第6卷 第1期 高能物理与核物理 Vol. 6, No. 1
1982年1月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Jan., 1982

束缚态波函数的重迭积分和夸克质量

伍经元 鞠长胜
（中国科学院高能物理研究所）

摘　　要

文献[1]把 $1^-\to 0^-+\gamma$ 矩阵元中的重迭积分写成

$$I=\int d^3x e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}/2}\phi_f^*(\boldsymbol{x}')\phi_i(\boldsymbol{x});$$

用 Bethe-Salpeter 方程、瞬时近似和非相对论近似，我们得不出这个结果．我们推导出的重迭积分明显地与 quark 质量有关．只是在束缚能可以忽略时才得到类似上述的结果．

一、引　　言

在讨论由夸克组成的强子束缚态时，Bethe-Salpeter 方程仍然是一个可能的理论．当夸克在束缚态内部运动速度很小时，可以认为夸克间相互作用的传递是瞬时的．而且在束缚态的质心系中夸克的 Dirac 旋量波函数的小分量可以忽略．在这些假定下，束缚态的四维时空波函数 $\phi(x)$ 可以用三维波函数 $\phi(\boldsymbol{x})$ 来表示． 在某些过程中，例如 $1^-\to 0^-+\gamma$ 等，跃迁矩阵元中出现的重迭积分也从四维变成三维．这在文献中[1]写成

$$I=\int d^3x e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}/2}\phi_f^*(\boldsymbol{x}')\phi_i(\boldsymbol{x}). \tag{1}$$

其中 ϕ_i 和 ϕ_f 分别为始末态束缚态的三维波函数，且

$$\int d^3x\phi_j^*(\boldsymbol{x})\phi_j(\boldsymbol{x})=1,\quad j=i \text{ 或 } f.$$

它们都在各自的质心系定义，即 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$ 分别代表质心系坐标，$\boldsymbol{q}$ 是三维传递动量．(1) 的特点在于说明矩阵元和夸克质量 m_q 无关．在有的结构模型中假设 $m_q\gg$ 强子质量，因而夸克在强子中速度是很慢的，所以能采用上述非相对论近似，而且夸克质量也不出现在矩阵元中，也即夸克的质量不能通过这类跃迁来测量．

本文对上述结论作了比较深入的探讨，发现在上述假设下，一般来说并没有 (1) 的结果，相反地，重迭积分与夸克质量有着很大关系． 当束缚态的反冲速度 β 很小时，重迭积分为

$$I=\frac{i}{2\pi}\int d^3x\phi_f^*(\boldsymbol{x})\phi_i(\boldsymbol{y})e^{i\gamma\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x}m_q} \tag{2}$$

本文1979年8月21日收到．

其中 $\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}$, $\boldsymbol{y}=\gamma\boldsymbol{x}$, 显然，重迭积分与夸克质量 m_q 有关. 仅在束缚能可以忽略的情况下,即 $m_q\sim m_{介子}/2$ 时,(2) 的指数才回到

$$i\gamma\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x}m_q=-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}/2;$$

但此时的 (2) 与 (1) 还只是相近,而不完全一样,因为 (2) 中发生 Lorentz 收缩的却是始态"靶"粒子.

当反冲速度 β 较大时,推导的困难使得我们只作粗浅的讨论.

二、波函数和重迭积分

一般在忽略小分量后，Bethe-Salpeter 方程可写成[2]

$$\left(\frac{i\hat{k}}{2}+i\hat{p}+m_q\right)\chi_K\phi_K(p)\left(-\frac{i\hat{k}}{2}+i\hat{p}+m_q\right)=-i\int d^4qG(p,q)\phi_K(q)\chi_K. \tag{3}$$

其中 k 表示束缚态介子四动量，p 是其内部夸克相对运动四动量，$\hat{k}=k_\mu\gamma^\mu$，$\hat{p}=p_\mu\gamma^\mu$，$\phi_k(p)$ 为在动量空间K介子的不变四维 Bethe-Salpeter 波函数的时空部份，χ_K 为旋量部份. 在瞬时相互作用近似下,积分核 $G(p,q)$ 只是三维动量的函数，$G(p,q)=G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$. 在质心系中忽略夸克 Dirac 旋量波函数的小分量，则四维 Bethe-Salpeter 波函数 $\phi(p)$ 可以用三维(空间)波函数 $\phi(\boldsymbol{p})$ 表示[2]:

$$\phi(p)=\frac{1}{2\pi i}\frac{m-2E}{\left[p_0-\left(-\frac{m}{2}+E-i\epsilon\right)\right]\left[p_0-\left(\frac{m}{2}-E+i\epsilon\right)\right]}\phi(\boldsymbol{p}). \tag{4}$$

现在设 $|K\rangle$ 为夸克的束缚态，对过程 $K\to K'+\gamma$ 等的 Bethe-Salpeter 矩阵元 $\langle K'|J(z)|K\rangle$ 的最低阶 Feynman 图(见图1)的贡献可表示成[3]

$$\int d^4ze^{-iqz}\langle K'|J(z)|K\rangle=(2\pi)^2\delta^4(K-K'-q)\{QTr(\bar{\chi}_{K'}\Gamma^A\chi_K\gamma_4)\tilde{I}$$
$$-Q'Tr(\bar{\chi}_{K'}\gamma_4\chi_K\Gamma^B)\tilde{I}'\}. \tag{5}$$

其中 Q 和 Q' 为夸克电荷，Γ 为相互作用顶点的旋量结构，$\tilde{I}$ 和 $\tilde{I}'$ 即介子空间波函数的重迭积分:

$$\tilde{I}=\int d^4p\phi^*_{K'^*}(p^*)\phi_{K^*}(p+q/2)\left(\frac{m}{2}-p_0-q_0/2-E'\right),$$

$$\tilde{I}'=\int d^4p\phi^*_{K'^*}(p^*)\phi_{K^*}(p-q/2)\left(-\frac{m}{2}-p_0+q_0/2+E'\right). \tag{5'}$$

因为 $\phi_{K'}$ 是四维不变(时空)波函数,我们把它选在 K' 的质心系，记为 $\phi_{K'^*}(p^*)$，其中 p^* 表示在 K' 质心系 K′ 介子中的夸克相对四动量. 以下仅就 $\tilde{I}$ 进行讨论,对 $\tilde{I}'$ 的讨论是同样的,由 (4) 和 (5′) 不难求得

$$\tilde{I}=(2\pi)^{-2}\int d^3pdp_0\phi^*_{K'^*}(\boldsymbol{p}^*)\phi_{K^*}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}/2)$$
$$\cdot\frac{(m'-2E^*)(m-2E')}{\left[p_0^*-\left(-\frac{m'}{2}+E^*-i\epsilon\right)\right]\left[p_0^*-\left(\frac{m}{2}-E^*+i\epsilon\right)\right]\left[p_0-\left(-\frac{q_0}{2}-\frac{m}{2}+E'-i\epsilon\right)\right]}; \tag{6}$$

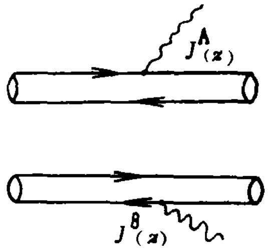

图 1

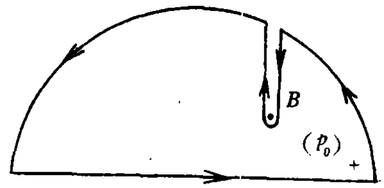

图 2

B 表示支点$(p_{支点})_+$位置，箭头表示所取围道的方向

其中 m 和 m' 分别是始末态束缚态的质量，E' 和 E^* 分别是始末介子内部夸克在各自介子质心系中的能量，即

$$p_0^* = \gamma(p_0 - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{p}),$$

$$E^* = \sqrt{\boldsymbol{p}^{*2} + m_q^2} = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 - p_0^2 + \gamma^2(p_0 - \boldsymbol{\beta p}) + m_q^2}. \tag{7}$$

(6) 的被积函数在复 p_0 平面的上半平面有一个极点

$$(p_0)_+ = \frac{\gamma m'}{2} - E' + i\epsilon = \frac{\gamma m'}{2} - \sqrt{(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}/2)^2 + m_q^2} + i\epsilon, \tag{8}$$

在复 p_0 平面的下半平面有两个极点，并且有两个支点：

$$p_{支点} = \beta^{-2}(\boldsymbol{\beta p}) \pm i\gamma^{-1}\beta^{-2}\sqrt{\beta^2(\boldsymbol{p}^2 + m_q^2) - (\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{p})^2}. \tag{9}$$

因此在 p_0 复平面上可以取图 2 所示的围道，完成 (6) 对 p_0 的积分。

如果反冲速度 β 足够小，我们可以忽略绕支点的积分路径的贡献，对 p_0 积分后得：

$$\tilde{I} = \frac{i}{2\pi}\int d^3p\,\phi^*_{K'^*}(\boldsymbol{p}^*)\phi_{K^*}(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}/2)\,\frac{E^*}{E'}, \tag{10}$$

这里

$$A = \frac{E^*}{E'} = \frac{\gamma\sqrt{(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}/2)^2 + m_q^2} - m'^{-1}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}/2)}{\sqrt{(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}/2)^2 + m_q^2}}.$$

当 m_q 足够大，则由于 $|\boldsymbol{p}|$ 有贡献的范围总是有支柱的，因而因子 $A \sim 1$. 因此，

$$\tilde{I} = \frac{i}{2\pi}\int d^3p\,\frac{1}{(2\pi)^6}\int d^3y^*\phi^*_{K'^*}(\boldsymbol{y}^*)e^{i\boldsymbol{p}^*\boldsymbol{y}^*}\int d^3x\,\phi_{K^*}(\boldsymbol{x})e^{-i(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}/2)\boldsymbol{x}}.$$

由于 $p_0 = \frac{\gamma m'}{2} - E' = \frac{\gamma m'}{2} - \sqrt{(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}/2)^2 + m_q^2}$，考虑到 $|\boldsymbol{p}|$ 的支柱，我们有

$$\tilde{I} = \frac{i}{2\pi}\int d^3y^*d^3x\,\delta(y_1^* - x_1)\delta(y_2^* - x_2)\delta(\gamma y_3^* - x_3)\phi^*_{K'^*}(\boldsymbol{y}^*)\phi_{K^*}(\boldsymbol{x})e^{i\gamma\beta m_q y_3^*}$$

$$= \frac{i}{2\pi}\int d^3x\,\phi^*_{K'^*}(x_1, x_2, x_3)\phi_{K^*}(x_1, x_2, \gamma x_3)e^{i\gamma\beta m_q x_3}. \tag{11}$$

特别当 $m_q \sim m_{介子}/2 = m'/2$ 时，$\gamma\beta m_q = -q_3/2$，(11) 变成与 (1) 相近，它虽与 (1) 相似，但仍因 γ 出现的位置不同而不同，这里却表明不是终态出射粒子的 Lorentz 收缩，而是"靶"粒子的 Lorentz 收缩，值得进一步研讨. 但一般来说由(11)知道矩阵元的重迭积分与夸克质量 m_q 有很大关系.

以下通过两个例来看重迭积分对夸克质量的依赖关系：

(i) 如若我们取高斯型波函数

$$\phi(\boldsymbol{p})=\left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{3/4}e^{-\boldsymbol{p}^2/a^2}. \tag{12}$$

这里 $a\lesssim 200$ MeV. 设 $\boldsymbol{q}$ 仍沿第三方向，令 $p_3'=p_3+q/2$，在极点处我们有

$$p_3^*=\gamma(p_3-\beta p_0)=\gamma(p_3'+\beta\sqrt{\boldsymbol{p}'^2+m_q^2}). \tag{13}$$

设 $p_3'/a=t$，$(p_1'^2+p_2'^2)/a^2=\omega^2$，$\rho=m_q/a$，由鞍点法通过计算得：

$$\begin{aligned}\tilde{I}&=\int d^3p\phi^*_{K'^*}(\boldsymbol{p}^*)\phi_{K^*}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}/2)\\&=\left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{3/2}\int d^3p'e^{-[2\omega^2+t^2+\gamma^2(t+\beta\sqrt{\rho^2+\omega^2+t^2})^2]}\\&\simeq\sqrt{\frac{1+\gamma}{2\gamma}}e^{-(\gamma-1)m_q^2/a^2},\end{aligned} \tag{14}$$

这时，因子 A 在鞍点取值

$$A=\frac{\gamma\sqrt{\rho^2+t^2}-\gamma\beta t}{\sqrt{\rho^2+t^2}}\bigg|_{t=\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\rho}=1.$$

(ii) 如若取库仑型波函数 $\phi(\gamma)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}a'^{3/2}e^{-a'\gamma}$，且令 $m_q'=m_q/a'$，则

$$\begin{aligned}\tilde{I}&=\frac{8}{\pi^2}(a')^5\int d^3p\frac{1}{[a'^2+p_1^2+p_2^2+\gamma^2(p_3+\beta\sqrt{m_q^2+\boldsymbol{p}^2})^2]^2[a'^2+\boldsymbol{p}^2]^2}\\&\simeq\frac{16}{(1+\gamma^2\beta^2m_q'^2)^2}\end{aligned} \tag{15}$$

考虑了因子 A 的贡献后，有

$$\tilde{I}=\frac{16}{(1+\gamma^2\beta^2m_q'^2)^2}\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right) \tag{16}$$

三、讨　论

(i) 由 (14) 和 (16) 我们显然看出矩阵元的重迭积分并不是与夸克质量 m_q 无关的，而是明显依赖于夸克质量. 特别在高斯型波函数的近似下有负指数幂的依赖关系，而在库仑型波函数近似下就较自然，说明内部波函数的适当选取是很重要的，对进一步了解强子内部结构，甚而由实验定出强子内部夸克的等效质量是有启发的，例如：

对于 $K^{*0}\to K^0+\gamma$，其反冲速度 $\beta=0.53$. 当考虑夸克磁矩等于质子磁矩时，对于库仑型和高斯型波函数，分别近似地估出 $m_q\sim 3.73$ GeV 和 1.95 GeV，如果不考虑夸克磁矩时，对库仑型波函数，有 $m_q\sim 2.89$ GeV. 总之我们并没有看到 m_q 是几十 GeV 或甚至更大的量级. 当然这个过程的 β 不算小，但它仍然说明了重迭积分与夸克质量 m_q 的关系.

(ii) 有的作者在作瞬时近似时，把 Bethe-Salpeter 方程中 p 项忽略了，但我们知道重迭积分 (10) 中被积函数的分布相当宽，从以上分析可知 $|\boldsymbol{p}|$ 的积分区域应从 $\gamma(-a-$

$\beta\sqrt{a^2+m_q^2}$) 到 $+a$，这里 $a\lesssim 200$ MeV，因此，在忽略 $O(\beta^2)$ 的情况下，从一开始就把 β 忽略掉是不对的.

(iii) 重迭积分 (2) 的始态波函数的综量包含一个 γ 因子，这个因子是重要的，虽然它只给出 $O(\beta^2)$ 的贡献. 因为跃迁过程有时亦是二次禁戒的，如 $\psi'\to\psi+2\pi$，而这时重迭积分的贡献正好是 $O(\beta^2)$ 的量级.

(iv) 在 β 比较大时，支点的贡献益加重要. 但仍可看出重迭积分并非与夸克质量无关. 如果支点的贡献影响不太大，则仍可依照上面的讨论推出类似 (14) 与 (16) 的结果.

参 考 文 献

[1] 中国科学院原子能研究所基本粒子理论组，原子能，**3**(1966)。
中国科学院原子能研究所基本粒子理论组，原子能，**7-8**(1966)。
[2] E. E. Salpeter, *Phys. Rev.*, **87** (1952), 328.
[3] David. Lurié, *Particles and Fields*, §9 (1968).

THE DEPENDENCE OF OVERLAP INTEGRAL ON QUARK MASS IN BETHE-SALPETER THEORY

WU JING-YUAN　　JU CHANG-SEN

(*Institute of High Energy Physics Academia Sinica*)

ABSTRACT

In the literature, the overlap integral of a transition (e.g. $1^-\to 0^-+\gamma$) is usually written as

$$I=\int d^3x\, e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}/2}\phi_f^*(\mathbf{x}')\phi_i(\mathbf{x})$$

Using Bethe-Salpeter equation with instantaneous approximation, we arrive at a different result which depends obviously on the mass of the quarks. Our result will approximate the above expression only when the binding energy can be neglected.