第6卷 第5期 高能物理与核物理 Vol. 6, No. 5
1982年9月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Sept., 1982

两个多粒子系统的散射理论

李扬国 张禹顺 王潍潍
(中国科学院高能物理研究所) (中国科学院理论物理研究所)
阮图南
(中国科学技术大学)

摘 要

本文在高能非相对论情况下，利用 Eikonal 近似，严格地推导出具有不同质量粒子的两个多粒子系统的散射振幅. 并给出了质心修正的形式.

一、引 言

对于讨论高能量下核-核散射问题，由于入射的炮弹与靶都是多粒子系统，因此，研究高能核-核散射的理论，必须处理两个多粒子系统的散射振幅. 如果把基本粒子视为由层子构成的，则从层子这一层次看，高能量下强子-强子散射，如 pp，πp 等散射，也是多粒子系统的散射. 因此，两个多粒子系统的高能散射理论对于探讨原子核和基本粒子结构的某些性质是很重要的.

处理高能量下核子与核的 Glauber 多次散射理论[1]，已经取得了相当大的成功. 人们在理论上处理两个多粒子系统间的散射时，常常把核子-核的 Glauber 多次散射理论直接推广到核-核散射理论[2,3]，而未加以证明. 为此，我们认为有必要给出它的严格证明. 在本文中，我们将一般地讨论在高能量下两个具有不同质量粒子的多粒子系统的散射问题. 导出在 Eikonal 近似下包含质心修正的散射振幅.

本文的第二节讨论两个多粒子系统的哈密顿量；第三节讨论两个多粒子系统间的散射振幅；第四节讨论高能量下的散射振幅. 最后做些讨论.

二、多粒子系统 A 与 B 的哈密顿量

多粒子系统 A 与 B (简称 A, B) 的哈密顿量可表为

$$H = H_A + H_B + V_{AB}. \tag{2.1}$$

其中 H_A，H_B 分别为 A 和 B 的哈密顿量即

本文 1981 年 1 月 2 日收到.

$$H_A = \sum_{i=1}^{A}\left(-\frac{\hbar^2}{2m_i}\Delta_i^2\right) + \sum_{i<j}^{A} V_{ij}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j), \tag{2.2}$$

$$H_B = \sum_{\alpha=1}^{B}\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu_\alpha}\Delta_\alpha^2\right) + \sum_{\alpha<\beta}^{B} V_{\alpha\beta}(\boldsymbol{y}_\alpha - \boldsymbol{y}_\beta). \tag{2.3}$$

式中 $m_i(\mu_\alpha)$ 是 A(B) 中第 $i(\alpha)$ 个粒子的质量，$V_{ij}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)$ 是A中第 i 与第 j 个粒子间相互作用，$V_{\alpha\beta}(\boldsymbol{y}_\alpha - \boldsymbol{y}_\beta)$ 是B中第 α 与第 β 个粒子间的相互作用．为了区分，分别用 $\boldsymbol{x}_i$ 表示A中 i 粒子坐标和 $\boldsymbol{y}_\alpha$ 表示B中 α 粒子坐标． A和B的相互作用势可以写为

$$V_{AB} = \sum_{i\in A}\sum_{\alpha\in B} V_{i\alpha}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{y}_\alpha). \tag{2.4}$$

为了讨论 $A + B \to A^* + B^*$ 的碰撞过程，我们需要分出整个系统的质心坐标和相对坐标．为此，先作A和B的质心和相对坐标变换

令

$$\boldsymbol{X} = \frac{m_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + m_A\boldsymbol{x}_A}{M},\quad M = m_1 + \cdots + m_A$$

$$\boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{X}, \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{Y} = \frac{\mu_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + \mu_B\boldsymbol{y}_B}{M_B},\quad M_B = \mu_1 + \cdots + \mu_B$$

$$\boldsymbol{\eta}_\alpha = \boldsymbol{y}_\alpha - \boldsymbol{Y}. \tag{2.6}$$

(2.5)、(2.6)显然满足如下约束条件

$$\sum_i m_i\boldsymbol{\xi}_i = \sum_i m_i\boldsymbol{x}_i - \sum_i m_i\boldsymbol{X} = 0 \tag{2.7a}$$

$$\sum_\alpha \mu_\alpha\boldsymbol{\eta}_\alpha = \sum_\alpha \mu_\alpha\boldsymbol{y}_\alpha - \sum_\alpha \mu_\alpha\boldsymbol{Y} = 0 \tag{2.7b}$$

显然由(2.5)、(2.6)的变换可分出 H_A 和 H_B 的质心动能和相对运动动能

$$-\sum_{i=1}^{A}\frac{\hbar^2}{2m_i}\Delta_i = -\frac{\hbar^2}{2M_A}\Delta_A + T_A(\boldsymbol{\xi}_1\cdots\boldsymbol{\xi}_A), \tag{2.8a}$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{B}\frac{\hbar^2}{2\mu_\alpha}\Delta_\alpha = -\frac{\hbar^2}{2M_B}\Delta_B + T_B(\boldsymbol{\eta}_1\cdots\boldsymbol{\eta}_B). \tag{2.8b}$$

其中 $-\frac{\hbar^2}{2M_A}\Delta_A$，$-\frac{\hbar^2}{2M_B}\Delta_B$ 分别为A和B的质心动能算符，$T_A(\boldsymbol{\xi}_1\cdots\boldsymbol{\xi}_A)$，$T_B(\boldsymbol{\eta}_1\cdots\boldsymbol{\eta}_B)$ 为其相对运动动能算符．于是

$$\left.\begin{aligned} H_A &= -\frac{\hbar^2}{2M_A}\Delta_A + H'_A, \\ H'_A &= T_A(\boldsymbol{\xi}_1\cdots\boldsymbol{\xi}_A) + \sum_{i<j}^{A} V_{ij}(\boldsymbol{\xi}_i - \boldsymbol{\xi}_j), \end{aligned}\right\} \tag{2.9a}$$

$$\left.\begin{aligned} H_B &= -\frac{\hbar^2}{2M_B}\Delta_B + H'_B, \\ H'_B &= T_B(\boldsymbol{\eta}_1\cdots\boldsymbol{\eta}_B) + \sum_{\alpha<\beta}^{B} V_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}_\alpha - \boldsymbol{\eta}_\beta). \end{aligned}\right\} \tag{2.9b}$$

若 $\phi_{A_r}(\boldsymbol{\xi}_1\cdots\boldsymbol{\xi}_A)$ 和 $\phi_{B_s}(\boldsymbol{\eta}_1\cdots\boldsymbol{\eta}_B)$ 分别是 H'_A 和 H'_B 的本征态，相应的本征值为 G_{A_r} 和

G_{B_s}. 由于从 $\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{y}_\alpha)$ 到 $\boldsymbol{\xi}_i(\boldsymbol{\eta}_\alpha)$ 的雅可比变换为

$$d\boldsymbol{x}_1\cdots d\boldsymbol{x}_A=\int d\boldsymbol{X}d\boldsymbol{\xi}_1\cdots d\boldsymbol{\xi}_A\delta\left(\frac{m_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+m_A\boldsymbol{\xi}_A}{M_A}\right), \tag{2.10a}$$

$$d\boldsymbol{y}_1\cdots d\boldsymbol{y}_B=\int d\boldsymbol{Y}d\boldsymbol{\eta}_1\cdots d\boldsymbol{\eta}_B\delta\left(\frac{\mu_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+\mu_B\boldsymbol{\eta}_B}{M_B}\right), \tag{2.10b}$$

因此，本征态的正交归一和完备条件分别为

$$\left.\begin{aligned}&\int d\boldsymbol{\xi}_1\cdots d\boldsymbol{\xi}_A\delta\left(\frac{m_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+m_A\boldsymbol{\xi}_A}{M_A}\right)\phi^*_{A_{r'}}(\boldsymbol{\xi}_1\cdots\boldsymbol{\xi}_A)\phi_{A_r}(\boldsymbol{\xi}_1\cdots\boldsymbol{\xi}_A)=\delta_{r,r'},\\&\delta\left(\frac{m_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+m_A\boldsymbol{\xi}_A}{M_A}\right)\sum_r\phi^*_{A_r}(\boldsymbol{\xi}'_1\cdots\boldsymbol{\xi}'_A)\phi_{A_r}(\boldsymbol{\xi}_1\cdots\boldsymbol{\xi}_A)=\delta(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}'_1)\cdots\delta(\boldsymbol{\xi}_A-\boldsymbol{\xi}'_A),\end{aligned}\right\} \tag{2.11a}$$

和

$$\left.\begin{aligned}&\int d\boldsymbol{\eta}_1\cdots d\boldsymbol{\eta}_B\delta\left(\frac{\mu_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+\mu_B\boldsymbol{\eta}_B}{M_B}\right)\phi^*_{B_{s'}}(\boldsymbol{\eta}_1\cdots\boldsymbol{\eta}_s)\phi_{B_s}(\boldsymbol{\eta}_1\cdots\boldsymbol{\eta}_s)=\delta_{s,s'},\\&\delta\left(\frac{\mu_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+\mu_B\boldsymbol{\eta}_B}{M_B}\right)\sum_s\phi^*_{B_s}(\boldsymbol{\eta}'_1\cdots\boldsymbol{\eta}'_B)\phi_{B_s}(\boldsymbol{\eta}_1\cdots\boldsymbol{\eta}_B)=\delta(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}'_1)\cdots\delta(\boldsymbol{\eta}_B-\boldsymbol{\eta}'_B).\end{aligned}\right\} \tag{2.11b}$$

再引入 A + B 系统的质心和相对运动坐标

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{R}=\frac{M_A\boldsymbol{X}+M_B\boldsymbol{Y}}{M},\ M=M_A+M_B.\\&\boldsymbol{r}=\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}.\end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

于是总哈密顿量(2.1)式化为

$$H=-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_R+H_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})+V_{AB}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_R+H'. \tag{2.13}$$

其中 Δ_R 为质心 $\boldsymbol{R}$ 的拉普拉斯算符，

$$\left.\begin{aligned}&H_0=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_r+H'_A+H'_B,\\&V_{AB}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\sum_{i\in A}\sum_{\alpha\in\beta}V_{i\alpha}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\xi}_i+\boldsymbol{\eta}_\alpha),\\&H'=H_0+V_{AB}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}).\end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

μ 为折合质量，$\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ 分别表 $\boldsymbol{\xi}_1\cdots\boldsymbol{\xi}_A$ 和 $\boldsymbol{\eta}_1\cdots\boldsymbol{\eta}_B$. 从(2.13)式分出了总动能，这样便易于求解散射问题.

三、A 和 B 系统的散射振幅

$A+B\rightarrow A^*+B^*$ 的散射振幅是下面多体薛定格方程的散射解

$$H'(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\Psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=E\Psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}), \tag{3.1}$$

或写为

$$(E-H_0)\Psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=V_{AB}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\Psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}). \tag{3.2}$$

令 $G_0=(E-H_0+i\varepsilon)^{-1}$; 则(3.2)式散射解的形式解为

$$\Psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\psi_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})+G_0V_{AB}\Psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}). \tag{3.3}$$

$\psi_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 是起始时、即A与B相距无穷远时的解，即为 H_0 的本征态

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_r+H'_A+H'_B\right)\psi_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=E_i\psi_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}). \tag{3.4}$$

由(2.9)的本征态 $\phi_A(\boldsymbol{\xi})$, $\phi_B(\boldsymbol{\eta})$. 则

$$\psi_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=e^{i\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r}}\phi_{A_i}(\boldsymbol{\xi}_1\cdots\boldsymbol{\xi}_A)\phi_{B_i}(\boldsymbol{\eta}_1\cdots\boldsymbol{\eta}_B) \tag{3.5}$$

其中 $\boldsymbol{k}_i$ 为入射系统A在质心系中的动量. 在(3.5)式中，我们忽略了A, B之间粒子的反对称化效应. 这是由于我们将讨论的是高能量的入射情况. 这时入射系统中粒子的动能很大，与靶中粒子交换项的重叠积分贡献极小。其次，我们不讨论 A, B间交换粒子的反应过程. 因此，在下面用到 H_0 的本征态展开时，我们忽略去A, B之间的反对称化. H_0 本征态的正交归一和完备条件为

$$\int d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{\eta}\,\delta\left(\frac{\sum_i m_i\boldsymbol{\xi}_i}{M_A}\right)\delta\left(\frac{\sum_\alpha \mu_\alpha\boldsymbol{\eta}_\alpha}{M_B}\right)\psi_f^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\psi_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$$
$$=(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_f)\delta_{A_iA_f}\delta_{B_iB_f}, \tag{3.6}$$

$$\sum_f\int\frac{d^3\boldsymbol{k}_f}{(2\pi)^3}\delta\left(\frac{\Sigma m_i\boldsymbol{\xi}_i}{M_A}\right)\delta\left(\frac{\sum_\alpha \mu_\alpha\boldsymbol{\eta}_\alpha}{M_B}\right)\psi_f^*(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\eta}')\psi_f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$$
$$=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}'_1)\cdots\delta(\boldsymbol{\xi}_A-\boldsymbol{\xi}'_A)\delta(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}'_1)\cdots\delta(\boldsymbol{\eta}_B-\boldsymbol{\eta}'_B). \tag{3.7}$$

由 δ 函数的性质和(3.5)、(3.7)，代入(3.3)得

$$\Psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\psi_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})+\int d\boldsymbol{r}'d\boldsymbol{\xi}'d\boldsymbol{\eta}'\delta\left(\frac{\sum_i m_i\boldsymbol{\xi}_i}{M_A}\right)$$
$$\times\delta\left(\frac{\sum_\alpha \mu_\alpha\boldsymbol{\eta}_\alpha}{M_B}\right)\cdot\sum_f\int\frac{d^3k_f}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{k}_f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}$$
$$\times\frac{\phi^*_{A_f}(\boldsymbol{\xi}')\phi^*_{B_f}(\boldsymbol{\eta}')\phi_{A_f}(\boldsymbol{\xi})\phi_{B_f}(\boldsymbol{\eta})}{E_i-E_f+i\varepsilon}$$
$$\times V_{AB}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\eta}')\Psi(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\eta}') \tag{3.8}$$

散射振幅是当 $r\to\infty$ 时 $\Psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 的渐近行为决定的. 这时，对 $\int d^3k_f$ 积分得

$$\Psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=e^{i\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}}\phi_{A_i}(\boldsymbol{\xi}_1\cdots\boldsymbol{\xi}_A)\phi_{B_i}(\boldsymbol{\eta}_1\cdots\boldsymbol{\eta}_B)$$
$$+\frac{e^{ik_fr}}{r}\sum_f\phi_{A_f}(\boldsymbol{\xi})\phi_{B_f}(\boldsymbol{\eta})F_f(\boldsymbol{k}_f,\boldsymbol{k}_i). \tag{3.9}$$

其中

$$F_{f,i}(\boldsymbol{k}_f,\boldsymbol{k}_i)=-\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{\eta}\,\delta\left(\frac{\Sigma m_i\boldsymbol{\xi}_i}{M_A}\right)\delta\left(\frac{\sum_\alpha \mu_\alpha\boldsymbol{\eta}_\alpha}{M_B}\right)$$
$$\times e^{-i\boldsymbol{k}_f\cdot\boldsymbol{r}}\phi^*_{A_f}(\boldsymbol{\xi})\phi^*_{B_f}(\boldsymbol{\eta})V_{AB}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\Psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) \tag{3.10}$$

$\boldsymbol{k}_f$ 为出射系统 A^* 在质心系中的动量. $F_{fi}(\boldsymbol{k}_i,\boldsymbol{k}_f)$ 便是 A + B 系统从初态 $\psi_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 散射到确定末态 $\psi_f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 的散射振幅. (3.8)式的 $\Psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 代入(3.10)，实际上是

一个无穷序列. 因此,(3.10)式振幅只是一个形式解. 在研究特定问题时,还需要作一些简化和假设,才能具体的应用. 下面将讨论在高能近似下(3.10)的进一步结果.

四、高能量下的散射振幅

当入射系统的能量足够大时,由于入射的能量比起内部激发能 $\Delta\varepsilon$ 大得多,并且散射后的能量变化不大. 因此,求解 $\Psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ 时,可以 (i) 忽略系统的内部激发能,(ii) 格林函数取线性化近似[4],即

$$G_0^{-1} \simeq g^{-1} = \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}_i}{\mu}(\boldsymbol{k}_i - \boldsymbol{k}_f). \tag{4.1}$$

取 $\boldsymbol{k}_i$ 方向为 z 轴时,则

$$\frac{\mu}{\hbar^2}\int \frac{d^3\boldsymbol{k}_f}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\boldsymbol{k}_f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{\boldsymbol{k}_i(\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_f)+i\varepsilon} = -\frac{i}{\hbar v}\delta^2(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}')\theta(z-z')e^{ik_i(z-z')}. \tag{4.2}$$

其中 $v = \frac{\hbar k_i}{\mu}$, 于是得

$$\begin{aligned} G_0(\boldsymbol{r}\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{r}'\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{\eta}') &= \Sigma - \frac{i}{\hbar v}\delta^2(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}')\theta(z-z')e^{ik_i(z-z')} \\ &\times \phi_{A_f}(\boldsymbol{\xi})\phi_{B_f}(\boldsymbol{\eta})\delta\left(\frac{\Sigma m_i\boldsymbol{\xi}_i}{M_A}\right)\delta\left(\frac{\Sigma\mu_\alpha\boldsymbol{\eta}_\alpha}{M_B}\right)\phi^*_{A_f}(\boldsymbol{\xi})\phi^*_{B_f}(\boldsymbol{\eta}). \end{aligned} \tag{4.3}$$

定义

$$\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = e^{-i\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}}\Psi(\boldsymbol{r}\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta}), \tag{4.4}$$

由(3.3)、(3.4)及(4.3)得

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= \phi_{A_i}(\boldsymbol{\xi})\phi_{B_i}(\boldsymbol{\eta}) - \frac{i}{\hbar v}\sum_f \phi_{A_f}(\boldsymbol{\xi})\phi_{B_f}(\boldsymbol{\eta}) \\ &\times \int_{-\infty}^{z} dz' d\boldsymbol{\xi}' d\boldsymbol{\eta}' \delta\left(\frac{\Sigma m_i\boldsymbol{\xi}'_i}{M_A}\right)\delta\left(\frac{\Sigma\mu_\alpha\boldsymbol{\eta}'_\alpha}{M_B}\right)\phi^*_{A_f}(\boldsymbol{\xi})\phi_{B_f}(\boldsymbol{\eta}) \\ &\times V_{AB}(\boldsymbol{b}, z', \boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\eta}')\Phi(\boldsymbol{b}, z', \boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\eta}'). \end{aligned} \tag{4.5}$$

根据 $\phi_{A_f}(\boldsymbol{\xi})$ 和 $\phi_{B_f}(\boldsymbol{\eta})$ 的完备性条件得

$$\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \phi_{A_i}(\boldsymbol{\xi})\phi_{B_i}(\boldsymbol{\eta}) - \frac{i}{\hbar v}\int_{-\infty}^{z} dz' V_{AB}(\boldsymbol{b}, z', \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})\Phi(\boldsymbol{b}, z', \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}).$$

从而得

$$\frac{\partial\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})}{\partial z} = -\frac{i}{\hbar v}V_{AB}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}). \tag{4.6}$$

解得

$$\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = e^{-\frac{i}{\hbar v}\int_{-\infty}^{z} dz' V_{AB}(\boldsymbol{b}, z', \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})} \cdot \phi_{A_i}(\boldsymbol{\xi})\phi_{B_i}(\boldsymbol{\eta}) \tag{4.7}$$

则

$$\Psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = e^{i\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r} - \frac{i}{\hbar v}\int_{-\infty}^{z} dz' V_{AB}(\boldsymbol{b}, z', \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})} \cdot \phi_{A_i}(\boldsymbol{\xi})\phi_{B_i}(\boldsymbol{\eta}) \tag{4.8}$$

(4.8)式便是在高能量 Eikonal 近似下的散射解,代入(3.8)便得 Eikonal 近似下的 A + B→

$A^* + B^*$ 的散射振幅

$$F_{fi}(\boldsymbol{k}_f\, \boldsymbol{k}_i) = \frac{ik}{2\pi}\int d^2b\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\eta}\, \delta\left(\frac{\Sigma m_i \boldsymbol{\xi}_i}{M_A}\right)\delta\left(\frac{\Sigma \mu_\alpha \boldsymbol{\eta}_\alpha}{M_B}\right)$$

$$\times \phi^*_{A_f}(\boldsymbol{\xi})\phi^*_{B_f}(\boldsymbol{\eta})[1 - e^{-\frac{i}{\hbar v}\int_{-\infty}^{\infty} dz V_{AB}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})}]\phi_{A_i}(\boldsymbol{\xi})\phi_{B_i}(\boldsymbol{\eta}). \tag{4.9}$$

其中 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k}_i - \boldsymbol{k}_f$，不难看出(4.9)是反映 A 与 B 系统各个粒子间多次散射的散射振幅．由此可知，我们只要知道 A 和 B 系统的内部状态 $\phi_A(\boldsymbol{\xi})$，$\phi_B(\boldsymbol{\eta})$ 以及相互作用 V_{AB}，原则上，我们就能计算散射振幅．但是，我们一般所得到的多体问题的解，都是从模型理论中得到的解，它们不是 H'_A 或 H'_B 的本征态 $\phi_A(\boldsymbol{\xi})$，$\phi_B(\boldsymbol{\eta})$，而是 H_A 或 H_B 的本征态，即(2.2)或(2.3)的本征态

$$H_A\Psi_A(\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_A) = \varepsilon_A\Psi_A(\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_A),\quad H_B\Psi_B(\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_B) = \varepsilon_B\Psi_B(\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_B), \tag{4.10}$$

因此，还必须建立一个在(4.10)本征态下的散射振幅 $F_{fi}(\boldsymbol{k}_f\, \boldsymbol{k}_i)$，为此令

$$f_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \int d^2b\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b}}[1 - e^{-\frac{i}{\hbar v}\int_{-\infty}^{\infty} dz V_{AB}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})}]. \tag{4.11}$$

根据变换(2.5)、(2.6)有

$$V_{AB}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{i,\alpha} V_{i\alpha}(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\xi}_i - \boldsymbol{\eta}_\alpha)$$

$$= \sum_{i\alpha} V_{i\alpha}(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{y}_\alpha - (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y})),$$

则

$$f_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = e^{i\boldsymbol{q}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})} f_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{4.12}$$

如果认为 $\Psi_A(\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_A)$，$\Psi_B(\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_B)$ 可以把它们的质心态与内部态分开，即

$$\Psi_A(\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_A) = \phi_A(\boldsymbol{X})\phi_A(\boldsymbol{\xi}_1\cdots\boldsymbol{\xi}_A),\quad \Psi_B(\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_B) = \phi_B(\boldsymbol{Y})\phi_B(\boldsymbol{\eta}_1\cdots\boldsymbol{\eta}_B). \tag{4.13}$$

利用 (4.12)、(4.13) 以及 (2.10) 的结果，我们可以得到

$$\frac{ik}{2\pi}\int d\boldsymbol{x}_1\cdots d\boldsymbol{x}_A d\boldsymbol{y}_1\cdots d\boldsymbol{y}_B \Psi^*_{A_f}(\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_A)\Psi^*_{B_f}(\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_B)$$

$$\times f_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\Psi_{A_i}(\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_A)\Psi_{B_i}(\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_B)$$

$$= \frac{ik}{2\pi}\int d\boldsymbol{X} d\boldsymbol{Y} \phi^*_A(\boldsymbol{X})\phi^*_B(\boldsymbol{Y}) e^{-i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})}\phi_A(\boldsymbol{X})\phi_B(\boldsymbol{Y})$$

$$\times \int d\boldsymbol{\xi}_1\cdots d\boldsymbol{\xi}_A d\boldsymbol{\eta}_1\cdots d\boldsymbol{\eta}_B\, \delta\left(\frac{\Sigma m_i\boldsymbol{\xi}_i}{M_A}\right)$$

$$\times \delta\left(\frac{\Sigma\mu_\alpha\boldsymbol{\eta}_\alpha}{M_B}\right)\phi^*_{A_f}(\boldsymbol{\xi})\phi^*_{B_f}(\boldsymbol{\eta}) f_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta})\phi_{A_i}(\boldsymbol{\xi})\phi_{B_i}(\boldsymbol{\eta}). \tag{4.14}$$

令

$$\Theta^{-1}(\boldsymbol{q}) = \int d\boldsymbol{X}\phi^*_A(\boldsymbol{X}) e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{X}}\phi_A(\boldsymbol{X})\int d\boldsymbol{Y}\phi_B(\boldsymbol{Y}) e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{Y}}\phi_B(\boldsymbol{Y}), \tag{4.15}$$

则 A + B 系统的多次散射振幅为

$$F_{f,i}(\boldsymbol{k}_f, \boldsymbol{k}_i) = \Theta(\boldsymbol{q})\int d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y} \Psi^*_{A_f}(\boldsymbol{x})\Psi_{A_f}(\boldsymbol{y}) f_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\Psi_{A_i}(\boldsymbol{x})\Psi_{A_i}(\boldsymbol{y}). \tag{4.16}$$

其中

$$f_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{ik}{2\pi}\int d^2b\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b}}[1 - e^{-\frac{i}{\hbar v}\int_{-\infty}^{\infty} dz V(\boldsymbol{r},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}], \tag{4.17}$$

$\boldsymbol{x}$ 是 $\{\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_A\}$ 的缩写；$\boldsymbol{y}$ 是 $\{\boldsymbol{y}_1\cdots, \boldsymbol{y}_B\}$ 的缩写．

$$dx = \prod_{i=1}^{A} dx_i;\ dy = \prod_{j=1}^{B} dy_j.$$

(4.16)式就是 Eikonal 近似下 A + B 系统的多次散射振幅，$\Theta(\boldsymbol{q})$ 为质心关联修正因子，它是由于用模型波函数 $\Psi_A(\boldsymbol{x})$ 和 $\Psi_B(\boldsymbol{y})$ 时，必须冻结质心运动的修正因子。

进一步化简(4.16)式，定义二体相移函数

$$\chi_{i\alpha}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{s}_i-\boldsymbol{s}_\alpha) = -\frac{1}{\hbar v}\int_{-\infty}^{\infty} dz V_{i\alpha}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_\alpha), \tag{4.18}$$

与它相对应的二体剖面函数为

$$\Gamma_{i\alpha}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{s}_i+\boldsymbol{s}_\alpha) = 1 - e^{i\chi_{i\alpha}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{s}_i+\boldsymbol{s}_\alpha)}. \tag{4.19}$$

代入(4.17)式，则

$$f_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{ik}{2\pi}\int d^2b\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b}}\left\{1-\prod_{i\in A}\prod_{\alpha\in B}[1-\Gamma_{i\alpha}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{s}_i-\boldsymbol{y}_\alpha)]\right\}. \tag{4.20}$$

于是(4.16)式变为

$$F_{f,i}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_i) = \Theta(\boldsymbol{q})\frac{ik}{2\pi}\int d^2b\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b}}\int d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}\Phi^*_{A_f}(\boldsymbol{x})\Phi^*_{B_f}(\boldsymbol{y})$$

$$\times\left\{1-\prod_{i\alpha}[1-\Gamma_{i\alpha}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{s}_i-\boldsymbol{s}_\alpha)]\right\}\Psi_{A_i}(\boldsymbol{x})\Psi_{B_i}(\boldsymbol{y}). \tag{4.21}$$

(4.18)—(4.21)式中 $\boldsymbol{s}_i$, $\boldsymbol{s}_\alpha$ 为 $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{y}_\alpha$ 在垂直于 z 方向的投影。(4.21)就是两个多粒子系统A与B在 Eikonal 近似下多次散射的振幅。

$A + B \rightarrow A^* + B^*$ 的微分截面为

$$\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega} = |F_{f,i}(\boldsymbol{k}_f,\boldsymbol{k}_i)|^2. \tag{4.22}$$

(4.21)是对于讨论高能量下二个多粒子系统散射很有实用价值的结果。

五、结　语

我们在本文中给出了在高能非相对论情况下的两个多粒子系统A与B的多次散射振幅的一个严格证明．这个散射振幅在实际应用中是比较方便的，它的物理图象也是十分清楚的．即它是通过A与B中的粒子的各种可能的多次碰撞而得到的散射振幅，而且，这种碰撞对于各个粒子来讲只发生一次。

由于我们通常用的都是模型波函数，在用这些波函数时，是要去掉质心态的．它的贡献就是(4.16)中的 $\Theta(\boldsymbol{q})$ 因子．这个修正因子，当A与B系统的粒子数很多时，不管 $\boldsymbol{q}$ 值多大，它是不重要的，即 $\Theta(\boldsymbol{q}) \simeq 1$．但是，如果A与B系统的粒子数不多时，如 α 粒子，d核等，那么 $\Theta(\boldsymbol{q})$ 因子的修正是十分重要的，特别是当 $\boldsymbol{q}$ 大时，它的贡献越显著．

然而，(4.21)式还只是一个框架，只不过是一个能实际应用的一般公式，用它去研究特定的多粒子系统间的散射问题，还要根据具体的对象作更具体的简化．我们将在另文中讨论它的运用．

参　考　文　献

[1] R. J. Glauber, In Lectures in Theoretical Physics, **Vol.1**(1959), 315.
[2] W. Czyz and C. L. Maximon, *Ann of Phys.*, **52** (1969), 59.
[3] V. Varma, *Phys. Rev.*, **C17**(1978), 267; *Nucl. Phys.*, **A294** (1978), 465.
[4] S. J. Wallace, *Ann of Phys.*, **78**(1973), 190; V. Franco and G. K. Varma, *Phys. Rev.*, **C18** (1978), 349.

SCATTERING THEORY OF TWO COMPLEX SYSTEMS

LI YANG-GUO　　ZHANG YU-SHUN

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

WANG WEI-WEI

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

RUAN TU-NAN

(University of Science and Technology of China)

ABSTRACT

Using nonrelativistic Eikonal approximation, we derive exactly the scattering amplitude of two complex systems with different masses. The center of mass correction factor is given too.