第4卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 4, No. 4
1980年7月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS July, 1980

τ 真空

杜东生 范洪义 尹鸿钧 阮图南
（中国科学院高能物理研究所） （中国科学技术大学）

摘 要

在讨论一维实标量场的定态孤粒子解时[1]，我们注意到在标量场理论中存在另一类严格解，这类解的能量、动量和角动量都为零．因此是真空，称之为“τ 真空”．若进一步要求场的正则动量为零（$\pi=0$）或要求场为实数，则 τ 真空自动给出通常自发破缺对称的真空解[2]（$\varphi=$ 常数）．

本文分别讨论了 φ^4 理论、Sine-Gordan 理论及 L 秩位势情况下的一级类量子修正．虽然这个真空解是一个虚数解，但是这类解对于研究真空的机制是重要的，因为过渡到欧氏空间它就成为通常的孤粒子解．

在一维标量场理论中取拉氏函数

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2-U(\varphi),\quad U(\varphi)\geqslant 0, \tag{1}$$

可以得到运动方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=U'(\varphi),\quad U'(\varphi)=\frac{dU(\varphi)}{d\varphi} \tag{2}$$

如把 φ 分成经典与微扰项之和

$$\varphi(x,t)=\varphi_c(x,t)+\phi(x,t)$$

代入运动方程（2）并在经典解附近作泰勒展开，则得到下列两个方程

$$\frac{\partial^2\varphi_c}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi_c}{\partial t^2}=U'(\varphi_c), \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=U''(\varphi_c)\phi. \tag{4}$$

（4）式是一级类量子修正．

在文献［1］中讨论了方程（2）的定态孤粒子解，本文讨论（1）的零点振动，即真空解．

一、真空的定义

定义 τ 真空

本文1979年6月1日收到．

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0,$$

或

$$\varphi=\varphi(t),$$

则方程 (2) 变为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-U'(\varphi),$$

积分之得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=-U(\varphi). \tag{5}$$

由此给出虚值正则动量

$$\pi=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}}=\dot{\varphi}=\pm i\sqrt{2U(\varphi)}, \quad U(\varphi)>0$$

极易证明场的能量、动量和角动量都是零，

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+U(\varphi)=0, \quad E=\int_{-\infty}^{\infty}dx\mathscr{H}=0,$$

$$P=-\int_{-\infty}^{\infty}dx\pi\frac{\partial}{\partial x}\varphi=0, \quad M=\int_{-\infty}^{\infty}dx(x\mathscr{H})-Pt=0.$$

因此这是一个真空解，是场的零点振动. 如果要求场是实数，则给出唯一解 $\pi=0$ 或 $U(\varphi)=0$，这就是通常自发破缺对称的真空解. 若不作此要求，则还存在另一类解，即 τ 真空解. 它的一级类量子修正为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=U''(\varphi_c(t))\phi. \tag{6}$$

我们求下列形式的解

$$\phi(x,t)=\phi(t)e^{ikx},$$

则 $\phi(t)$ 满足以下形式的类薛定谔方程

$$\left[-\frac{d^2}{dt^2}-U''(\varphi_c(t))\right]\phi(t)=k^2\phi(t). \tag{7}$$

为简单起见，先讨论自由场情况，这时 $U(\varphi)=0$，方程 (5)、(7) 的通解为

$$\varphi_c=a+bt, \quad \phi(t)=\frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\omega}}.$$

为了避免能量发散，取 $b=0$. 由此给出一般解

$$\varphi(x,t)=a+\int_{-\infty}^{\infty}dk\left[c(k)\frac{e^{i(kx-\omega t)}}{\sqrt{4\pi\omega}}+h.c.\right].$$

二、φ^4 理论的 τ 真空

在 φ^4 理论中取

$$U(\varphi)=\frac{m^4}{2g^2}\left(1-\frac{g^2}{m^2}\varphi^2\right)^2, \tag{8}$$

由方程 (5)、(8) 得 τ 真空所满足的方程

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{m^4}{2g^2}\left(1 - \frac{g^2}{m^2}\varphi^2\right)^2,$$

容易求得它的解是

$$\varphi_c(t) = \pm i\frac{m}{g}\operatorname{tg} mt. \tag{9}$$

如令 $it = x$, 则得

$$\varphi_c(x) = \pm\frac{m}{g}\operatorname{th} mx, \tag{10}$$

此即通常的定态孤粒子解.

考虑到

$$\frac{d^3\varphi_c}{dt^3} = -2m^2\left(2 - \frac{3}{\cos^2 mt}\right)\frac{d\varphi_c}{dt}, \quad U(\varphi_c) = \frac{m^4}{2g^2}\frac{1}{\cos^4 mt},$$

$$U''(\varphi_c) = 4m^2 - \frac{6m^2}{\cos^2 mt},$$

可得 $k = 0$ 的一级类量子修正方程

$$\left[-\frac{d^2}{dt^2} - U''(\varphi_c)\right]\phi_0 = 0.$$

其中

$$\phi_0 = \frac{d\varphi_c}{dt} = \mp i\frac{m^2}{g}\frac{1}{\cos^2 mt}.$$

而 $k^2 \neq 0$ 的一级类量子修正满足方程

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 - \frac{6m^2}{\cos^2 mt}\right)\phi(t) = 0, \tag{11}$$

其中 $\omega^2 = 4m^2 + k^2$. 作变数变换

$$z = i\operatorname{tg} mt, \quad dz = im(1 - z^2)dt,$$

则方程 (11) 化成

$$\left[(1 - z^2)\frac{d^2}{dz^2} - 2z\frac{d}{dz} + 6 - \frac{\omega^2/m^2}{1 - z^2}\right]\phi(z) = 0,$$

这是虚宗量的伴随勒让德方程. 当 $M^2 \equiv \frac{\omega^2}{m^2} = 0, 1^2, 2^2$ 时,方程有多项式解

$$P_2^M(z) = \frac{(-)^M}{8}(1 - z^2)^{M/2}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2+M}(z^2 - 1)^2.$$

相应的动量值为虚数: $k = \pm 2im, \pm\sqrt{3}\,im, 0$; 相应的一级类量子修正为

$$\phi_0(x, t) = \frac{\sqrt{3m}}{2}\frac{1}{\cos^2 mt}, \quad M = 2, \quad \omega^2 = 4m^2$$

$$\phi_1(x, t) = i\sqrt{\frac{3m}{2}}\frac{\sin mt}{\cos^2 mt}e^{\pm\sqrt{3}mx}, \quad M = 1, \quad \omega^2 = m^2$$

$$\phi_2(x, t) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{3}{\cos^2 mt}\right)\frac{e^{\pm 2mx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad M = 0, \quad \omega^2 = 0 \tag{12}$$

这里仅 $M=2$ 的波函数保持几率守恒，其他二个波函数在 x 空间有源. 附带指出，如令 $it\to x$, $ix\to t$, 则得相应于孤粒子解 (10) 的一级类量子修正.

求 k 的连续解，设

$$\psi(t)=e^{-i\omega t}J(t),\quad z=i\,\mathrm{tg}\,mt,$$

代入方程 (11) 得

$$\left[(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}+\left(-\frac{2\omega}{m}-2z\right)\frac{d}{dz}+6\right]J(t)=0.$$

它的解为 Jacobi 多项式

$$J(t)=P_2^{\left(\frac{\omega}{m},-\frac{\omega}{m}\right)}(z)=1-\frac{3/2}{\cos^2 mt}+\frac{\omega^2}{2m^2}+i\frac{3\omega}{2m}\mathrm{tg}\,mt,$$

因此一级类量子修正的连续解是

$$\psi_k(x,t)=\left(1-\frac{3/2}{\cos^2 mt}+\frac{\omega^2}{m^2}+i\frac{3\omega}{3m}\,\mathrm{tg}\,mt\right)\frac{e^{i(kx-\omega t)}}{\sqrt{2\omega}},\quad -\infty<k<\infty$$

联立 (9)、(12) 式得标量场方程 (2) 的解

$$\begin{aligned}\varphi(x,t)=&\pm i\frac{m}{g}\mathrm{tg}\,mt+C_0\frac{\sqrt{3}\,m}{2}\frac{1}{\cos^2 mt}+\sqrt{\frac{3m}{2}}\frac{\sin mt}{\cos^2 mt}\\&\cdot(a_1e^{\sqrt{3}mx}+b_1e^{-\sqrt{3}mx})+\left(1-\frac{3/2}{\cos^2 mt}\right)(a_2e^{2mx}+b_2e^{-2mx})\\&+\int_{-\infty}^{\infty}dk\left[c(k)\left(1-\frac{3/2}{\cos^2 mt}+\frac{\omega^2}{2m^2}+i\frac{3\omega}{2m}\,\mathrm{tg}\,mt\right)\frac{e^{i(kx-\omega t)}}{\sqrt{4\pi\omega}}+h.c.\right],\end{aligned}$$

其中积分项相当于 $\omega>2m$ 与 $\omega<-2m$ 的解.

三、Sine-Gordon 理论的 τ 真空

在 S-G 理论中

$$U(\varphi)=\frac{m^4}{g^2}\left(1-\cos\frac{g}{m}\varphi\right),\tag{13}$$

代入方程 (5) 得 τ 真空方程

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=-\frac{2m^4}{g^2}\sin^2\frac{g}{2m}\varphi,$$

其解为

$$\varphi_c(t)=\frac{4n\pi m}{g}+\frac{4m}{g}\mathrm{tg}^{-1}e^{\pm imt},\tag{14}$$

令 $it=x$，得通常 S-G 理论的孤粒子解

$$\varphi_c(x)=\frac{4n\pi m}{g}+\frac{4m}{g}\mathrm{tg}^{-1}e^{\pm mx}.$$

将 (14) 代入 (13) 得

$$U(\varphi_c)=\frac{2m^4}{g^2}\frac{1}{\cos^2 mt},\quad U''(\varphi_c)=m^2\left(1-\frac{2}{\cos^2 mt}\right).$$

把它与

$$\frac{d^3\varphi_c}{dt^3} = -m^2\left(1-\frac{2}{\cos^2 mt}\right)\frac{d\varphi_c}{dt}$$

进行比较，立得动量为零的一级类量子修正

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2}-m^2+\frac{2m^2}{\cos^2 mt}\right)\phi_0(t)=0,$$

$$\therefore \qquad \phi_0(t)=\frac{d\varphi_c}{dt}=\pm i\frac{2m^2}{g}\frac{1}{\cos mt}, \quad k^2=0$$

$k^2\neq 0$ 的类量子修正由下列方程给出

$$\left[\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz}+2-\frac{\omega^2/m^2}{1-z^2}\right]\phi(z)=0, \tag{15}$$

其中 $z=i\,\mathrm{tg}\,mt$，$\omega^2=m^2+k^2$，这是一个伴随勒让德方程．当下列条件成立

$$\frac{\omega^2}{m^2}=M^2=0,1 \text{ 或 } k=\pm im,0,$$

这时有多项式解

$$P_1^M(z)=\frac{(-)^M}{2}(1-z^2)^{M/2}\left(\frac{d}{dz}\right)^{1+M}(z^2-1),$$

$$\phi_0(x,t)=\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{\cos mt}, \quad M=1, \quad k=0$$

$$\phi_1(x,t)=i\,\mathrm{tg}\,mt\frac{e^{\pm mx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad M=0, \quad k=\pm im$$

其中 $M=0$ 的解在 x 空间有源．为求连续解，令

$$\phi(t)=e^{-i\omega t}J(t), \quad \omega^2>m^2, \quad z=i\,\mathrm{tg}\,mt,$$

则方程 (15) 变为

$$\left[(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}+\left(-\frac{2\omega}{m}-2z\right)\frac{d}{dz}+2\right]J(t)=0.$$

它的解是

$$J(t)=P_1^{\left(\frac{\omega}{m},-\frac{\omega}{m}\right)}(z)=\frac{\omega}{m}+i\,\mathrm{tg}\,mt.$$

综上所述，可得标量场的一级解

$$\varphi(x,t)=\frac{4n\pi m}{g}+\frac{4m}{g}\mathrm{tg}^{-1}e^{\pm imt}+C_0\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{\cos mt}+\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{tg}\,mt(a_1e^{mx}+b_1e^{-mx})$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}dk\left[c(k)\left(\frac{\omega}{m}+i\,\mathrm{tg}\,mt\right)\frac{e^{i(kx-\omega t)}}{\sqrt{4\pi\omega}}+h.c.\right].$$

四、τ 真空的 L 秩位势

L 秩位势定义为

$$U''(\varphi) = L^2 m^2 - \frac{L(L+1)m^2}{\cos^2 mt}.$$

由此建立类薛定谔方程

$$\left[-\frac{d^2}{dt^2} - U''(\varphi_c)\right]\phi(t) = k^2\phi(t), \tag{16}$$

令

$$z = i\,\mathrm{tg}\,mt, \quad \omega^2 = (Lm)^2 + k^2,$$

方程(16)变成

$$\left[(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2} - 2z\frac{d}{dz} + L(L+1) - \frac{\omega^2/m^2}{1-z^2}\right]\phi(t) = 0.$$

当下列条件成立时有多项式解

$$\frac{\omega^2}{m^2} = M^2 = 0, 1^2, 2^2, \cdots, L^2, \quad k = \pm im\sqrt{L^2 - M^2},$$

亦即动量为虚数，它的解为

$$P_L^M(z) = \frac{(-)^M}{2^L L!}(1-z^2)^{M/2}\left(\frac{d}{dz}\right)^{L+M}(z^2-1)^2$$

$$= \frac{i^{L+M}}{2^L L!}\left(\frac{1}{\cos mt}\right)^M\left(\frac{d}{d\,\mathrm{tg}\,mt}\right)^{L+M}\left(\frac{1}{\cos mt}\right)^{2L}.$$

由此给出类量子修正的分立解

$$\phi_{LM}(x,t) = P_L^M(i\,\mathrm{tg}\,mt)e^{\pm\sqrt{L^2-M^2}mx}.$$

当且仅当 $M = \pm L$ 时，发散因子消失，这时

$$\phi_{L,L}(x,t) \sim \frac{1}{\cos^L mt}.$$

为求连续态，令 $\phi(t) = e^{-i\omega t}J(t)$，将它代入(16)，并令 $z = i\,\mathrm{tg}\,mt$，得

$$\left[(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2} + \left(-\frac{2\omega}{m} - 2z\right)\frac{d}{dz} + (L+1)\right]J(t) = 0.$$

其解为 L 级 Jacobi 多项式

$$J(t) = P_L^{\left(\frac{\omega}{m}, -\frac{\omega}{m}\right)}(i\,\mathrm{tg}\,mt),$$

因此波函数的通解为

$$\phi(x,t) = \sum_M P_{LM}(i\,\mathrm{tg}\,mt)\left(a_M e^{\sqrt{L^2-M^2}mx} + b_M e^{-\sqrt{L^2-M^2}mx}\right)$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} dk\left[c(k)P_L^{\left(\frac{\omega}{m}, -\frac{\omega}{m}\right)}(i\,\mathrm{tg}\,mt)\frac{e^{i(kx-\omega t)}}{\sqrt{4\pi\omega}} + h.c\right].$$

最后求解下列方程

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -U(\varphi), \quad U(\varphi) = \frac{m^4}{2g^2}\frac{1}{\cos^{2L} mt},$$

得经典解

$$\varphi_c(t) = \pm i\frac{m}{g}\int\frac{dmt}{\cos^L mt}.$$

由此得到标量场的一级类修正解是

$$\varphi(x, t) = \phi(x, t) + (\pm i)\frac{m}{g}\int\frac{dmt}{\cos^L mt}.$$

必须指出，在拉氏函数 (1) 中当 φ 为实数时，$\mathscr{L}$ 是厄米的. 而当 φ 为纯虚数时，$\mathscr{L}$ 仍保持为厄米，因此并不破坏理论的么正性. 这种解给出场的能量、动量和角动量都是零，因此是真空，代表场的零点振动. 而通常的真空自发破缺对称性是 τ 真空的特殊情况，即零动量解

$$\pi = 0,\quad (\varphi = \text{常数})$$

若正则动量 $\pi \neq 0$，就得到一般情况下的 τ 真空. 这种真空是方程的严格解，应该存在物理效应，它反映了非线性场论的特点. 这方面的问题尚有待于进一步探讨.

参考文献

[1] R. Jackiw, *Rev. Mod. Phys*, **49** (1977), 681.
[2] B. W. Lee, *Phys. Rep.*, **9C** (1973), No. 1.

τ VACUUM

Du Dong-sheng
(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)
Fan Hong-yi　Yin Hong-jun　Ruan Tu-nan
(*University of Science and Technology of China*)

Abstract

At the time of discussing the stationary soliton solutions of a real spin-less field in one spatial dimension, we notice that there exists another kind of strict solutions in scalar field theory. The field's total energy, momentum and angular momentum for it all vanish, hence it means vacuum which, being named as "τ vacuum", represents the zero-point vibration. Moreover if the cononical momentum's being zero $\pi = 0$ or φ's being real is demanded, then the τ vacuum automatically gives the ordinary vacuum solutions which indicate that the symmetries are spontaneously broken. In this article, the first-order quantum-like correction for the φ^4 theory, Sine-Gordan theory and the L rank potntial are discussed respectively. Although this kind of vacuum solutions is an imaginary one, it is important for studying the vacuum's mechanism, for upon transforming it into the Euclidean space, it belomes the ordinary soliton solution.