}, \tag{12}$$

对(11)式积分，得到

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}\,K}\left[Q_2 + \sqrt{Q_2^2 - 4K^2\frac{Q_1^2}{c^2\beta^2\gamma^2}}\sin(\pm 2Kz + \delta)\right]^{1/2}, \tag{13}$$

其中

$$\delta = \sin^{-1}\left(\frac{2K^2r_0^2 - Q_2}{\sqrt{Q_2^2 - 4K^2\dfrac{Q_1^2}{c^2\beta_0^2\gamma_0^2}}}\right). \tag{14}$$

sin 中的正负号这样来选择：在极大值之前（$r' > 0$）取正号，在极小值之前（$r' < 0$）取负号．极大值和极小值位置的确定，请参阅文献[3]．

下面我们来计算一个实例．为方便起见，我们做一些简化假设．设在初始位置，电子离轴线的距离 $r_0 = 2$ 毫米，对轴的倾角为 20 毫弧度，对子午平面的倾角为 20 毫弧度，起始磁场为 100 高斯，进加速管后受一恒定轴向磁场作用，$B_z = 600$ 高斯，电子能量增长率按下式计算：

$$\gamma = 1.154 + 19.48z$$

这相当于起始 β 值为 0.5，每米能量增长 10MeV；忽略去高频电场对电子的横向作用力．把这些数据代入(9)式，得到的电子横向坐标 r 见表 1：

表 1

z（米）	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.70	0.90	1.20	1.50	1.80	2.10	2.40	2.70	2.90	3.00
r（毫米）($Q_1 \neq 0$)	2.08	1.48	1.05	0.85	0.87	1.18	1.50	1.85	2.08	2.22	2.30	2.35	2.36	2.36	2.35
r（毫米）($Q_1 = 0$)	1.88	1.11	0.46	−0.046	−0.45	−1.05	−1.46	−1.85	−2.08	−2.21	−2.27	−2.30	−2.29	−2.28	−2.26

表中第 3 行是在(9)式中令 $Q_1 = 0$ 的结果．由表可以看出，在一些地方，两者的差别还是比较大的．特别需要指出两点：1）令 $Q_1 = 0$ 之后，不管怎样的初始条件，(9)式的解一定会出现 $r = 0$ 的点，然而，从物理观点来看，只有在某些特殊的初始条件下，电子才穿过轴线，在一般情况下是不会穿过轴线的．2)如果保留 Q_1，r 不会出现负值，而 $Q_1 = 0$ 时必定出现负的 r 值． 如果需要考虑纵向横向运动的耦合以及高次谐波对电子的作用时，则必须把方程(9)与纵向运动方程联立求解，这时，负的 r 值对纵向运动的影响将得到与事实正好相反的结果，这一点必须注意．

我们在撰写本文时，曾与姚充国同志进行过有益的讨论，特在此表示感谢．

参 考 文 献

[1] P. M. Lapostolle and A. L. Septier, eds., "Linear Accelerators", North Holland pub. Co., (1970), 128.
[2] 谢 羲等，原子能科学技术，**2**(1978)，119.
[3] 魏开煜，高能物理与核物理，**3**(1981)，328.

ON THE EQUATION OF TRANSVERSE MOTION IN ELECTRON LINAC

LUO YING-XIONG　WU WUN-TAI
(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The general equation of transverse motion is discussed and its solution is presented. It indicates that in the currently used equation of motion the focusing effect of the magnetic field is overestimated when the initial moment is not zero.

更　　正

本刊 1984 年第 3 期第 368 页的图 3 中：

(1) |电离室| 后面的"半导体"三字外应画方框；

(2) |前　放| 出来的信号应有两路，图中漏了到 E 路上方 |慢主放| 的一路；

(3) 七路应为 T 路。