第6卷 第5期 高能物理与核物理 Vol. 6, No. 5
1982年9月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Sept., 1982

# 拉氏乘子和重质量杨-Mills场

李子平
(新疆大学)

**摘要**

如果给规范不变的拉氏量以适当的约束，使作用量的变分原理转化为带附加条件的限制变分问题. 含拉氏乘子的有效拉氏量中，可以允许有介子的质量项，这样就自然而然地导致了 Nakanishi 所讨论的重质量杨-Mills 场.

## 一、

在自发破缺规范理论中，规范介子的质量是通过真空自发破缺和 Higgs 机制而获得的. 用其他方式引进的规范不变的拉氏量，也可出现规范介子的质量项，而建立重质量的杨-Mills 场论[1]，由于拉氏量的选取不同，重质量的杨-Mills 场的重整化尚存在着争议[2]. 采用不定度规，有可能建立一个可重整化并么正的重质量的杨-Mills 场论[3]. 但在这些工作中，拉氏量中介子的质量项是形式地写进去的，缺乏直接的依据. 这里，我们从一种新观点出发，可以提供一个依据.

通常从拉氏形式的场论体制导出场方程和守恒流时，是作为自由变分来处理的，规范条件是在导出了场方程之后作为附加条件而引入. 这里我们采取另一种新的观点，认为场量满足的附加条件是一种约束条件，在对作用量变分之前，给拉氏量先引入适当的约束，而使作用量的变分转化为一个限制变分问题. 由于对场量先引入了约束条件，将这个场系统视为一个受约束系统，虽然原始拉氏量可具有规范不变性，但约束条件可破坏规范不变性，因此，这里的观点与流行的规范理论不同，然而，我们从这种约束变分原理出发，考虑到约束系统在规范变换下的变换性质[4]，所得到的含拉氏乘子的有效拉氏量中，可以出现介子的质量项，于是就自然而然地导致了 Nakanishi 的（非规范理论的）重质量杨-Mills 场论.

## 二、

设物质场 $\psi^a$ 和规范场 $W^\beta_\mu$ 的拉氏量为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(x;\ \psi^a, \psi^a_{,\nu};\ W^\beta_\mu, W^\beta_{\mu,\nu}), \tag{2.1}$$

本文1980年12月15日收到.

其中

$$\phi^\alpha_{,\nu}\equiv\partial_\nu\phi^\alpha,\ W^\beta_{\mu,\nu}\equiv\partial_\nu W^\beta_\mu,\ x_\nu\equiv(\boldsymbol{r},it). \tag{2.2}$$
$$(\alpha=1,2,\cdots,N,\ \beta=1,2,\cdots,M)$$

并记

$$[\mathscr{L}]_{\varphi^\sigma}\equiv\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^\sigma}-\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^\sigma_{,\nu}}\right). \tag{2.3}$$

设场系统受有约束,其线性约束条件为

$$\Phi^\gamma=\Phi^\gamma(\phi^\alpha,\phi^\alpha_{,\nu};\ W^\beta_\mu,W^\beta_{\mu,\nu})=0. \tag{2.4}$$
$$(\gamma=1,2,\cdots,k.\ \ k<N,M)$$

在约束条件(2.4)下,使作用量

$$I=\int_\Omega\mathscr{L}(x;\ \phi^\alpha,\phi^\alpha_{,\nu};\ W^\beta_\mu,W^\beta_{\mu,\nu})d\Omega \tag{2.5}$$

取极值的欧拉方程为[5]

$$[\mathscr{L}^*]_{\phi^\alpha}=0,\quad(\alpha=1,2,\cdots,N) \tag{2.6}$$
$$[\mathscr{L}^*]_{W^\beta_\mu}=0,\quad(\beta=1,2,\cdots,M) \tag{2.7}$$

其中

$$\mathscr{L}^*=\mathscr{L}+\lambda^\gamma\Phi^\gamma. \tag{2.8}$$

而 $\lambda^\gamma(x)(\gamma=1,2,\cdots,k)$ 为拉氏乘子.

假设原始拉氏量(2.1)式是规范不变的,而约束条件(2.4)式可以是非规范不变的. 我们来考查在规范变换下,此约束系统的变换性质[4],以便确定拉氏乘子的可能形式.

设场 $\phi^\alpha(x)$, $W^\beta_\mu(x)$ 在无穷小规范变换

$$\begin{aligned}\phi^\alpha(x)&\to\phi'(x)=\phi^\alpha(x)+\delta\phi^\alpha(x),\\ W^\beta_\mu(x)&\to W^{\beta\prime}_\mu(x)=W^\beta_\mu(x)+\delta W^\beta_\mu(x).\end{aligned} \tag{2.9}$$

下,体系的原始拉氏量(2.1)式或作用量(2.5)式保持不变,这时就有

$$\delta I=\int_\Omega[\mathscr{L}]_{\phi^\alpha}\delta\phi^\alpha d\Omega+\int_\Omega[\mathscr{L}]_{W^\beta_\mu}\delta W^\beta_\mu d\Omega+\int_\Sigma d\sigma_\nu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^\alpha_{,\nu}}\delta\phi^\alpha+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial W^\beta_{\mu,\nu}}\delta W^\beta_\mu\right]=0. \tag{2.10}$$

假设在变换(2.9)下,约束条件(2.4)式的改变为

$$\begin{aligned}\delta\Phi^\gamma&=\frac{\partial\Phi^\gamma}{\partial\phi^\alpha}\delta\phi^\alpha+\frac{\partial\Phi^\gamma}{\partial\phi^\alpha_{,\nu}}\delta\phi^\alpha_{,\nu}+\frac{\partial\Phi^\gamma}{\partial W^\beta_\mu}\delta W^\beta_\mu+\frac{\partial\Phi^\gamma}{\partial W^\beta_{\mu,\nu}}\delta W^\beta_{\mu,\nu}\\ &=G^{\gamma\alpha}\delta\phi^\alpha+G^{\gamma\alpha}_\nu\delta\phi^\alpha_{,\nu}+H^{\gamma\beta}_\mu\delta W^\beta_\mu+H^{\gamma\beta}_{\mu\nu}\delta W^\beta_{\mu,\nu}=K^\gamma.\end{aligned} \tag{2.11}$$

将(2.11)式对应地乘 $\lambda^\gamma(x)$, 对指标 $\gamma$ 求和后,再在 $\Omega$ 上积分,有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega[\lambda^\gamma\Phi^\gamma]_{\phi^\alpha}\delta\phi^\alpha d\Omega+\int_\Omega[\lambda^\gamma\Phi^\gamma]_{W^\beta_\mu}d\Omega\\ &\qquad+\int_\Sigma d\sigma_\nu\left[\lambda^\gamma\frac{\partial\Phi^\gamma}{\partial\phi^\alpha_{,\nu}}\delta\phi^\alpha+\lambda^\gamma\frac{\partial\Phi^\gamma}{\partial W^\beta_{\mu,\nu}}\delta W^\beta_{\mu,\nu}\right]\\ &=\int_\Omega\lambda^\gamma K^\gamma d\Omega.\end{aligned} \tag{2.12}$$

将(2.10)式与(2.12)式相加,得到在变换(2.9)下,系统的作用量和约束条件导致的变换结

果

$$\int_\Omega [\mathscr{L}^*]_{\psi^\alpha}\delta\psi^\alpha d\Omega + \int_\Omega [\mathscr{L}^*]\delta W_\mu^\beta d\Omega + \int_\Sigma d\sigma_\nu \left[\frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \psi^\alpha_{,\nu}}\delta\psi^\alpha + \frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial W^\beta_{\mu,\nu}}\delta W_\mu^\beta\right] = \int_\Omega \lambda^\gamma K^\gamma d\Omega. \tag{2.13}$$

由于系统的运动方程(2.6)和(2.7)式，即沿着约束系统运动的“轨线”(“轨线”适合(2.6)和(2.7)式)，在变换(2.9)下，系统的变换性质方程为

$$\int_\Sigma d\sigma_\nu \left[\frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \psi^\alpha_{,\nu}}\delta\psi^\alpha + \frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial W^\beta_{\mu,\nu}}\delta W_\mu^\beta\right] = \int_\Omega \lambda^\gamma K^\gamma d\Omega. \tag{2.14}$$

或

$$\partial_\nu \left[\frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \psi^\alpha_{,\nu}}\delta\psi^\alpha + \frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial W^\beta_{\mu,\nu}}\delta W_\mu^\beta\right] = \lambda^\gamma K^\gamma. \tag{2.15}$$

(2.15)式为约束场系统在规范变换(2.9)下，原始拉氏量(2.1)的规范不变性和约束条件(2.4)的变化，沿着系统的轨线，所导致的流散度方程．由(2.13)式可知，(2.15)式和系统的运动方程(2.6)和(2.7)式等效．这里的流散度方程(2.15)不仅与系统的拉氏量有关，而且还与系统所受的约束条件有关(与经典的 Noether 定理不同)．当拉氏量不存在约束时，$\lambda^\gamma = 0$，(2.15)式就是通常的守恒流方程．

## 三、

杨-Mills 的 $SU(2)$ 规范场 $\boldsymbol{W}_\mu(x)$ 与同位费米场 $\psi(x)$ 的拉氏量为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}\boldsymbol{F}^2_{\mu\nu} - \bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu - ig\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{W}_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi, \tag{3.1}$$

其中

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \partial_\nu \boldsymbol{W}_\mu - \partial_\mu \boldsymbol{W}_\nu + g\boldsymbol{W}_\nu \times \boldsymbol{W}_\mu, \tag{3.2}$$

$\boldsymbol{T}$ 为 $SU(2)$ 群生成元的表示矩阵，矢积和标积都是伴随空间的．

假设场系统所受的约束条件为

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{W}_\mu, \boldsymbol{W}_{\mu,\nu}) = 0. \tag{3.3}$$

由(2.6)，(2.7)式和(3.1)，(3.3)式，得约束系统的场方程为

$$\gamma_\mu(\partial_\mu - ig\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{W}_\mu)\psi + m\psi = 0, \tag{3.4}$$

$$\partial_\nu \boldsymbol{F}_{\mu\nu} + g(\boldsymbol{W}_\nu \times \boldsymbol{F}_{\mu\nu}) + \boldsymbol{j}_\mu + \boldsymbol{\lambda}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{W}_\mu} - \partial_\nu\left(\boldsymbol{\lambda}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{W}_{\mu,\nu}}\right) = 0, \tag{3.5}$$

其中

$$\boldsymbol{j}_\mu = ig\bar{\psi}\gamma_\mu \boldsymbol{T}\psi. \tag{3.6}$$

在局域规范变换

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \psi(x) + ig\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(x)\psi(x), \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{W}_\mu(x) \to \boldsymbol{W}'_\mu(x) = \boldsymbol{W}_\mu(x) + g\boldsymbol{W}_\mu(x)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(x) + \partial_\mu\boldsymbol{\varepsilon}(x).$$

下，拉氏量(3.1)式不变，而约束条件(3.3)可变更，设约束条件(3.3)在变换(3.7)下的改变为

$$\delta\boldsymbol{\Phi}=H_\mu\delta\boldsymbol{W}_\mu+H_{\nu\mu}\delta\boldsymbol{W}_{\nu,\mu}=\boldsymbol{K}. \tag{3.8}$$

将(3.1),(3.3),(3.7)和(3.8)式代入约束系统的变换性质方程(2.15)式,有

$$\begin{aligned}
&-\partial_\mu\boldsymbol{j}_\mu\cdot\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{j}_\mu\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\varepsilon}-\partial_\nu\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\varepsilon}+\partial_\mu\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\cdot(g\boldsymbol{W}_\nu\cdot\boldsymbol{\varepsilon})\\
&\quad+\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\cdot(g\partial_\mu\boldsymbol{W}_\nu\times\boldsymbol{\varepsilon})+\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\cdot(g\boldsymbol{W}_\nu\times\partial_\mu\boldsymbol{\varepsilon})+\partial_\mu\left[\frac{\partial(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\Phi})}{\partial\boldsymbol{W}_{\nu,\mu}}\right]\cdot\partial_\nu\boldsymbol{\varepsilon}\\
&\quad+\partial_\mu\left[\frac{\partial(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\Phi})}{\partial\boldsymbol{W}_{\nu,\mu}}\right]\cdot(g\boldsymbol{W}_\nu\cdot\boldsymbol{\varepsilon})+\frac{\partial(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\Phi})}{\partial\boldsymbol{W}_{\nu,\mu}}\cdot\partial_\mu\partial_\nu\boldsymbol{\varepsilon}\\
&\quad+\frac{\partial(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\Phi})}{\partial\boldsymbol{W}_{\nu,\mu}}\cdot(g\partial_\mu\boldsymbol{W}_\nu\cdot\boldsymbol{\varepsilon})+\frac{\partial(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\Phi})}{\partial\boldsymbol{W}_{\nu,\mu}}\cdot(g\boldsymbol{W}_\nu\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\varepsilon})\\
&=H_\mu\boldsymbol{\lambda}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\varepsilon}+H_\mu\boldsymbol{\lambda}\cdot(g\boldsymbol{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\varepsilon})+H_{\nu\mu}\boldsymbol{\lambda}\cdot\partial_\mu\partial_\nu\boldsymbol{\varepsilon}\\
&\quad+H_{\nu\mu}\boldsymbol{\lambda}\cdot(g\partial_\mu\boldsymbol{W}_\nu\cdot\boldsymbol{\varepsilon})+H_{\nu\mu}\boldsymbol{\lambda}\cdot(g\boldsymbol{W}_\nu\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\varepsilon}).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

根据同位旋空间中矢积和标积所构成的混合积性质以及 $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$ 的任意性,有

$$\boldsymbol{j}_\mu+\partial_\nu\boldsymbol{F}_{\mu\nu}+g\boldsymbol{W}_\nu\times\boldsymbol{F}_{\mu\nu}=\partial_\nu(H_{\mu\nu}\boldsymbol{\lambda})-H_\mu\boldsymbol{\lambda}; \tag{3.10}$$

$$\partial_\mu\boldsymbol{j}_\mu+g\boldsymbol{W}_\nu\times\partial_\mu\boldsymbol{F}_{\mu\nu}+g\partial_\mu\boldsymbol{W}_\nu\times\boldsymbol{F}_{\mu\nu}=g\boldsymbol{W}_\mu\times[H_\mu\boldsymbol{\lambda}-\partial_\nu(H_{\mu\nu}\boldsymbol{\lambda})]. \tag{3.11}$$

显然,由于(3.8)式,可知(3.10)式与(3.5)一致.

结合(3.10)式和(3.11)式,得

$$\partial_\mu[\boldsymbol{j}_\mu+g\boldsymbol{W}_\nu\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu}]=[\boldsymbol{j}_\mu+\partial_\nu\boldsymbol{F}_{\mu\nu}+g\boldsymbol{W}_\nu\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu}]\times g\boldsymbol{W}_\mu. \tag{3.12}$$

假设约束条件不存在,而作为自由变分来处理 ($\boldsymbol{\lambda}=0$),这时,根据杨-Mills 方程,(3.12)式将给出杨-Mills 守恒流.

下面我们将给定约束条件,从(3.10)和(3.11)式出发,来讨论拉氏乘子的可能形式.由(3.10)和(3.11)式,有

$$\partial_\mu[H_\mu\boldsymbol{\lambda}-\partial_\nu(H_{\mu\nu}\boldsymbol{\lambda})]=[H_\mu\boldsymbol{\lambda}-\partial_\nu(H_{\mu\nu}\boldsymbol{\lambda})]\times g\boldsymbol{W}_\mu. \tag{3.13}$$

对于约束条件

$$\boldsymbol{\Phi}=\partial_\mu\boldsymbol{W}_\mu=0, \tag{3.14}$$

可得 $H_\mu=0$, $H_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}$, 这时(3.13)式化为

$$\partial^2\boldsymbol{\lambda}=\partial_\mu\boldsymbol{\lambda}\times g\boldsymbol{W}_\mu. \tag{3.15}$$

由于变换性质方程和欧拉方程的等效性,我们可从(3.14)和(3.15)式来确定 $\boldsymbol{\lambda}$. 引入新的拉氏乘子 $\boldsymbol{\chi}$ 来代替原有的拉氏乘子 $\boldsymbol{\lambda}$, 设

$$\partial_\mu\boldsymbol{\lambda}=-\frac{1}{2}\mu_0^2\boldsymbol{W}_\mu+\eta\partial_\mu\boldsymbol{\chi}, \tag{3.16}$$

其中 $\boldsymbol{\chi}$ 为待定的同位矢标量场, $\mu_0$ 和 $\eta$ 为参数. 将(3.16)式代入(3.15)式,并根据(3.14)式,得 $\boldsymbol{\chi}$ 应适合下列方程

$$\partial^2\boldsymbol{\chi}=g\partial_\mu\boldsymbol{\chi}\times\boldsymbol{W}_\mu. \tag{3.17}$$

这样,由(2.8),(3.16)式,相应的有效拉氏量为(不计可能的四维散度)

$$\mathscr{L}^*=\mathscr{L}+\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{W}_\mu^2+\eta\boldsymbol{\chi}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{W}_\mu. \tag{3.18}$$

这个拉氏量 $\mathscr{L}^*$ 就是 Nakanishi 所讨论的重质量杨-Mills 场的拉氏量. 由 $\mathscr{L}^*$ 可以导出 Nakanishi 的重质量杨-Mills 场的全部场方程. 并且 $\boldsymbol{W}_\mu$ 满足 (3.14) 式, $\boldsymbol{\chi}$ 满足

(3.17)式.

由(3.11),(3.14)和(3.16)式，可得守恒流为

$$J_\mu = j_\mu + g W_\mu \times F_{\mu\nu} + \eta g W_\mu \times \chi. \tag{3.19}$$

这也是与 Nakanishi 的结果是一致的. 并且从上述讨论可知，这个守恒流的出现与原始拉氏量的规范不变性有关.

这样，我们将洛仑兹条件视为原始的 $SU(2)$ 规范不变拉氏量的约束条件，采用约束变分原理的场论体制，考虑到规范变换下约束体系的变换性质，就自然而然地导致了 Nakanishi 重质量杨-Mills 场的全部场方程和守恒流[3]. 同 Nakanishi 的重质量场一样，约束变分原理也不同于流行的规范理论.

作者谨对殷鹏程教授的宝贵意见表示感谢.

## 参　考　文　献


[1] R. J. Finkelstein, J. S. Kvitky, O. Mouton, *Phys. Rev.*, **D4**(1971), 2220, K. Shizuya, Nucl. *Phys.*, **B87**(1975), 255; **B94**(1975), 260; J. M. Cornwall. *Nucl. Phys.*, **B157**(1979), 392; E. Guendelman, *Phys. Rev. Lett.*, **43**(1979), 543.

[2] J. Reiff, M. Veltman, *Nucl. Phys.*, **B13**(1969), 545; D. G. Boulware, *Ann. Phys.*, (N. Y.), **56** (1970), 140; S. K. Wong, *Phys. Rev.*, **D3**(1971), 945; E. S. Fradkin, I. V. Tyutin, *Phys. Lett.*, **30B**(1969), 562; *Phys. Rev.*, **D2**(1970), 2841; I. A. Batalin, *Nucl. Phys.*, **B76**(1974), 347; W. A Bardeen, K. Shizuya, *Phys. Rev.*, **D8**(1978), 1969; C. N. Ktorides, *Phys. Rev.*, **D13**(1976), 2811.

[3] N. Nakanishi, *Phys. Rev.*, **D5**(1972). 1324; J. P. Hsu, E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev.*, **D9**(1974), 1678.

[4] 李子平，物理学报，**30**(1981)，1659.

[5] E. Klingbeil, Variationsrechrung (1977), 6. 4.


# LAGRANGIAN MULTIPLIER AND MASSIVE YANG-MILLS FIELDS


Li Zi-ping

*(Sinkiang University)*



### Abstract

If we give appropiate constraint to the gauge invariant Lagrangian, the variation principle of the action convert to the variational problems with subsidiary condition. The effective Lagrangian which contains Lagrangian multiplier may has the mass term of the mesons. In that case we obtain naturally the massive Yang-Mills fields which was discussed by Nakanishi.