

# $\alpha$ 粒子模型下的 $\pi^- - {}^{12}\text{C}$ 散射

李清润 陈生忠 赵恩广

(中国科学院高能物理研究所) (中国科学院理论物理研究所)

## 摘 要

本文应用独立  $\alpha$  粒子模型波函数, 在 Glauber 理论下, 计算了共振区内一系列能量 ( $T_\pi = 120, 150, 180, 220, 260 \text{ MeV}$ ) 下的  $\pi^- - {}^{12}\text{C}$  弹性散射微分截面。理论与实验结果较好地符合。在截面对于波函数敏感的低能区域, 本文结果比前人同类结果有明显改进。

## 一、引 言

自从 CERN 关于  $\pi$  介子被  ${}^{12}\text{C}$  原子核散射的实验完成以后<sup>[1]</sup>, 对于这一问题已进行了大量的理论工作。其中大部分是在多次散射理论的框架下进行的。可以大致分成两类: 一类是 K. M. T 微观光学势<sup>[2]</sup>, 另一类是 Glauber 理论<sup>[3]</sup>。这些理论分析的一个共同特点是, 它们都是以  $\pi$  介子-核子 (以下简称  $\pi$ -N) 的散射振幅作为基本输入量。

但是从另一个方面看,  ${}^{12}\text{C}$  原子核具有  $\alpha$  粒子结团结构的特性是早已为人们所知道的。因此, 在  $\alpha$  粒子模型下,  $\pi^- - {}^{12}\text{C}$  散射可以看成是以核内的  $\alpha$  粒子作为散射心的多次散射过程, 这样就可以使用实验上给出的  $\pi$ - $\alpha$  散射振幅作为基本输入量。不用  $\pi$ -N 振幅而使用  $\pi$ - $\alpha$  振幅有很多优点。其中最重要的是, 在使用  $\pi$ -N 振幅的情况下完全丢掉了  $\pi$  的真实吸收效应 (因为  $\pi$  不能被一个自由核子吸收), 但在  $\pi$ - $\alpha$  的实验振幅中则“自动地”包括了这一效应; 而吸收效应是一个相当重要但理论上较难处理的问题。其次, 由于  $\alpha$  粒子间的结合能较核子间的弱很多, 所以成为多次散射理论的基本近似——冲量近似, 在这里也比在核子的情况下, 能更容易地得到成立。此外, 一般常被考虑到的各种修正, 如费米运动修正, 自旋效应修正等等, 都能一定程度地“自动”包括进来。

到目前为止, 在  $\alpha$  粒子模型下研究  $\pi^- - {}^{12}\text{C}$  弹性散射只有 Germond 和 Wilkin (以下简称 G-W) 的工作<sup>[4]</sup>。他们使用的基本上是刚体  $\alpha$  粒子模型。因为高次散射项发生不易积分的麻烦, 他们对刚体模型做了一定的修改。但正如他们自己指出的, 这种修改带来一个明显的缺点, 即  $\alpha$  粒子的密度在小距离的区域内变成负值。他们得到的结果, 除了在共振区的高能量 (260 MeV) 外, 比之用  $\pi$ -N 振幅得到的结果并无预期的改进。

本文也从  $\alpha$  粒子结构的观点来研究  $\pi^- - {}^{12}\text{C}$  的弹性散射。与 G-W 不同的是, 我们使用独立  $\alpha$  粒子模型波函数<sup>[5]</sup>。通过本工作希望达到如下两个目的: (i) 检验独立  $\alpha$  粒子

波函数的好坏; (ii) 企求上述的以  $\alpha$  粒子为散射心的优点能够显现出来。结果表明, 上述两个问题都得到肯定的回答。

## 二、 $\alpha$ 粒子结构波函数和 $\pi$ - $\alpha$ 基本振幅

我们在文献[5]中提出了一个轻原子核的  $\alpha$  粒子结构模型。这个模型的物理图象是: 核内的  $\alpha$  粒子在一个具有排斥心的平均场内做独立粒子运动。只需两个模型参数便能很好地给出与电子散射实验符合的结果。我们论证了, 刚体  $\alpha$  粒子模型相当于独立  $\alpha$  粒子模型的经典对应。对于  $^{12}\text{C}$  原子核, 基态波函数为

$$\Psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \Phi_0^{(\alpha)}(\mathbf{r}_1)\Phi_0^{(\alpha)}(\mathbf{r}_2)\Phi_0^{(\alpha)}(\mathbf{r}_3), \quad (1)$$

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  分别为三个  $\alpha$  粒子的坐标,  $\Phi_0^{(\alpha)}(\mathbf{r})$  的形式为

$$\Phi_0^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [O_{10}(r) - O_{20}(r)] Y_{00}(\theta, \varphi). \quad (2)$$

$Y_{lm}(\theta, \varphi)$  为通常的球谐函数,  $O_{10}(r)$  和  $O_{20}(r)$  是  $1s$  和  $2s$  轨道的谐振子径向波函数, 分别为

$$O_{10}(r) = 2(a^6\pi)^{-1/4} e^{-r^2/2a^2}, \quad (3)$$

$$O_{20}(r) = \sqrt{\frac{8}{3}} (a^6\pi)^{-1/4} \left[ \frac{3}{2} - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right] e^{-r^2/2a^2},$$

谐振子参数取为  $a = 1.0 \text{ fm}$ 。

从上面的具体形式可以看出, 这个模型波函数的一个显著优点是, 它特别适合于用在 Glauber 的多次散射公式中; 其各次散射项都是解析可积的。

共振区的  $\pi$ - $\alpha$  散射振幅已由 Binon 等人进行精确地测量<sup>[6]</sup>, 并且给出了散射振幅的一个参数化的表示式

$$f(q) = f(0) \left(1 - \frac{q^2}{t_1}\right) \left(1 - \frac{q^2}{t_2}\right) e^{-\frac{1}{6}R^2 q^2}, \quad (4)$$

$$f(0) = \frac{i k_{\pi\alpha} \sigma}{4\pi} (1 - i\rho). \quad (5)$$

$q$  是动量传递;  $t_1$  和  $t_2$  是两个复数参量, 其虚实部的数值连同参数  $\sigma, \rho$  一起在[6]中被列表给出。

需要指出的是,  $\pi$ - $\alpha$  基本振幅的这一形式(方程(4))输入到 Glauber 公式中, 对于使用独立  $\alpha$  粒子波函数(方程(1)、(2)、(3))而言, 并不发生积分上的困难, 各次散射项均可解析地积分。但是当使用刚体  $\alpha$  粒子模型时, 则情况大不相同, 积分变得难以处理。因为如此, G-W 的工作中对刚体  $\alpha$  模型进行了“高斯型参数化”的修改, 使其变成易于积分的形式。但这种修改带来的一个明显的缺点是,  $\alpha$  粒子在核内的密度分布在小距离区域内变成负值。

## 三、 $\pi^-$ - $^{12}\text{C}$ 弹性散射公式

在  $\alpha$  模型下,  $\pi^-$ - $^{12}\text{C}$  的弹性散射振幅, 在 Glauber 近似下为<sup>[7]</sup>:

$$F_{\pi\text{C}}(\mathbf{q}) = \frac{ik_{\pi\text{C}}}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \Gamma_{00}(\mathbf{b}) \quad (6)$$

$k_{\pi\text{C}}$  为  $\pi^{-12}\text{C}$  质心系中  $\pi$  介子的入射动量,  $\Gamma_{00}(\mathbf{b})$  为  $^{12}\text{C}$  核的断面函数, 表示式为:

$$\Gamma_{00}(\mathbf{b}) = \left\{ \left[ 1 - \prod_{i=1}^3 [1 - \gamma(\mathbf{b} - \mathbf{s}_i)] \right] |\Psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)|^2 d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \right\} \quad (7)$$

利用方程(1), 则有

$$\Gamma_{00}(\mathbf{b}) = 1 - [1 - \gamma_a(\mathbf{b})]^3 = 3\gamma_a(\mathbf{b}) - 3\gamma_a(\mathbf{b})^2 + \gamma_a(\mathbf{b})^3, \quad (8)$$

$$\gamma_a(\mathbf{b}) = \int |\phi_0^{(\alpha)}(\mathbf{r})|^2 \gamma(\mathbf{b} - \mathbf{s}) d\mathbf{r}. \quad (9)$$

其中单个  $\alpha$  粒子的断面函数  $\gamma(\mathbf{b})$  由  $\pi$ - $\alpha$  振幅  $f(q)$  决定

$$\gamma(\mathbf{b}) = \frac{1}{2\pi i k_{\pi\alpha}} \int e^{-i\mathbf{q}'\cdot\mathbf{b}} f(\mathbf{q}') d^2q'. \quad (10)$$

代入(9)式, 可得

$$\gamma_a(\mathbf{b}) = \frac{1}{2\pi i k_{\pi\alpha}} \int |\phi_0^{(\alpha)}(\mathbf{r})|^2 e^{-i\mathbf{q}'\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{s})} f(\mathbf{q}') d\mathbf{r} d^2q'. \quad (11)$$

以(8)式代入(6)式, 可得  $\pi^{-12}\text{C}$  散射振幅

$$F_{\pi\text{C}}(\mathbf{q}) = F_{\pi\text{C}}^{(1)}(\mathbf{q}) + F_{\pi\text{C}}^{(2)}(\mathbf{q}) + F_{\pi\text{C}}^{(3)}(\mathbf{q}) \quad (12)$$

$F_{\pi\text{C}}^{(1)}(\mathbf{q})$ ,  $F_{\pi\text{C}}^{(2)}(\mathbf{q})$ ,  $F_{\pi\text{C}}^{(3)}(\mathbf{q})$  分别为一次散射, 二次散射和三次散射振幅, 表示式为

$$F_{\pi\text{C}}^{(1)}(\mathbf{q}) = \frac{3ik_{\pi\text{C}}}{2\pi} \int \gamma_a(\mathbf{b}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} d^2b \quad (13)$$

$$F_{\pi\text{C}}^{(2)}(\mathbf{q}) = -\frac{3ik_{\pi\text{C}}}{2\pi} \int \gamma_a(\mathbf{b})^2 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} d^2b \quad (14)$$

$$F_{\pi\text{C}}^{(3)}(\mathbf{q}) = \frac{ik_{\pi\text{C}}}{2\pi} \int \gamma_a(\mathbf{b})^3 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} d^2b \quad (15)$$

其中,  $\gamma_a(\mathbf{b})$  可由(11)式求出, 因为  $\phi_0^{(\alpha)}(\mathbf{r})$  和  $f(\mathbf{q}')$  都是多项式乘高斯型函数, 故(11)式的积分可解析积出, 最后结果可以用通常的伽玛函数  $\Gamma$  和合流超比函数  ${}_1F_1$  表示出来.

一次散射项可以简单地表示为

$$F_{\pi\text{C}}^{(1)}(\mathbf{q}) = \frac{3k_{\pi\text{C}}}{k_{\pi\alpha}} f(\mathbf{q}) \eta(\mathbf{q}). \quad (16)$$

这里  $\eta(\mathbf{q})$  是  $\alpha$  粒子在  $^{12}\text{C}$  核内分布的形状因子, 而二次散射和三次散射项的表示式比较复杂

$$F_{\pi\text{C}}^{(2)}(\mathbf{q}) = \frac{3ik_{\pi\text{C}}f(o)^2}{64\pi^2 k_{\pi\alpha}^2 r_0^2} \sum_{n=0,2,4,\dots}^{16} (\sqrt{2} r_0)^n D'_n \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \times {}_1F_1\left(\frac{n}{2} + 1, 1, -\frac{r_0^2 q^2}{2}\right), \quad (17)$$

$$F_{\pi\text{C}}^{(3)}(\mathbf{q}) = -\frac{2k_{\pi\text{C}}f(o)^3}{3(8\pi)^3 r_0^4 k_{\pi\alpha}^3} \sum_{n=0,2,4,\dots}^{24} \left(\frac{2r_0}{\sqrt{3}}\right)^n D''_n \times \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) {}_1F_1\left(\frac{n}{2} + 1, 1, -\frac{r_0^2 q^2}{3}\right). \quad (18)$$

其中  $r_0^2 = R_1^2/6 + a^2/4$  (即与基本振幅中的参数  $R_1$  和波函数中的参数  $a$  有关);  $D_1'$  和  $D_1''$  也都是由  $f(q)$  和  $\phi_0^{(a)}(r)$  中的参数所决定的量。(见附录)

此外,计算中我们也考虑了质心的修正。

#### 四、结果与结论

我们计算了共振区入射动能  $T_\pi = 120, 150, 180, 220$  和  $260\text{MeV}$  的  $\pi^-^{12}\text{C}$  弹性散射微分截面。基本振幅的参数取自文献[6],其中  $120\text{MeV}$  的参数是由[6]中的已给参数适当内插得到的。各种参数的具体数值列在表1中。

表1  $\pi$ - $\alpha$  基本振幅参数值

$T_\pi(\text{MeV})$	$\sigma(\text{fm}^2)$	$\rho$	$R_1'(\text{fm})$	$\text{Re}t_1/2k_{\pi\alpha}^2$	$\text{Im}t_1/2k_{\pi\alpha}^2$	$\text{Re}t_2/2k_{\pi\alpha}^2$	$\text{Im}t_2/2k_{\pi\alpha}^2$
120	27.8	0.39	1.57	0.711	0.176		
150	31.98	0.148	1.233	0.729	0.137	2.14	-0.529
180	32.37	-0.028	1.309	0.708	0.077	1.614	-0.370
220	28.65	-0.019	1.262	0.721	-0.020*	1.452	-0.202
260	23.36	-0.321	1.342	0.726	-0.064*	1.350	-0.120

(有\*号的数值取自文献[4])

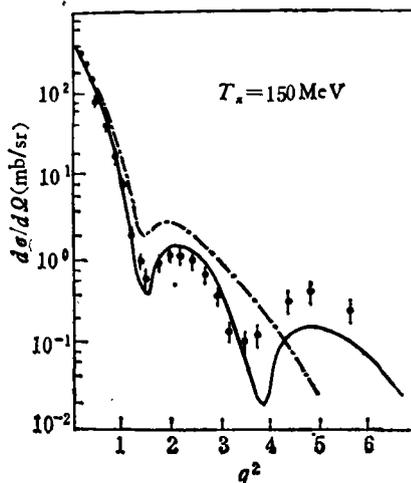
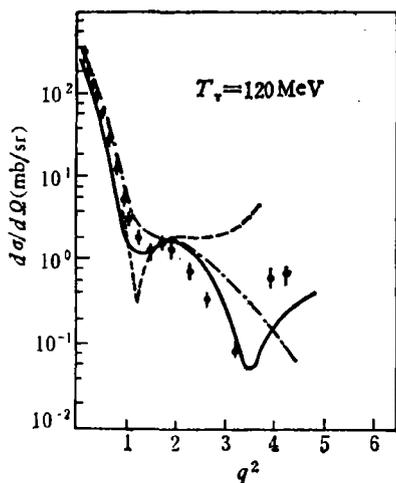


图1  $T_\pi = 120\text{MeV}$   $\pi^-^{12}\text{C}$  弹性散射微分截面

—— 本文结果; --- Wilkin 以  $\pi$ - $\alpha$ ;  
振幅作输入结果; - · - Wilkin 以  $\pi$ -N  
振幅作输入结果

图2  $T_\pi = 150\text{MeV}$   $\pi^-^{12}\text{C}$  弹性散射微分截面

—— 本文结果; - · - Wilkin  $\pi$ -N  
振幅作输入结果

我们的计算结果给在图1—5中,同时绘出实验结果以及前人得到的有关的理论结果。

1. 从低能量到高能,总的看,理论结果与实验结果是一致的。峰和谷的位置基本上都能正确地反映出来。特别是,实验上给出的第二个谷,理论上也能正确地预示其位置;第二个谷以后截面上升的趋势也表现出来了,虽然数值比实验值为小。第二个谷以后理

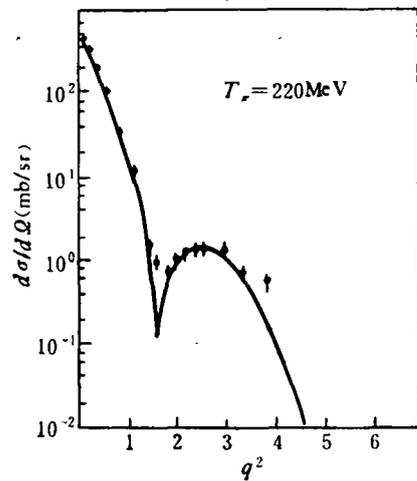
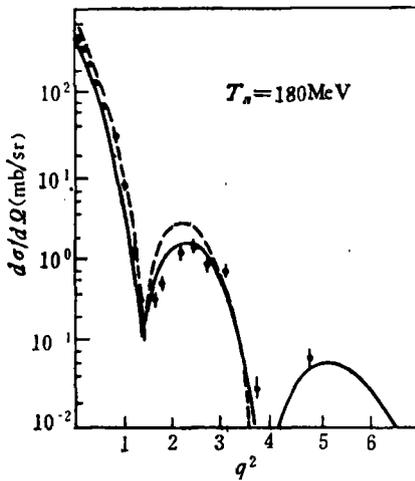


图 3  $T_\pi = 180\text{MeV}$   $\pi^-^{12}\text{C}$  弹性散射微分截面

图 4  $T_\pi = 220\text{MeV}$   $\pi^-^{12}\text{C}$  弹性散射微分截面

—— 本文结果； - - - Wilkin  
的  $\pi$ - $\alpha$  振幅作输入结果

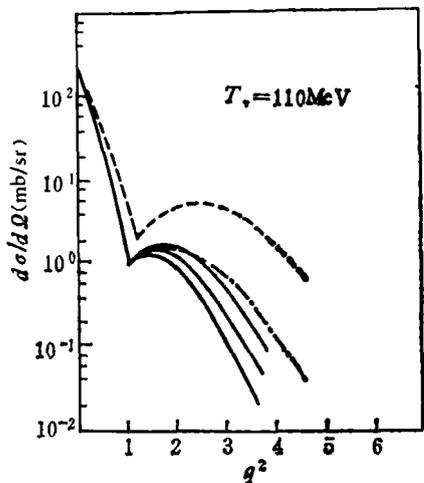
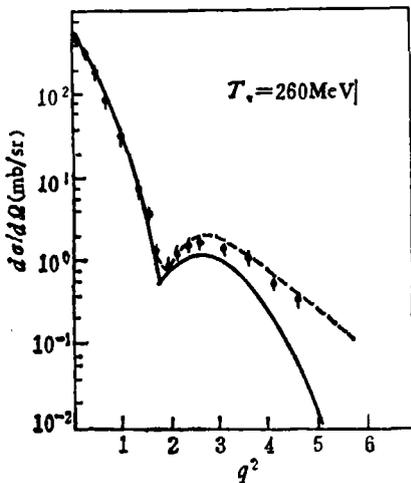


图 5  $T_\pi = 260\text{MeV}$   $\pi^-^{12}\text{C}$  弹性散射微分截面

图 6  $T_\pi = 110\text{MeV}$ , 截面随波函数的变化

—— 本文结果； - - - Wilkin  
 $\pi$ - $\alpha$  振幅作输入结果

— 1

论值偏低这一现象,是大部分理论分析(包括光学势的分析)所共同的,原因尚不很清楚。

2. Germond 和 Wilkin 在  $\alpha$  模型下计算了  $T_\pi = 120, 180$  和  $260\text{MeV}$  下的  $\pi^-^{12}\text{C}$  弹性散射。为了比较,在图中我们也绘出了他们的计算结果<sup>[4]</sup>。他们的计算也是在 Glauber 理论下,使用文献[6]中的  $\pi$ - $\alpha$  振幅进行的。和我们所不同的,是所用的  $^{12}\text{C}$  的  $\alpha$  粒子波函数不同:我们使用独立  $\alpha$  粒子波函数, G-W 所用的是修改的刚体  $\alpha$  模型波函数。从图中可看出,在低能量 ( $120\text{MeV}$ ) 我们的结果比 G-W 的要好得多。G-W 认为他们的结果在  $120\text{MeV}$  与实验偏离较大可能是由于 Glauber 理论在这种能量下的适用性已成问题所致。我们则认为这是波函数所造成的。为了澄清这一点,我们研究了截面

随波函数变化的情况。我们改变(2)式中  $O_{1s}(r)$  和  $O_{2s}(r)$  的相对比例(假设它们的系数分别为  $C$  和  $D$ , 满足  $C^2 + D^2 = 1$ ), 计算了各种能量下的  $\pi^-^{12}\text{C}$  散射截面, 发现, 随着能量的降低, 截面对于波函数的敏感性增加。在图 6、7 中给出 110MeV 和 260MeV 两种能量下的截面随波函数的变化曲线。

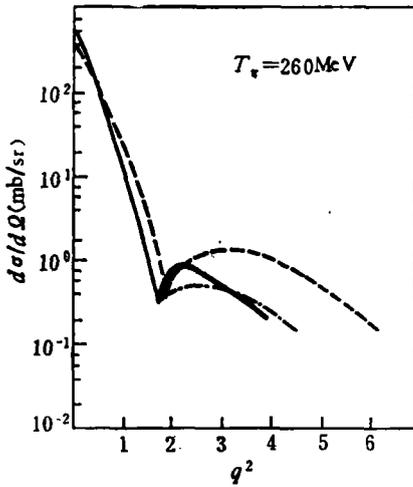


图7  $T_{\pi} = 260\text{MeV}$ , 截面随波函数的变化

——表示三条曲线 i)  $C = 0.7, D = -0.7$ ; ii)  $C = 0.8, D = -0.6$ ; iii)  $C = 0.6, D = -0.8$ ;  
 ----  $C = 1, D = 0$ ; -·-·-  $C = 0, D = 1$

从图上可以看出, 当波函数在最佳值(电子散射实验定出,  $C = 0.707, D = -0.707$ ) 左右一个相当范围内变动时, 截面变化比较稳定。但是当波函数变成只有  $O_{1s}(r)$  时(即  $C = 1, D = 0$ ), 则截面发生很大的变化: 峰的高度和宽度都变得很大。从图上可看出, G-W 的结果也有类似的趋势。可见, 波函数的因素确实可以导致截面与实验值发生很大的偏离。

3. 如引言中所述, 以  $\pi-\alpha$  作输入比以  $\pi-N$  作输入具有某些优点。由于在共振区核是“黑”的<sup>[3]</sup>, 所以对各种修正因素, 如核子关联, 结合能效应, 费米运动等等失去敏感性。但是随着能量的降低, 则各种修正因素将越来越变得重要。因此, 可以期望, 在能量较低的区域, 以  $\pi-\alpha$  作输入的的优点应该能够显现出来。这一点可以从图 1、2 中看出来: 我们的  $\pi-\alpha$  的结果确比  $\pi-N$  的结果有相当的改进。可以预料, 当能量进一步降低时, 这种差别将会更明显的表现出来。

综上所述, 可以得到如下的结论: (i) 独立  $\alpha$  粒子波函数, 在强相互作用下得到进一步的检验; 这同时也是对于  $^{12}\text{C}$  原子核表现出  $\alpha$  结团结构的观点的又一个支持; (ii) 以  $\pi-\alpha$  做输入确实比以  $\pi-N$  作输入有一定的优点, 这一优点随能量的降低而表现得更明显; (iii) 与前人关于 Glauber 理论在共振区以下不适用的结论不同<sup>[4,9]</sup>, 从我们的计算中可以看出, Glauber 理论至少在  $T_{\pi} \approx 100\text{MeV}$  附近仍然可用。

## 附 录

$$\begin{aligned} D'_0 &= D_0^2, D'_2 = 2D_0D_2, D'_4 = D_2^2 + 2D_0D_4, \\ D'_6 &= 2D_0D_6 + 2D_2D_4, D'_8 = D_4^2 + 2D_2D_6 + 2D_0D_8, \\ D'_{10} &= 2D_2D_8 + 2D_4D_6, D'_{12} = 2D_4D_8 + D_6^2, \\ D'_{14} &= 2D_6D_6, D'_{16} = D_8^2, \\ D'_{18} &= D_8^2, D'_{20} = 3D_0^2D_2, D'_{22} = 3D_0D_2^2 + 3D_0^2D_4, \\ D'_{24} &= 6D_0D_2D_4 + 3D_0^2D_6 + D_2^3, \\ D'_{26} &= 6D_0D_2D_6 + 3D_0D_4^2 + 3D_0^2D_8 + 3D_2^2D_4, \\ D'_{28} &= 6D_0D_4D_6 + 6D_0D_2D_8 + 3D_2^2D_6 + 3D_2D_4^2, \\ D'_{30} &= 6D_0D_6D_8 + 3D_0D_8^2 + 3D_2^2D_8 + 6D_2D_4D_6 + D_4^3, \\ D'_{32} &= 6D_0D_8D_8 + 6D_2D_4D_8 + 3D_2D_6^2 + 3D_2^2D_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D'_{11} &= 3D_0D_1^2 + 6D_2D_4D_1 + 3D_4^2D_1 + 3D_4D_1^2, \\
D'_{12} &= 3D_2D_1 + 6D_4D_4D_1 + D_1^3, \\
D'_{10} &= 3D_1^2D_1 + 3D_4D_1^2, \quad D'_{22} = 3D_4D_1^2, \quad D'_{21} = D_1^3, \\
D_0 &= C_0 + C_2/r_0^2 + 2C_4/r_0^4 + 6C_6/r_0^6 + 24C_8/r_0^8, \\
D_2 &= -C_2/4r_0^4 - C_4/r_0^6 - 9C_6/2r_0^8 - 24C_8/r_0^{10}, \\
D_4 &= C_4/16r_0^8 + 9C_6/16r_0^{10} + 9C_8/2r_0^{12}, \\
D_6 &= -C_6/64r_0^{12} - C_8/4r_0^{14}, \quad D_8 = C_8/256r_0^{16}, \\
C_0 &= B_0, \quad C_2 = B_2 - \frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2} B_0, \\
C_4 &= \frac{1}{t_1 t_2} B_0 - \frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2} B_2 + B_4, \\
C_6 &= \frac{1}{t_1 t_2} B_2 - \frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2} B_4, \quad C_8 = \frac{1}{t_1 t_2} B_4, \\
B_0 &= 4C^2\pi, \\
B_2 &= \left( \sqrt{\frac{8}{3}} DC - \frac{4}{3} D^2 \right) \pi a^2, \quad B_4 = \frac{1}{6} D^2 \pi a^4.
\end{aligned}$$

## 参 考 文 献

- [ 1 ] F. Binon et al., *Nucl. Phys.*, **B17**(1970), 168.  
[ 2 ] M. M. Sternheim and R. R. Silbar, *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **24**(1974), 249.  
[ 3 ] C. Schmit, *Lett. Nuovo Cim.*, **4**(1970), 454; C. Wilkin, *Lett. Nuovo Cim.*, **4**(1970), 491.  
[ 4 ] J. F. Germond and C. Wilkin, *Nucl. Phys.*, **A237**(1975), 477.  
[ 5 ] 李清润、陈生忠、赵恩广, 高能物理与核物理, **5**(1981),  
[ 6 ] F. Binon et al., *Nucl. Phys.*, **A298**(1978), 499.  
[ 7 ] R. J. Glauber, *Lectures in Theor. Phys.*, Vol. 1, eds. W. E. Brittin and L. G. Dunham (Interscience, New York, 1959).  
[ 8 ] J. Hüfner, *High-Energy Physics and Nuclear Structure*, 1975.  
[ 9 ] H. Lesniak and L. Lesniak, *Nucl. Phys.*, **B38**(1972), 221.

ELASTIC  $\pi^-$ - $^{12}\text{C}$  SCATTERING IN THE  $\alpha$ -PARTICLE MODEL

LI QING-RUN CHEN SHENG-ZHONG

*(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)*

ZHAO EN-GUANG

*(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)*

## ABSTRACT

At the pion energies of 120, 150, 180, 220, and 260 MeV, the calculation of the cross section of the elastic  $\pi^-$ - $^{12}\text{C}$  scattering are performed within Glauber theory on the basis of the independent  $\alpha$ -particle model. The theoretical results are in agreement with experiments. In the lower energy region sensitive to the wave function, our results are better than the results obtained by others using  $\alpha$ -particle model.