

三角点阵 Eguchi-Kawai 模型的 Monte Carlo 研究

陈天崧 黄五群 郑希特

(南开大学)

(成都科技大学)

摘 要

本文对三角点阵的 EK 模型进行 Monte Carlo 研究。结果表明,对二维情况不存在 $U(1)$ 对称性的自发破缺,对三维情况,在弱耦合区看到了明显的 $U(1)$ 对称性的自发破缺。

一、引 言

格点规范及大 N 展开都是非微扰理论中的有力工具,人们自然有兴趣研究大 N 极限下的格点规范理论。

求解大 N 极限下格点 Wilson 模型的 Schwinger-Dyson 方程原则上应得到理论的解,但做此并不容易,目前仅对二维的情况得到了严格解。所以 Eguchi 和 Kawai 提出的一个简化模型^[1]引起了人们很大的兴趣。Eguchi 和 Kawai 发现当 $N \rightarrow \infty$ 时,通常格点规范理论中的 Wilson 作用量对应的配分函数

$$z_W = \int \prod_l dU_l \exp \left[\beta \sum_x \sum_{\mu \neq \nu} \text{Tr} (U_{x,\mu} U_{x+\mu,\nu} U_{x+\nu,\mu}^+ U_{x,\nu}^+) \right] \quad (1)$$

可化简为 Eguchi-Kawai 作用量所对应的配分函数

$$z_{EK} = \int \prod_{\mu} dU_{\mu} \exp \left[\beta \sum_{\mu \neq \nu} \text{Tr} (U_{\mu} U_{\nu} U_{\mu}^+ U_{\nu}^+) \right] \quad (2)$$

由于认为每个方向上的 U 与 x 无关,相当于对一个格点空间强加了周期性边界条件,这就将无限点阵的问题简化成一个超立方体点阵的问题,正是这一大简化,引起了人们对 EK 模型的重视。

Eguchi 和 Kawai 证明(1)和(2)满足同样的 Schwinger-Dyson 方程,在这意义上(2)和(1)是等价的。在他们的证明中本质地用到了(2)具有 $U(1)^d$ 对称性,但是, Bhanot, Heller 和 Neuberger 等人指出^[2-5],这个 $U(1)^d$ 对称性在 EK 模型的弱耦合区是自发对称破缺了的。Gonzalez-Arroyo 等人在分析弱耦合区的真空涨落时更进一步指出^[6],当

$$d > 2 \frac{N}{N-1} \quad (3)$$

时, $U(1)^d$ 对称破缺。

Bhanot 等人通过对方块点阵 EK 作用量的 Monte Carlo 研究证实了此^[2-3], 即在强耦合区 EK 作用量是等同于通常的 Wilson 作用量, 但在弱耦合区, 当维数 $d > 2$ 时, 发生 $U(1)$ 对称性的自发破缺, 这两个作用量已不再能等同了。

虽然迄今大多数格点工作是在超立方格点上作的, 理论上其它形式的格点有同样的兴趣, 如三角点阵^[7,8], 甚至随机的格点。我们这里采用 Bhanot 等人的方法, 对三角点阵的 EK 模型进行 Monte Carlo 研究。结果表明, 对二维情况, 不存在 $U(1)$ 对称性的自发破缺, 而对三维情况, 则看到了明显的 $U(1)$ 对称性的自发破缺。这结果是与方块点阵时的结论相一致的。

二、Monte Carlo 方法

我们对 $SU(5)$ 群的 EK 作用量采用标准的 Metropolis 方法进行研究。基本步骤如下:

1. 构造 200 个随机的 5×5 的么正么模矩阵, 用它们来模拟 $SU(5)$ 的群元素。这些矩阵在计算的过程中可更换, 即重新产生另外 200 个矩阵。

2. 随机地选取初始之群元素 U , 赋予每根 link, 计算作用量 S 。

3. 对某根 link, 等几率地从这 200 个矩阵中选取一个新的矩阵 U' , 计算新的作用量 S' 及 $\Delta S = S' - S$ 。

若 $\Delta S < 0$, 则将 U 变成 U' 。

若 $\Delta S \geq 0$, 则生成一个在 $(0, 1)$ 区间中等几率分布的随机数 r , 计算 $e^{-\Delta S}$ 。若 $e^{-\Delta S} > r$ 则 U 变成 U' , 否则 U 不变。

这个过程做 l 次。

4. 依次扫遍点阵的各根 link, 称为一个 Monte Carlo 迭代。做 M 次 Monte Carlo 迭代, 最后逼近平衡态。

为加速趋向平衡的过程, 我们在一部份随机矩阵的构造中加入 B_{eff} , 即在矩阵对角元素的实部上乘以 $B_{\text{eff}} = \max(1, a\beta)$ (a 为某个常数) 的因子, 然后再么正么模化。当 β 值大时, 这样产生的矩阵较接近单位矩阵。

三、结果分析

二维的三角点阵

作用量为

$$S_{EK}^{(2)} = \frac{\beta}{N} \text{Tr} [(sut + tus) + \text{h.c.}] \quad (4)$$

对 $N = 5$, 我们首先计算每个三角形的平均作用量随耦合常数 β 的变化曲线, 如图 3 所示。图中各点是作 200 个 Monte Carlo 迭代, 取后 100 个迭代之平均值。从图中可以判断 $\beta = 8$ 这个点在弱耦合区中。

为更明显地显示自发对称破缺的机制,我们在作用量 S_{EK} 中附加一个外磁场项,即

$$S_{EK}^{(2)h} = S_{EK}^{(2)} + \frac{1}{2} h \sum_{\mu} (\text{Tr} U_{\mu} + \text{Tr} U_{\mu}^{\dagger}) \quad (5)$$

固定 β 值,变化外磁场 h ,作关于 h 的 $\frac{1}{2N} \langle \text{Tr} U_{\mu} + \text{Tr} U_{\mu}^{\dagger} \rangle$ 曲线(相当“磁滞迴线”)。如有自发对称破缺机制,则应看到,在 $h = 0$ 处, $\frac{1}{2N} \langle \text{Tr} U_{\mu} + \text{Tr} U_{\mu}^{\dagger} \rangle$ 值有一个跳跃。如果没有自发对称破缺,则 $\frac{1}{2N} \langle \text{Tr} U_{\mu} + \text{Tr} U_{\mu}^{\dagger} \rangle = 0$ 。我们计算的结果示于图 4。图中各点是作 500 个 Monte Carlo 迭代,取后 250 个迭代之平均值。由图 4(a), (b) 可见,对二维的三角点阵,不论在强耦合区 ($\beta = 0.5$) 或弱耦合区 ($\beta = 8$) 都没有发现自发对称破缺,这是与(3)式之结论相符合的。

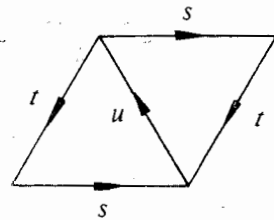


图 1

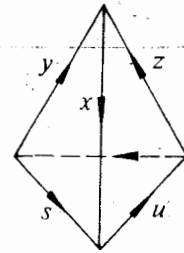


图 2

三维的三角点阵

作用量为

$$S_{EK}^{(3)} = \frac{\beta}{N} [\text{Tr} (sut + s^{-1}yx + u^{-1}x^{-1}z^{-1} + t^{-1}zy^{-1} + tus + xys^{-1} + z^{-1}x^{-1}u^{-1} + y^{-1}zt^{-1}) + \text{h.c.}] \quad (6)$$

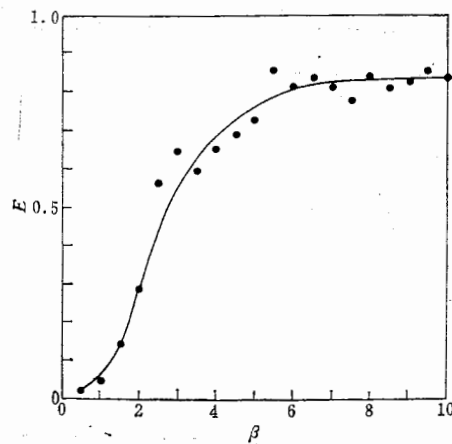


图 3

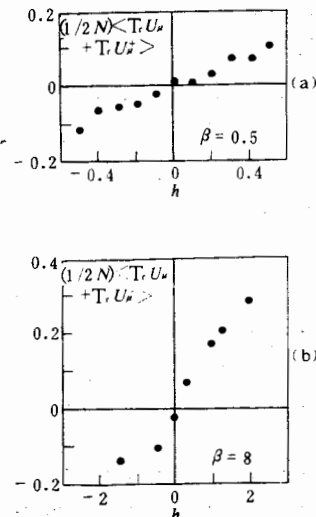


图 4

强耦
发生样的
阵的
发破
时的

骤如

这些

用量

> r

去代,

角元
beta 值

(4)

3 所
判断

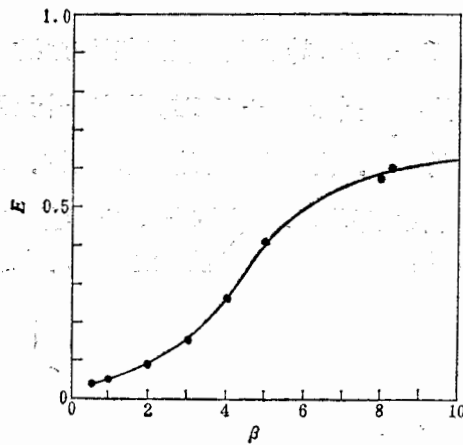


图 5

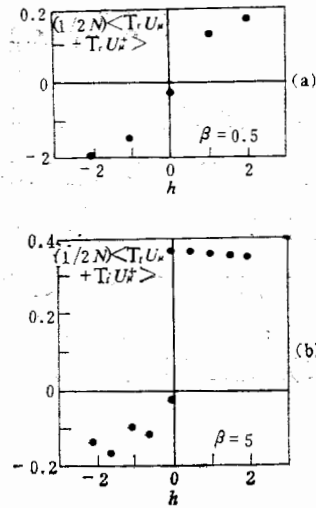


图 6

这里要说明的一点是,更完整的考虑是应计算斜六面体所分解成的六个四面体,但这无疑将大大增加计算量,因而我们采取了如上作用量进行分析。

对 $N = 5$, 我们同样作每个三角形的平均作用量随耦合常数 β 的变化曲线, 示于图 5。图中各点是作 60 个 Monte Carlo 迭代, 取后 20 个迭代作的平均。

$\frac{1}{2N} \langle \text{Tr} U_\mu + \text{Tr} U_\mu^\dagger \rangle$ 随 h 变化之曲线示于图 6。由图 6(a) 看到, 在强耦合区 ($\beta = 0.5$), 没有发生对称的自发破缺, 而由图 6(b), 我们看到在弱耦合区 ($\beta = 5$), $\frac{1}{2N} \langle \text{Tr} U_\mu + \text{Tr} U_\mu^\dagger \rangle$ 在 $h = 0$ 处有一明显之跳跃。

近来, 不少作者对 EK 模型进行修正^[4,5,9-12], 有 Twist EK 模型及 Quenched EK 模型, 使它们在弱耦合区也保持 $U(1)$ 对称性。我们下一步的工作将是对 TEK 或 QEK 模型进行研究。

这个工作的二维部分是在美国 Brown 大学的 IBM 计算机上完成的, 三维部分是在天津市电子计算应用技术研究所的 M-160 机上完成的。

最后, 我们对美国 Brown 大学谭崇义教授的有益讨论表示感谢。

此工作受到中国科学院科学基金的资助。

参 考 文 献

- [1] T. Eguchi, H. Kawai, *Phys. Rev. Lett.*, **48** (1982), 1063.
- [2] G. Bhanot, M. Heller, H. Neuberger, *Phys. Lett.*, **113B** (1982), 47.
- [3] M. Okawa, *Phys. Rev. Lett.*, **49**(1982), 353.
- [4] G. Parisi, *Phys. Lett.*, **112B** (1982), 463.
- [5] M. Okawa, *Phys. Rev. Lett.*, **49** (1982), 705.
- [6] A. Gonzalez-Arroyo, J. Jurkiewicz, C. P. Korthals Altes, Proc. 1981 Freiburg NATO Summer Institute (Plenum, New York, 1982).

[7]
[8]
[9]
[10]
[11]
[12]

T
techni
not b
of the

- [7] R. W. B. Ardill, J. P. Clarke, J. M. Drouffe, Preprint Ref. TH. 3634-CERN.
 [8] J. M. Drouffe, K. J. M. Moriarty, Preprint Ref. TH. 3624-CERN.
 [9] T. L. Chen (陈天崙), C-I Tan, X. T. Zheng (郑希特) *Phys. Lett.*, **116B** (1982), 419.
 [10] T. Eguchi, R. Nakagama, *Phys. Lett.*, **122B** (1983), 59.
 [11] A. Gonzalez-Arroyo, M. Okawa, *Phys. Lett.*, **120B** (1983), 174.
 [12] Y. Brihaye, P. Rossi, *Phys. Lett.*, **125B** (1983), 415.

MONTE CARLO STUDY OF THE TRIANGLE LATTICE EGUCHI-KAWAI MODEL

CHEN TIAN-LUN HUANG WU-QUN

(Nankai University)

ZHENG XI-TE

(Chengdu University of Science and Technology)

ABSTRACT

The triangle lattice Eguchi-Kawai model is studied by using the Monte Carlo technique. The results indicate that in the two-dimensional case $U(1)$ symmetry is not broken but in the three-dimensional case a clear evidence of spontaneous breaking of the $U(1)$ symmetry is observed in the weak coupling region.

无疑

于图

($\beta =$

$\text{Tr} U_\mu$

模型,
模型

是在