第5卷 第5期 高能物理与核物理 Vol. 5, No. 5
1981年9月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Sept., 1981

阶化李代数 $SU(m/n)$ 的不可约表示

韩其智 宋行长 李根道 孙洪洲
（北京大学）（中国科学院数学研究所）（北京大学）

摘 要

本文利用李代数 $SU(n)$ 不可约张量的概念，给出求阶化李代数 $SU(m/n)$ 不可约表示的方法. 并且给出 $SU(3/2)$ 和 $SU(m/n)$ 若干较简单的不可约表示例子.

阶化李代数 $SU(2/1)$[1], $SU(5/1)$[2] 和 $SU(n/1)$[3] 的不可约表示问题，已有一系列讨论. $SU(m/n)$ 是这一系列经典超李代数1) 的一般情况. 利用 $SU(n)$ 不可约张量概念[3]，本文给出了求 $SU(m/n)$ 不可约表示的方法，并且给出 $SU(3/2)$ 和 $SU(m/n)$ 若干较简单的不可约表示例子.

一、$SU(m/n)$ 基的选择

选 $SU(m/n)$ 的生成元为：(1) $SU(m)$, $SU(n)$ 的生成元. (2) $SU(m)$ 和 $SU(n)$ 的一个标量算符 D,

$$D=\frac{1}{m-n}[n(E_{11}+E_{22}+\cdots+E_{mm})+m(E_{m+1\,m+1}+E_{m+2\,m+2}+\cdots+E_{m+n\,m+n})]. \tag{1.1}$$

(3)
$$V(\beta_t\beta_r^+)=E_{t(m+r)},\quad t=1,2,\cdots,m$$
$$T(\beta_t^+\beta_r)=E_{(m+r)t},\quad r=1,2,\cdots,n \tag{1.2}$$

其中 $V(\beta_t\beta_r^+)$ 是 $SU(m)$ 的 $[1]$ 秩和 $SU(n)$ 的 $[1^{n-1}]$ 秩不可约张量，$T(\beta_t^+\beta_r)$ 是 $SU(n)$ 的 $[1]$ 秩和 $SU(m)$ 的 $[1^{m-1}]$ 秩不可约张量. β_t, β_t^+ 是 $SU(m)$ 不可约表示 $[1]$ 和 $[1^{m-1}]$ 基矢的 Gel'fand 符号.

$SU(m/n)$ 生成元间的对易与反对易关系为:

1. $SU(m/n)$ 的李代数部分的 $SU(m)\times SU(n)\times U(1)$, $U(1)$ 生成元为 D, $SU(m)$, $SU(n)$, $U(1)$ 的生成元相互可以对易.

2. $SU(m)$, $SU(n)$ 生成元内部对易关系已知.

3. $SU(m)$, $SU(n)$ 生成元与 $V(\beta_t\beta_r^+)$ 和 $T(\beta_t^+\beta_r)$ 间对易关系决定于不可约张量性质.

本文 1980 年 6 月 20 日收到.

1) $SU(m/n)$ 与 $spl(m,n)$ 同构，$n, m\geqslant 1$, $n\neq m$.

4. $[D, V(\beta_t\beta_r^+)] = -V(\beta_t\beta_r^+),\quad [D, T(\beta_t^+\beta_r)] = T(\beta_t^+\beta_r).$ (1.3)

5. $\{V(\beta_t\beta_r^+), V(\beta_{t'}\beta_{r'}^+)\} = \{T(\beta_t^+\beta_r), T(\beta_{t'}^+\beta_{r'})\} = 0.$ (1.4)

6. $$\{T(\beta_t^+\beta_r), V(\beta_t\beta_r^+)\} = \frac{m-n}{mn} D + Q_m^{(m)} + Q_n^{(n)}$$
$$- \sum_{i=t+1}^{m}\left(\frac{1}{i-1} Q_i^{(m)} - Q_{i-1}^{(m)}\right) - \sum_{i=r+1}^{n}\left(\frac{i}{i-1} Q_i^{(n)} - Q_{i-1}^{(n)}\right). \tag{1.5}$$

等。其中 $Q_i^{(m)}$, $Q_i^{(n)}$ 为 $SU(m)$, $SU(n)$ 的生成元[3]。

二、$SU(m/n)$不可约表示的求法

取 $SU(m/n)$ 不可约表示空间的基为 $\left| d \begin{matrix} \Gamma_m & \Gamma_n \\ \gamma_m & \gamma_n \end{matrix} \alpha \right\rangle$，其中 d 为 D 的本征值，Γ_m，Γ_n 为 $SU(m)$，$SU(n)$ 不可约表示的标志，γ_m，γ_n 是不可约表示基矢的 Gelfand 符号[3]；d 是可能出现的简并指标。

$$\Gamma_m = m_{1m} \quad m_{2m} \quad m_{3m} \cdots\cdots m_{mm},$$
$$\gamma_m = \begin{matrix} m_{1m-1} & m_{2m-1} \cdots\cdots m_{m-1\,m-1} \\ m_{1m-2} \cdots\cdots m_{m-2\,m-2} & \\ m_{11}, & \end{matrix}$$
$$\Gamma_n = n_{1n} \quad n_{2n} \quad n_{3n} \cdots\cdots n_{nn}$$
$$\gamma_n = \begin{matrix} n_{1n-1} & n_{2n-1} \cdots\cdots n_{n-1\,n-1} \\ n_{1n-2} \cdots\cdots n_{n-2}\, n_{n-2} & \\ \cdots\cdots & \\ n_{11}, & \end{matrix}$$
$$x_{pm} = m_{pm} + m - p, \quad y_{pn} = n_{pn} + n - p. \tag{2.1}$$

当取矩阵元为实数时，利用 W-E 定理，可以定义 $V(\beta_t\beta_r^+)$ 和 $T(\beta_t^+\beta_r)$ 的约化矩阵元为

$$\left\langle d-1 \begin{matrix} \Gamma'_m & \Gamma'_n \\ \gamma'_m & \gamma'_n \end{matrix} \alpha' \right| V(\beta_t\beta_r^+) \left| d \begin{matrix} \Gamma_m & \Gamma_n \\ \gamma_m & \gamma_n \end{matrix} \alpha \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} \Gamma_m & 1 \\ \gamma_m & \beta_t \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma'_m \\ \gamma'_m \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma'_n & 1 \\ \gamma'_n & \beta_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_n \\ \gamma_n \end{matrix} \right\rangle$$
$$\times \langle d-1\Gamma'_m\Gamma'_n\alpha' \| V \| d\Gamma_m\Gamma_n\alpha \rangle, \tag{2.2a}$$

$$\left\langle d+1 \begin{matrix} \Gamma'_m & \Gamma'_n \\ \gamma'_m & \gamma'_n \end{matrix} \alpha' \right| T(\beta_t^+\beta_r) \left| d \begin{matrix} \Gamma_m & \Gamma_n \\ \gamma_m & \gamma_n \end{matrix} \alpha \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} \Gamma'_m & 1 \\ \gamma'_m & \beta_t \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_m \\ \gamma_m \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_n & 1 \\ \gamma_n & \beta_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma'_n \\ \gamma'_n \end{matrix} \right\rangle$$
$$\times \langle d+1\Gamma'_m\Gamma'_n\alpha' \| T \| d\Gamma_m\Gamma_n\alpha \rangle. \tag{2.2b}$$

若能求出全部 V 和 T 的约化矩阵元，就解决了 $SU(m/n)$ 的不可约表示问题。

从公式 (2.2) 和对易关系 (1.5)，利用 [3] 中 $SU(n)$ 的 C-G 系数，可求得约化矩阵元满足下列方程

$$\frac{\prod_{p}^{n-1}(y_{nn} - y_{pn})}{\prod_{p}^{n-1}(y_{nn} - y_{pn} - 1)} \sum_{\alpha'} \langle d-1\Gamma_m(1)\Gamma_n(-n)\alpha' \| V \| d\Gamma_m\Gamma_n\alpha \rangle$$

$$\times\langle d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\|T\|d-1\Gamma_m(1)\Gamma_n(-n)\alpha'\rangle$$

$$=-\sum_{kl}\frac{\prod_{p}^{n-1}(y_{ln}-y_{pn}+1)}{(x_{1m}-x_{km}+1)\prod_{p\neq l}^{l}(y_{ln}-y_{pn})}\sum_{\alpha''}\langle d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\|V\|d$$

$$+1\Gamma_m(-k)\Gamma_n(l)\alpha''\rangle\langle d+1\Gamma_m(-k)\Gamma_n(l)\alpha''\|T\|d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\rangle$$

$$+\frac{m-n}{mn}d-\frac{1}{m}\sum_{p}^{m}m_{pm}+m_{1m}-\frac{1}{n}\sum_{p}^{n}n_{pn}+n_{nn}\qquad(2.3a)$$

$$\frac{(x_{1m}-x_{im}-1)\prod_{p}^{n-1}(y_{nn}-y_{pn})}{(x_{1m}-x_{im})\prod_{p}^{n-1}(y_{nn}-y_{pn}-1)}\sum_{\alpha'}\langle d-1\Gamma_m(1)\Gamma_n(-n)\alpha'\|V\|d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\rangle$$

$$\times\langle d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\|T\|d-1\Gamma_m(1)\Gamma_n(-n)\alpha'\rangle$$

$$+\frac{\prod_{p}^{n-1}(y_{nn}-y_{pn})}{(x_{1m}-x_{im})\prod_{p}^{n-1}(y_{nn}-y_{pn}-1)}\sum_{\alpha'}\langle d-1\Gamma_m(i)\Gamma_n(-n)\alpha'\|V\|d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\rangle$$

$$\times\langle d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\|T\|d-1\Gamma_m(i)\Gamma_n(-n)\alpha'\rangle$$

$$=-\sum_{k,l}\frac{(x_{km}-x_{im}-2)\prod_{p}^{n-1}(y_{ln}-y_{pn}+1)}{(x_{1m}-x_{km}+1)(x_{km}-x_{im}-1)\prod_{p\neq l}^{n}(y_{ln}-y_{pn})}$$

$$\times\sum_{\alpha''}\langle d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\|V\|d+1\Gamma_m(-k)\Gamma_n(l)\alpha''\rangle\langle d+1\Gamma_m(-k)\Gamma_n(l)\alpha''\|T\|d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\rangle$$

$$+\frac{m-n}{mn}d-\frac{1}{m}\sum_{p}^{m}m_{pm}-\frac{1}{n}\sum_{p}^{n}n_{pn}+m_{1m}+n_{nn}-1,\qquad(2.3b)$$

$$\frac{\prod_{p\neq j}^{n-1}(y_{jn}-y_{pn})}{\prod_{p\neq j}^{n}(y_{jn}-y_{pn}-1)}\sum_{\alpha'}\langle d-1\Gamma_m(1)\Gamma_n(-j)\alpha'\|V\|d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\rangle$$

$$\times\langle d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\|T\|d-1\Gamma_m(1)\Gamma_n(-j)\alpha'\rangle$$

$$+\frac{(y_{nn}-y_{jn}+1)\prod_{p\neq j}^{n-1}(y_{nn}-y_{pn})}{\prod_{p}^{n-1}(y_{nn}-y_{pn}-1)}\sum_{\alpha'}\langle d-1\Gamma_m(1)\Gamma_n(-n)\alpha'\|V\|d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\rangle$$

$$\times\langle d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\|T\|d-1\Gamma_m(1)\Gamma_n(-n)\alpha'\rangle$$

$$=-\sum_{kl}\frac{(y_{ln}-y_{jn}+2)\prod_{p\neq j}^{n-1}(y_{ln}-y_{pn}+1)}{(x_{1m}-x_{km}+1)\prod_{p\neq l}^{n}(y_{ln}-y_{pn})}\sum_{\alpha''}\langle d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\|V\|d$$

$$+1\Gamma_m(-k)\Gamma_n(l)\alpha''\rangle\langle d+1\Gamma_m(-k)\Gamma_n(l)\alpha''\|T\|d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\rangle$$

$$+\frac{m-n}{mn}d-\frac{1}{m}\sum_p^m m_{pn}-\frac{1}{n}\sum_p^n n_{pn}+m_{1m}+n_{nn}+1. \tag{2.3c}$$

$$\frac{(x_{1m}-x_{im}-1)(y_{nn}-y_{jn}+1)\prod_{p\neq j}^{n-1}(y_{nn}-y_{pn})}{(x_{1m}-x_{im})\prod_p^{n-1}(y_{nn}-y_{pn}-1)}$$

$$\times\sum_{\alpha'}\langle d-1\Gamma_m(1)\Gamma_n(-n)\alpha'\|V\|d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\rangle\langle d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\|T\|d-1\Gamma_m(1)\Gamma_n(-n)\alpha'\rangle$$

$$+\frac{(x_{1m}-x_{im}-1)\prod_{p\neq j}^{n-1}(y_{jn}-y_{pn})}{(x_{1m}-x_{im})\prod_{p\neq j}^{n}(y_{jn}-y_{pn}-1)}\sum_{\alpha'}\langle d-1\Gamma_m(1)\Gamma_n(-j)\alpha'\|V\|d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\rangle$$

$$\times\langle d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\|T\|d-1\Gamma_m(1)\Gamma_n(-j)\alpha'\rangle$$

$$+\frac{(y_{nn}-y_{jn}+1)\prod_{p\neq j}^{n-1}(y_{nn}-y_{pn})}{(x_{1m}-x_{im})\prod_p^{n-1}(y_{nn}-y_{pn}-1)}\sum_{\alpha'}\langle d-1\Gamma_m(i)\Gamma_n(-n)\alpha'\|V\|d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\rangle$$

$$\times\langle d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\|T\|d-1\Gamma_m(i)\Gamma_n(-n)\alpha'\rangle$$

$$+\frac{\prod_{p\neq j}^{n-1}(y_{jn}-y_{pn})}{(x_{1m}-x_{im})\prod_{p\neq j}^{n}(y_{jn}-y_{pn}-1)}\sum_{\alpha'}\langle d-1\Gamma_m(i)\Gamma_n(-j)\alpha'\|V\|d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\rangle$$

$$\times\langle d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\|T\|d-1\Gamma_m(i)\Gamma_n(-j)\alpha'\rangle$$

$$=-\sum_{k,l}\frac{(x_{km}-x_{im}-2)(y_{ln}-y_{jn}+2)\prod_{p\neq j}^{n-1}(y_{ln}-y_{pn}+1)}{(x_{1m}-x_{km}+1)(x_{km}-x_{im}-1)\prod_{p\neq l}^{n}(y_{ln}-y_{pn})}$$

$$\times\sum_{\alpha''}\langle d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\|V\|d+1\Gamma_m(-k)\Gamma_n(l)\alpha''\rangle\langle d+1\Gamma_m(-k)\Gamma_n(l)\alpha''\|T\|d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\rangle$$

$$+\frac{m-n}{mn}d-\frac{1}{m}\sum_p^m m_{pm}-\frac{1}{n}\sum_p^m n_{pn}+m_{1m}+n_{nn}. \tag{2.3d}$$

由 (2.3a—d) 可解出约化矩阵元满足的递推关系

$$\frac{\prod_{n\neq j}(y_{in}-y_{pn})}{\prod_{p\neq j}^{n}(y_{jn}-y_{pn}-1)}\sum_{\alpha'}\langle d-1\Gamma_m(i)\Gamma_n(-j)\alpha'\|V\|d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\rangle$$

$$\times\langle d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\|T\|d-1\Gamma_m(i)\Gamma_n(-j)\alpha'\rangle$$

$$= -\sum_{k,l} \frac{\prod_{p\neq j}^{n}(y_{ln} - y_{pn} + 1)}{(x_{im} - x_{km} + 1)\prod_{p\neq l}^{n}(y_{ln} - y_{pn})} \sum_{\alpha''} \langle d\Gamma_m\Gamma_n\alpha \| V \| d$$

$$+ 1\Gamma_m(-k)\Gamma_n(l)\alpha''\rangle\langle d + 1\Gamma_m(-k)\Gamma_n(l)\alpha'' \| T \| d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\rangle$$

$$+ \frac{m-n}{mn} d - \frac{1}{m}\sum_{p}^{m} m_{pm} - \frac{1}{n}\sum_{p}^{n} n_{pn} + x_{im} + y_{in} - m + 1. \tag{2.4}$$

从 (1.4) 和 (1.5) 式，约化矩阵元还满足以下方程

$$\left\{\frac{(y_{in} - y_{ln} + 1)(y_{in} - y_{ln} - 1)}{(y_{in} - y_{ln})^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha'} \langle d - 1\Gamma_m(ik)\Gamma_n(-j$$

$$- l)d' \| V \| d\Gamma_m(k)\Gamma_n(-l)\alpha\rangle\langle d\Gamma_m(i)\Gamma_n(-j)\alpha \| T \| d - 1\Gamma_m(ik)\Gamma_n(-j - l)\alpha'\rangle$$

$$= -\left\{\frac{(x_{im} - x_{km} - 1)(x_{im} - x_{km} + 1)}{(x_{im} - x_{km})^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha''} \langle d\Gamma_m(i)\Gamma_n(-j)\alpha \| V \| d$$

$$+ 1\Gamma_m\Gamma_n\alpha''\rangle\langle d + 1\Gamma_m\Gamma_n\alpha'' \| T \| d\Gamma_m(k)\Gamma_n(-l)\alpha\rangle, \tag{2.5}$$

其中 i, k, j, l 大小顺序任意。

$$\left\{\frac{(y_{jn} - y_{ln} + 1)(x_{im} - x_{km} - 1)}{(y_{jn} - y_{ln} - 1)(x_{im} - x_{km} + 1)}\right\}^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha''} \langle d - 2\Gamma_m(ik)\Gamma_n(-j - l)\alpha' \| V \| d$$

$$- 1\Gamma_m(i)\Gamma_n(-j)\alpha''\rangle\langle d - 1\Gamma_m(i)\Gamma_n(-j)\alpha'' \| V \| d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\rangle$$

$$+ \left\{\frac{x_{im} - x_{km} - 1}{x_{im} - x_{km} + 1}\right\}^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha''} \langle d - 2\Gamma_m(ik)\Gamma_n(-j - l)\alpha' \| V \| d$$

$$- 1\Gamma_m(i)\Gamma_n(-l)\alpha''\rangle\langle d - 1\Gamma_m(i)\Gamma_n(-l)\alpha'' \| V \| d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\rangle$$

$$+ \left\{\frac{y_{jn} - y_{ln} + 1}{y_{jn} - y_{ln} - 1}\right\}^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha''} \langle d - 2\Gamma_m(ik)\Gamma_n(-j - l)\alpha' \| V \| d$$

$$- 1\Gamma_m(k)\Gamma_n(-j)\alpha''\rangle\langle d - 1\Gamma_m(k)\Gamma_n(-j)\alpha'' \| V \| d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\rangle$$

$$+ \sum_{\alpha''} \langle d - 2\Gamma_m(ik)\Gamma_n(-j - l)\alpha' \| V \| d - 1\Gamma_m(k)\Gamma_n(-l)\alpha''\rangle$$

$$\times \langle d - 1\Gamma_m(k)\Gamma_n(-l)\alpha'' \| V \| d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\rangle = 0, \tag{2.6}$$

$$\left\{\frac{(x_{im} - x_{km} - 1)(y_{jn} - y_{ln} + 1)}{(x_{im} - x_{km} + 1)(y_{jn} - y_{ln} - 1)}\right\}^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha''} \langle d - 1\Gamma_m(i)\Gamma_n(-j)\alpha'' \| T \| d$$

$$- 2\Gamma_m(ik)\Gamma_n(-j - l)\alpha'\rangle\langle d\Gamma_m\Gamma_n\alpha \| T \| d - 1\Gamma_m(i)\Gamma_n(-j)\alpha''\rangle$$

$$+ \left\{\frac{x_{im} - x_{km} - 1}{x_{im} - x_{km} + 1}\right\}^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha''} \langle d - 1\Gamma_m(i)\Gamma_n(-l)\alpha'' \| T \| d$$

$$- 2\Gamma_m(ik)\Gamma_n(-j - l)\alpha'\rangle\langle d\Gamma_m\Gamma_n\alpha \| T \| d - 1\Gamma_m(i)\Gamma_n(-l)\alpha''\rangle$$

$$+ \left\{\frac{y_{jn} - y_{ln} + 1}{y_{jn} - y_{ln} - 1}\right\}^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha''} \langle d - 1\Gamma_m(k)\Gamma_n(-j)\alpha'' \| T \| d$$

$$- 2\Gamma_m(ik)\Gamma_n(-j - l)\alpha'\rangle\langle d\Gamma_m\Gamma_n\alpha \| T \| d - 1\Gamma_m(k)\Gamma_n(-j)\alpha''\rangle$$

$$+ \sum_{\alpha''} \langle d - 1\Gamma_m(k)\Gamma_n(-l)\alpha'' \| T \| d - 2\Gamma_m(ik)\Gamma_n(-j - l)\alpha'\rangle$$

$$\times \langle d\Gamma_m\Gamma_n\alpha \| T \| d - 1\Gamma_m(k)\Gamma_n(-l)\alpha''\rangle = 0, \tag{2.7}$$

$$\{y_{jn}-y_{ln}+1\}^{\frac{1}{2}}\sum_{\alpha''}\langle d-2\,\Gamma_m(ji)\Gamma_n(-j-l)\alpha'\|V\|d-1\,\Gamma_m(i)\Gamma_n(-j)\alpha''\rangle$$
$$\times\langle d-1\Gamma_m(i)\Gamma_n(-j)\alpha''\|V\|d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\rangle+\{y_{jn}-y_{ln}-1\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\sum_{\alpha''}\langle d-2\,\Gamma_m(ii)\Gamma_n(-j-l)\alpha'\|V\|d-1\,\Gamma_m(i)\Gamma_n(-l)\alpha''\rangle$$
$$\times\langle d-1\Gamma_m(i)\Gamma_n(-l)\alpha''\|V\|d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\rangle=0,\tag{2.8}$$

$$\{x_{im}-x_{km}-1\}^{\frac{1}{2}}\sum_{\alpha''}\langle d-2\,\Gamma_m(ik)\Gamma_n(-j-j)\alpha'\|V\|d-1\,\Gamma_m(i)\Gamma_n(-j)\alpha''\rangle$$
$$\times\langle d-1\Gamma_m(i)\Gamma_n(-j)\alpha''\|V\|d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\rangle+\{x_{im}-x_{km}+1\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\sum_{\alpha''}\langle d-2\,\Gamma_m(ik)\Gamma_n(-j-j)\alpha'\|V\|d-1\,\Gamma_m(k)\Gamma_n(-j)\alpha''\rangle$$
$$\times\langle d-1\Gamma_m(k)\Gamma_n(-j)\alpha''\|V\|d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\rangle=0,\tag{2.9}$$

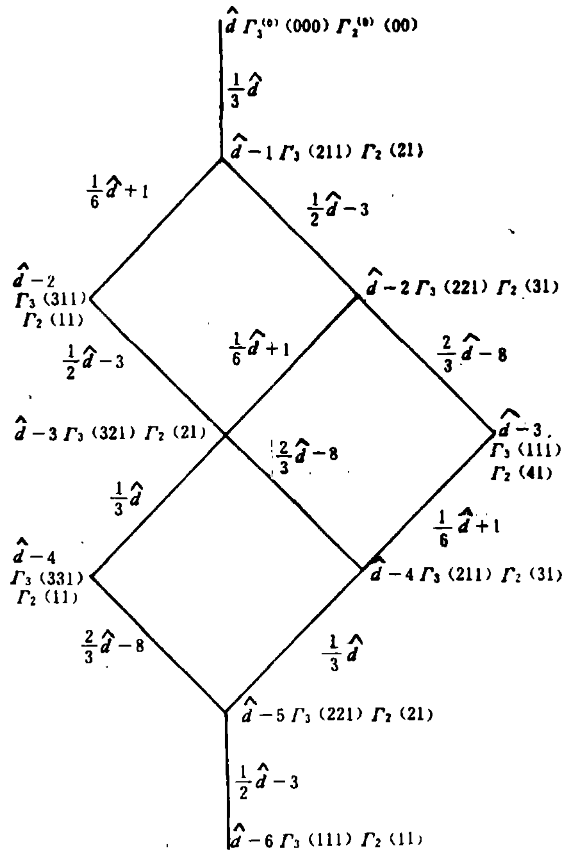

图　1

$$\sum_{\alpha''}\langle d-2\,\Gamma_m(ii)\Gamma_n(-j-j)\alpha'\|V\|d-1\,\Gamma_m(i)\Gamma_n(-j)\alpha''\rangle$$
$$\times\langle d-1\,\Gamma_m(i)\Gamma_n(-j)\alpha''\|V\|d\Gamma_m\Gamma_n\alpha\rangle=0.\tag{2.10}$$

设 $\hat{d}$ 为 d 在某一不可约空间最大值，$\Gamma_m^{(0)}$，$\Gamma_n^{(0)}$ 为相应的 Γ_m，Γ_n．则从 $\left|d\begin{matrix}\Gamma_m^{(0)} & \Gamma_n^{(0)} & \\ \gamma_m & \gamma_n & \alpha\end{matrix}\right\rangle$ 出发，在没有简并情况下，利用递推关系 (2.4)，适当选取相因子满足 (2.5—2.10) 式，可

以求出全部约化矩阵元。在有简并情况下，递推关系 (2.4) 不能完全确定约化矩阵元，须要明确简并量子数或利用正交化手续，才能求出全部约化矩阵元。

三、几个简单例子

我们用 $(\hat{d}\,\Gamma_m^{(0)}\,\Gamma_n^{(0)})$ 标志 $SU(m/n)$ 的不可约表示。

1. $SU(3/2)$ 的不可约表示 $(\hat{d}\,\Gamma_3^{(0)}(000)\,\Gamma_2^{(0)}(00))$：(见图 1)

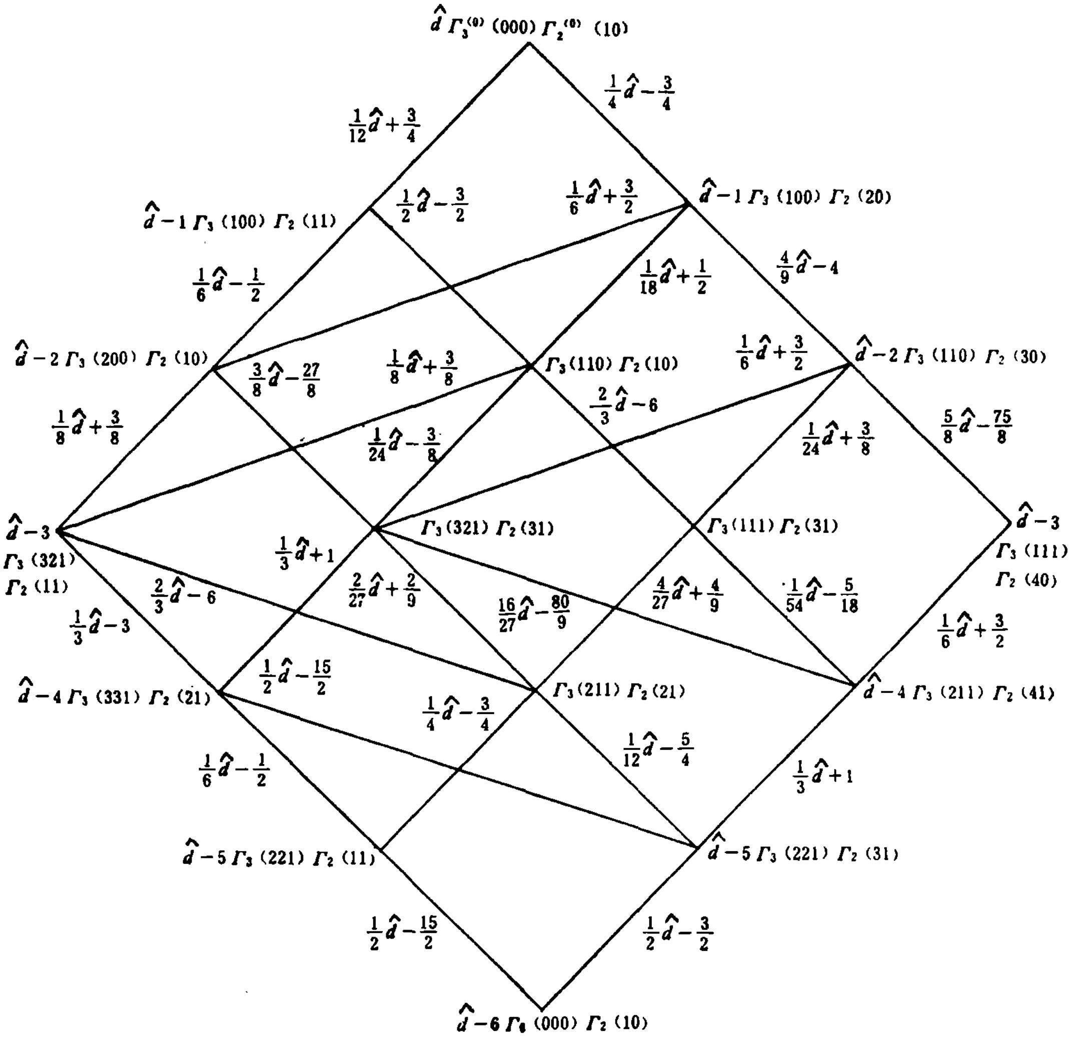

图 2

每条线旁所注为相应 T,V 约化矩阵元乘积。例

$$\langle\hat{d}-1\,\Gamma_3(211)\Gamma_2(21)\alpha'\|V\|\hat{d}\Gamma_3^{(0)}\Gamma_2^{(0)}\alpha\rangle\langle\hat{d}-1\,\Gamma_3(211)\Gamma_2(21)\alpha'\|T\|\hat{d}\Gamma_3^{(0)}\Gamma_2^{(0)}\alpha\rangle$$
$$=1/3\,\hat{d}$$

当 $\hat{d}\neq 0,\ \pm 6,\ 12$ 时，为 $\hat{d}$ 可取连续值的最低维表示。

2. $SU(3/2)$ 的不可约表示 $(\hat{d}\Gamma_3^{(0)}(000)\,\Gamma_2^{(0)}(10))$ (见图 2)

3. $SU(m/n)$ 的不可约表示 $(\hat{d}\Gamma_m^{(0)}(0\cdots0)\,\Gamma_n^{(0)}(0\cdots0))$，

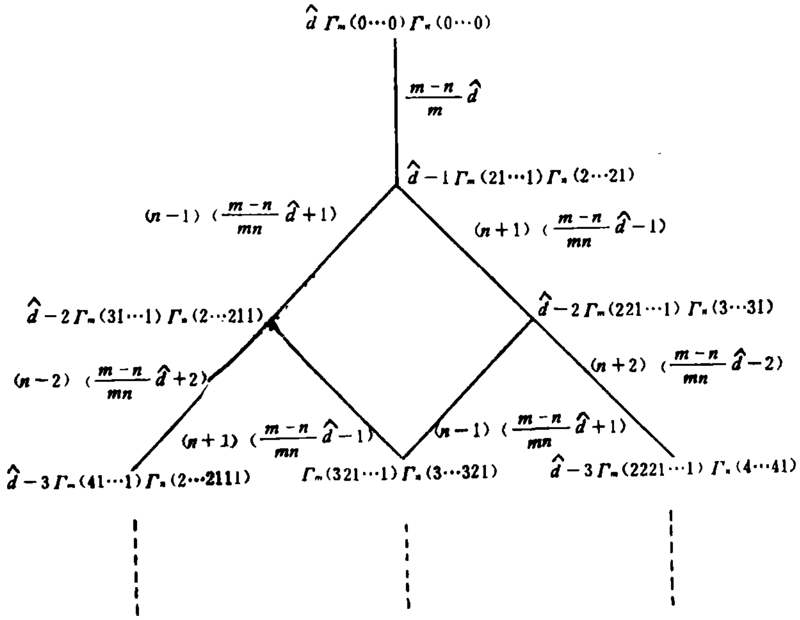

图 3

可以用数学归纳法证明

$$\langle \hat{d} - l\ \Gamma_m(i)\Gamma_n(-j)\alpha^{(l)} \| V \| \hat{d} - l + 1\ \Gamma_m\Gamma_n\alpha^{(l-1)}\rangle \langle \hat{d} - l\ \Gamma_m(i)\Gamma_n(-j)\alpha^{(l)} \| T \| \hat{d} - l + 1\ \Gamma_m\Gamma_n\alpha^{(l-1)}\rangle = (i + j - 1)\left(\frac{m-n}{mn}\hat{d} - m - 1 + x_{im}^{(0)} + y_{jm}^{(0)}\right).$$

参　考　文　献

[1] M. Scheunert, W. Nahm and V. Rittenberg, *J. Math. Phys.*, **18**(1977), 155; 宋行长、韩其智、孙洪洲，科学通报，**25**(1980), 105.

[2] 孙洪洲、俞允强，韩其智，广州粒子物理会议论文集，第1543页，1980年科学出版社出版.

[3] 孙洪洲、韩其智，中国科学，1981 年第 1 期，第 31 页.

IRREDUCIBLE REPRESENTATIONS OF THE GRADED LIE ALGEBRA $SU(m/n)$

HAN QI-ZHI　SONG XING-CHANG
(*Peking University*)

LI GEN-DAO
(*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

SUN HONG-ZHOU
(*Peking University*)

ABSTRACT

Using the definition of irreducible tensor operators of the Lie group $SU(n)$, we ive a method of calculating the irreducible representations of the graded Lie algebra $U(m/n)$. We also give some simple examples of irreducible representations of $U(3/2)$ and $SU(m/n)$.