

裂变电荷分布的准热力学理论

王正行

(北京大学技术物理系)

摘 要

假设裂变碎片在断裂时处于统计平衡态, 就可以把裂变碎片的粒子数分布看成围绕平均值的涨落, 并用准热力学方法来处理. 结果表明, 质量数分布、电荷分布、同位素分布和元素分布都是围绕一平均值的宽度为常数的 Gauss 分布, 有关的参数只依赖于温度和最可几裂变模式附近的碎片的性质. 对 $^{235}\text{U}(n_{\text{th}}, f)$ 的情形根据实验数据定出了五个基本参数, 并由此算出了其余的参数. 理论与实验的符合情况相当令人满意.

冯平观^[1]的裂变统计理论的一个基本假设, 认为在断点处两个裂变碎片彼此处于统计平衡态. 我们基于非平衡统计理论的分析^[2]支持冯氏的这一基本假设. 以这个基本假设作为出发点, 我们可以建立一个关于裂变的准热力学理论: 裂变的最可几模式相应于一个热力学的平衡态, 其它偏离最可几模式的情况则相应于偏离平衡态的统计涨落, 于是我们可以把裂变的各种模式的统计分布看作围绕平衡态的统计涨落现象, 用 Smoluchowski 的准热力学方法^[3]来处理.

把断裂时的轻碎片看成要研究的体系, 把重碎片看成粒子(质子和中子)源. 体系与粒子源之间可以交换粒子和能量. 达到统计平衡时, 体系具有平均质子数 \bar{Z} 、平均中子数 \bar{N} (从而平均质量数 $\bar{A} = \bar{Z} + \bar{N}$) 和与粒子源相等的温度 T . 实际观测到的体系质子数 Z 和中子数 N , 则是围绕平均值 \bar{Z} 和 \bar{N} 的统计分布. 根据热力学几率 P 与孤立系(体系加粒子源)的熵 \mathcal{S} 之间的 Boltzmann 关系

$$P \propto e^{\mathcal{S}/k} \quad (1)$$

(其中 k 为 Boltzmann 常数), 并运用热力学第二定律和 Maxwell 关系, 我们可以推得粒子数统计涨落为 $\Delta Z = Z - \bar{Z}$, $\Delta N = N - \bar{N}$ 时的几率近似为

$$P = P_0 e^{-\frac{(\Delta Z)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{\Delta Z \Delta N}{\sigma_{12}} - \frac{(\Delta N)^2}{2\sigma_2^2}}, \quad (2)$$

其中 P_0 为处于平衡态的几率, 而

$$\sigma_1^2 = \frac{kT}{(\partial \mu_z / \partial Z)_{T, V, N}} = kT \left(\frac{\partial Z}{\partial \mu_z} \right)_{T, V, N}, \quad (3)$$

$$\sigma_2^2 = \frac{kT}{(\partial \mu_N / \partial N)_{T, V, Z}} = kT \left(\frac{\partial N}{\partial \mu_N} \right)_{T, V, Z}, \quad (4)$$

$$\sigma_{12} = \frac{kT}{(\partial\mu_Z/\partial N)_{T,V,Z} + (\partial\mu_N/\partial Z)_{T,V,N}}; \quad (5)$$

S, V, μ_Z 和 μ_N 分别为体系的熵、体积、质子化学势和中子化学势。(2)式成立的条件是涨落 ΔZ 和 ΔN 足够小,我们在指数上只保留到它们的二次项。

(2)式是我们的基本公式,它包含五个基本参数: $\bar{Z}, \bar{N}, \sigma_1, \sigma_2$ 和 σ_{12} 。运用质量数 A 的等式

$$A = Z + N, \quad \bar{A} = \bar{Z} + \bar{N}, \quad (6)$$

我们可以把(2)式改写成质量数 A 一定时的质子数(电荷)分布

$$P = P_0 e^{-\frac{(A-\bar{A})^2}{2\sigma_M^2} - \frac{(Z-Z_p)^2}{2\sigma_C^2}}, \quad (7)$$

其中电荷分布宽度 σ_C 为

$$\frac{1}{\sigma_C^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{2}{\sigma_{12}} + \frac{1}{\sigma_2^2}, \quad (8)$$

质量数分布宽度 σ_M 为

$$\frac{1}{\sigma_M^2} = \left(\frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_{12}^2} \right) \sigma_C^2, \quad (9)$$

最可几电荷 Z_p 是质量数 A 的线性函数

$$Z_p = \bar{Z} + k_Z(A - \bar{A}) = k_Z A + b_Z, \quad (10)$$

其中的斜率 k_Z 和截距 b_Z 分别为

$$k_Z = \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_{12}} \right) \sigma_C^2, \quad b_Z = \bar{Z} - k_Z \bar{A}. \quad (11)$$

我们还可以把(2)式改写成电荷数 Z 一定时的质量数 A 的分布(同位素分布)

$$P = P_0 e^{-\frac{(Z-\bar{Z})^2}{2\sigma_I^2} - \frac{(A-A_p)^2}{2\sigma_A^2}}, \quad (12)$$

其中元素分布宽度 σ_I 为

$$\sigma_I = \frac{\sigma_M \sigma_C}{\sigma_1}, \quad (13)$$

同位素分布宽度为 σ_A , 最可几同位素质量数 A_p 是质子数 Z 的线性函数

$$A_p = \bar{A} + k_A(Z - \bar{Z}) = k_A Z + b_A, \quad (14)$$

其中的斜率 k_A 和截距 b_A 分别为

$$k_A = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_C^2} k_Z, \quad b_A = \bar{A} - k_A \bar{Z}. \quad (15)$$

由(3)–(5)式可以看出,上述各个参数都只依赖于温度和最可几裂变模式附近的碎片的性质。在五个基本参数中, \bar{A} 和 \bar{Z} 不可能由准热力学理论本身来确定,需要有关裂变过程动力学的知识,根据裂变的统计理论^[2],它们可以由裂变核 ^{235}U 的位能曲面谷来确定。 σ_1, σ_2 和 σ_{12} 的定义式(3)–(5)表明,从理论上来计算它们,需要知道在最可几裂变模式(\bar{Z}, \bar{A})附近的碎片的质子化学势 μ_Z 和中子化学势 μ_N ,这也不可能由准热力学理论来确定。所以,如果限定在准热力学理论的范围内,则我们一共有五个独立的需要由实

验确定的参数,而其余的参数则可通过有关的公式由它们算出来. 我们选择 \bar{Z} , \bar{A} , σ_1 , σ_M 和 σ_C 作为独立的需要由实验来确定的参数. 之所以选择 σ_1 , σ_M 和 σ_C 而不选择 σ_1 , σ_2 和 σ_{12} , 是由于前者与实验数据的关系更直接一些,也可以定得更准确一些. 我们采用 Flynn 等人^[4]和 Amiel 等人^[5]的实验数据,定出的5个参数以及由它们算出的另外5个参数值见表1. 在从质量链 A' 换算到碎片质量数 A 时,加上的平均瞬发中子数 ν 用与 Wahl 等人^[6]相同的公式来计算.

表1 十个参数的值

实验确定的参数值	计算得出的参数值
$\bar{A} = 96.36$	$\sigma_1 = 2.18$
$\bar{Z} = 38.00$	$k_Z = 0.383$
$\sigma_1 = 1.51$	$b_Z = 1.104$
$\sigma_M = 5.48$	$k_A = 2.41$
$\sigma_C = 0.601$	$b_A = 4.65$

表2

A'	A	$(Z_P)_{exp}$	$\sigma_C(A)$	$(Z_P)_{cal}$	$P(A)$
84	84.77	33.6	0.6	33.56	0.986
85	85.83	34.05	0.555	33.97	1.32
86	86.89	34.33	0.601	34.38	1.95
87	87.96	34.74	0.719	34.78	2.55
88	89.02	35.28	0.665	35.19	3.62
89	90.08	35.74	0.576	35.60	4.80
90	91.14	36.02	0.489	36.00	5.89
91	92.20	36.40	0.616	36.41	5.93
92	93.27	36.83	0.649	36.82	5.97
93	94.33	37.36	0.651	37.22	6.40
94	95.39	37.76	0.599	37.63	6.44
95	96.45	38.03	0.479	38.04	6.50
96	97.51			38.44	6.28
97	98.58			38.85	6.03
131	131.58	50.71	0.683	50.91	2.82
132	132.65	51.23	0.676	51.32	4.2
133	133.71	51.67	0.558	51.73	6.75
134	134.77	52.1	0.436	52.13	7.65
135	135.83	52.51	0.608	52.54	6.60
136	136.89	52.99	0.700	52.95	6.18
137	137.96	53.43	0.667	53.35	6.26
138	139.02	53.81	0.557	53.76	6.80
139	140.08	54.14	0.571	54.17	6.50
140	141.14	54.45	0.654	54.57	6.36
141	142.20	55.06	0.676	54.98	5.82
142	143.27	55.38	0.688	55.39	5.87
143	144.33	55.70	0.479	55.79	5.95
144	145.39	56.15	0.484	56.20	5.39

确定了这些参数,就可以讨论理论结果与实验的比较,分述如下。

1. 对于质量数 A 一定时不同电荷 Z 的分布,是以 Z_p 为中心宽度为 σ_c 的 Gauss 分布,这是实验上早就知道的结果^[7],与冯氏^[4]理论的结果一致。

2. 电荷分布宽度 σ_c 不随质量数 A 改变,对于同一裂变核来说是一常数。从表 2 可以看出,实验值 $\sigma_c(A)$ 基本上是常数,与平均值 $\sigma_c = 0.601$ 的偏差大都在 15% 以内,只有个别点达到 20%。

3. 最可几电荷 Z_p 是质量数 A 的线性函数,用表 1 的参数算出的最可几电荷见表 2 中第五列 $(Z_p)_{cal}$,可以看出,它与实验值 $(Z_p)_{exp}$ 的偏差大都在 0.3% 以内,符合得相当好,见图 1。图中圆圈为轻碎片的实验值,黑圆点为重碎片的实验值,实线为理论值,虚线为不变电荷分布假说 (UCD)^[8] 的值。

4. 对于电荷数 Z 一定时不同质量数 A 的同位素分布,是以 A_p 为中心宽度为 σ_1 的 Gauss 分布。图 2 给出了 Amiel 等人^[5]的实验数据中七种元素的同位素分布,横坐标为 $A - (A_p)_{exp}$,实线为宽度 $\sigma_1 = 1.51$ 的 Gauss 分布,可以看出,实验点基本上落在这条曲线附近。

5. 同位素分布宽度 σ_1 不随电荷数 Z 改变,对于同一裂变核来说是一常数。从表 3 可以看出,实验值 $\sigma_1(Z)$ 基本上是常数,与平均值 $\sigma_1 = 1.51$ 的偏差在 8% 以内,见图 2。

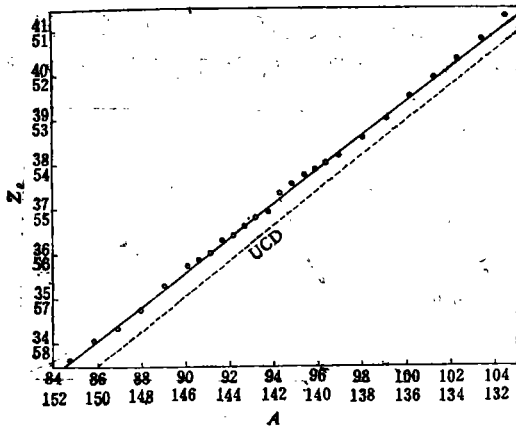


图 1 最可几电荷 Z_p

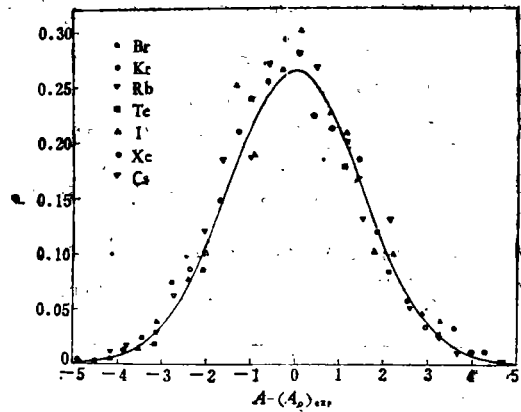


图 2 同位素分布

6. 最可几同位素质量数 A_p 是电荷数 Z 的线性函数,用表 1 的参数算出的最可几同位素质量数见表 3 的第四列 $(A_p)_{cal}$,可以看出,它与实验值 $(A_p)_{exp}$ 的偏差都在 0.3% 以内,符合相当好,见图 3。图中圆圈为轻碎片的实验值,黑圆点为重碎片的实验值,直线为理论值。

7. 从 (12) 式还可看出,对各种同位素求和以后的元素 Z 的分布 $P(Z) = \sum_A P(Z, A)$ 是一个以 \bar{Z} 为中心宽度为 σ_1 的 Gauss 分布。图 4 给出了理论曲线与实验的比较,上图是奇数电荷的分布,实线是由表 1 的参数算出的理论曲线乘以 0.8;下图是偶数电荷的分布,实线是由表 1 的参数算出的理论曲线乘以 1.2。图中圆圈是轻碎片的实验值,黑圆点是重碎片的实验值。有几种元素只在少数几个 A 值有实验值 $P(Z, A)$,根据它们,我们用

表 3

Z	$(A_F)_{exp}$	$\sigma_1(Z)$	$(A_F)_{cal}$	$P(Z)$
32				0.54
33				1.29
34				4.18
35	89.03	1.513	89.12	5.97
36	91.27	1.507	91.53	15.27
	93.65	1.518	93.94	12.13
37				
49				6.43
50				11.45
51				8.02
52	134.78	1.387	134.82	18.05
53	137.08	1.472	137.23	11.84
54	139.61	1.642	139.64	19.75
55	142.20	1.531	142.06	11.23

(12)式代入相应的 $(A_F)_{exp}$ 值和 $\sigma_1(Z)$ 值可以推算出相应的 $P(Z)$ 值(对不同的 A 取平均), 在图中用方块表示, 空心的为轻碎片, 实心的为重碎片. 上述元素分布的 $P(Z)$ 值均见表 3 的第五列. 从图 4 可以看出, 理论与实验的符合是不能满意的, 而有趣的是 Amiel 等人^[3]已经指出的奇偶效应: 奇数电荷的元素分布比理论曲线约低 20%, 而偶数电荷的元素分布则比理论曲线约高 20%. 这看来是一微观的动力学效应, 我们的宏观准热力学理论只能给出它们的平均值.

8. 从(7)式可以看出, 裂变碎片的质量数分布 $P(A) = \sum_Z P(Z, A)$ 是一个以 \bar{A} 为中心宽度为 σ_M 的 Gauss 分布. 实验分布与 Gauss 分布偏离较大, 需要用几个 Gauss 分

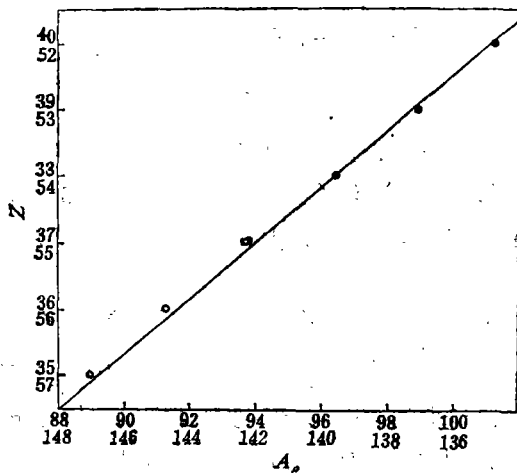
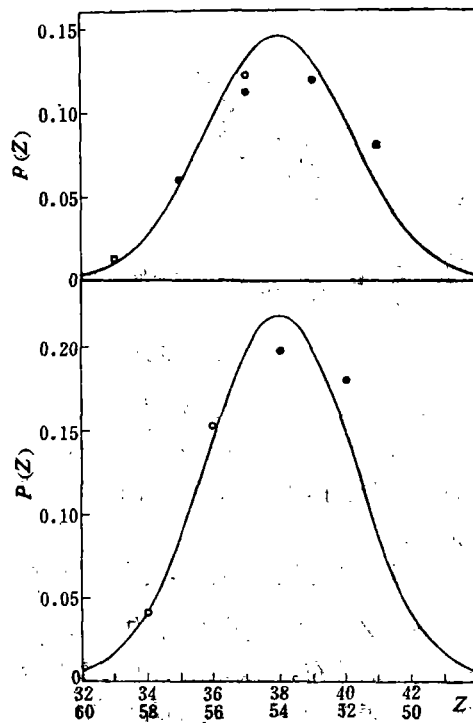
图 3 最可几同位素质量数 A_F 

图 4 元素分布

布的线性组合才能较好地拟合^[9]。这是由于这里的质量数分布宽度 $\sigma_M = 5.48$ 已经相当大, 在这样宽的范围内, 涨落 ΔZ 和 ΔN 不再能看成小量, 我们的近似公式 (2) 已经不能用。

尽管本文所提出的裂变电荷分布的准热力学理论相当简单, 但与实验相比, 在定性和定量两方面的符合都不错, 看来在这个理论中包含了基本的合理的东西。为了作出审慎的结论, 还需要再与更多的实验进行比较。

作者在此感谢与王竹溪教授和胡济民教授的有益的讨论。

参 考 文 献

- [1] P. Fong, *Phys. Rev.*, **102**(1956), 434.
- [2] 王正行, *高能物理与核物理* **2**(1982).
- [3] 王竹溪, 《统计物理学导论》, 人民教育出版社, 1978年, 北京.
- [4] K. F. Flynn and L. E. Glendenin, ANL-7749, 1970.
- [5] S. Amiel and H. Feldstein, *Phys. Rev.*, **C11**(1975), 845.
- [6] A. C. Wahl, R. L. Ferguson, D. R. Nethaway, D. E. Troutner and K. Wolfsberg, *Phys. Rev.*, **126**(1962), 1112.
- [7] R. Vandenbosch and J. R. Huizenga, "Nuclear Fission", Academic Press, 1973, New York.
- [8] A. C. Pappas, Proc. Int. Conf. Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva 1955, Vol. 7, pp. 19-26, United Nations, New York.
- [9] 王正行, 于相杰, 黄森, 《铀钚中子裂变质量分布的一个经验公式》, 北京大学内部报告, 1977年.

QUASI-THERMODYNAMIC THEORY ON FISSION CHARGE DISTRIBUTION

WANG CHENG-SHING

(Department of Technical Physics, Peking University)

ABSTRACT

Assuming fission fragments are in statistical equilibrium state at scission point, we can consider the particle number distributions of fission fragments as the fluctuations around some average values, and treat them by means of quasi-thermodynamic method. The main result is that all distributions of mass number, charge number, isotopes and elements are Gaussian distributions around some average values and with constant variances, and that all relevant parameters depend on temperature and properties of fragments near the most probable fission mode only. We have determined the values of five fundamental parameters for the case of $^{235}\text{U}(n_{th}, f)$ according to the experimental data, and use them to calculate the other parameters. The agreement between theory and experiment is satisfactory.